ویرایش هشتم سال ۲۰۰۸

راهنمای حل مسائل

مبانی فیزیک

جلد دوم: الکتریسیته و مغناطیس

دیوید هالیدی - رابرت رزنیک - جرل واکر

تألیف:

محمد رضا جلیلیان نصرتی

فهرست

فصل ۱۷

بار الکتریکی ۵

فصل ۱۸

میدان‌های الکتریکی ۲۳

فصل ۱۹

قانون گاوس ۵۰

فصل ۲۰

پتانسیل الکتریکی ۷۴

فصل ۲۱

ظرفیت ۱۰۵

فصل ۲۲

جریان و مقاومت الکتریکی ۱۲۶

فصل ۲۳

مدارهای الکتریکی ۱۴۰

فصل ۲۴

میدان‌های مغناطیسی ۱۷۲

فصل ۲۵

میدان‌های مغناطیسی ناشی از جریان‌ها ۱۹۳

فصل ۲۶

القایش و القاییدگی ۲۲۱

فصل ۲۷

نوسان‌های الکترومغناطیسی و جریان متناوب ۲۴۹

فصل ۲۸

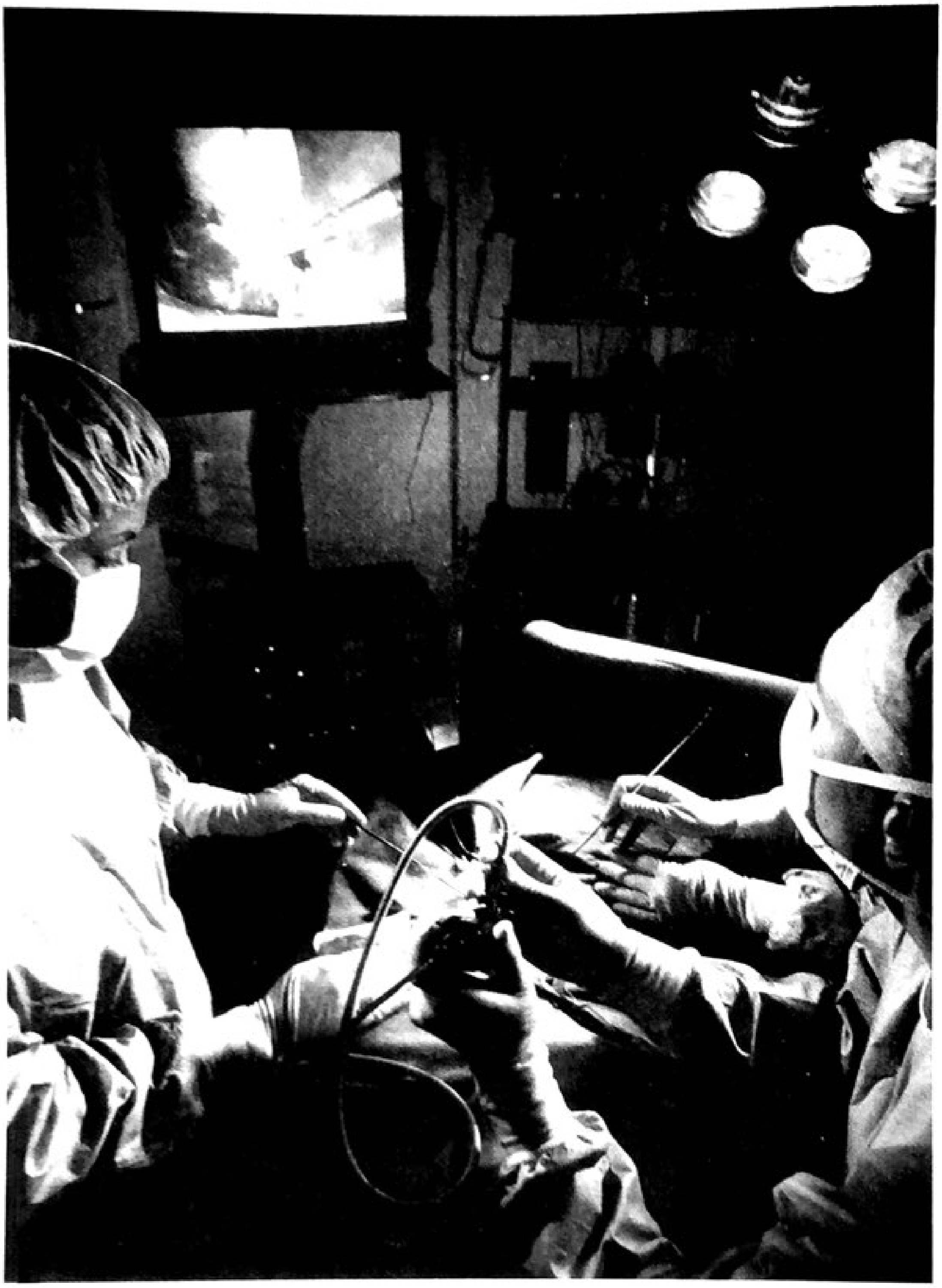
معادله‌های ماکسول؛ خواص مغناطیسی داده ۲۷۴

فصل ۲۹

موج‌های الکترومغناطیسی ۲۹۶

۱۷

بار الکتریکی



بخش ۱۷-۴ قانون کولن

●۱- برای آنکه بزرگی نیروی الکتروستاتیکی میان دو بار نقطه‌ای $q_1 = ۲۶/۰ \mu C$ و $q_2 = -۴۷/۰ \mu C$ برابر با $۵/۷۰ N$ باشد، فاصلهٔ بین آنها باید چقدر باشد؟ SSM

حل:
$$F = k\frac{q_1 q_2}{r^۲} \Rightarrow r = \sqrt{\frac{k q_1 q_2}{F}}$$
$$= \sqrt{\frac{(۹\times۱۰^۹)(۲۶\times۱۰^{-۶})(۴۷\times۱۰^{-۶})}{۵/۷}} = ۱/۳۹ m$$

●۲- دو ذره با بار یکسان در فاصلهٔ $۳/۲\times۱۰^{-۳} m$ از یکدیگر نگه داشته شده و سپس از حال سکون رها می‌شوند. مشاهده می‌شود که شتاب اولیهٔ ذرهٔ اول $۷/۰ m/s^۲$ و شتاب اولیهٔ ذرهٔ دوم $۹/۰ m/s^۲$ است. اگر جرم ذرهٔ اول $۶/۳\times۱۰^{-۷} kg$ باشد، (الف) جرم ذرهٔ دوم و (ب) بزرگی بار هر ذره چقدر است؟ ILW

حل: (الف) می‌دانیم نیرویی که این دو ذره به یکدیگر وارد می‌کنند با هم برابر ولی در جهت مخالف است.

$$F_1 = F_2 \Rightarrow m_1 a_1 = m_2 a_2 \Rightarrow m_2 = \frac{m_1 a_1}{a_2} = \frac{(۶/۳\times۱۰^{-۷})(۷)}{۹}$$
$$= ۴/۹\times۱۰^{-۷} kg$$

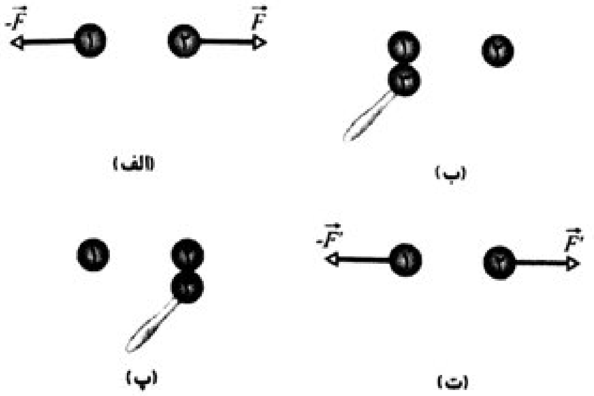
(ب)
$$F_1 = m_1 a_1 \ , \ F_1 = k\frac{q_1 q_2}{r^۲} = k\frac{q^۲}{r^۲}$$
$$\Rightarrow q^۲ = \frac{r^۲ m_1 a_1}{k} \Rightarrow q = \sqrt{\frac{(۳/۲\times۱۰^{-۳})^۲(۶/۳\times۱۰^{-۷})(۷)}{۹\times۱۰^۹}}$$
$$= ۷/۱\times۱۰^{-۱۱} C$$

●۳- ذره‌ای با بار $+۳/۰۰\times۱۰^{-۶} C$ در فاصلهٔ $۱۲/۰ cm$ از ذرهٔ دیگری با بار $-۱/۵۰\times۱۰^{-۶} C$ قرار دارد. بزرگی نیروی الکتروستاتیکی میان دو ذره را محاسبه کنید.

حل:
$$F = k\frac{q_1 q_2}{r^۲} \Rightarrow F = ۹\times۱۰^۹ \frac{(۳\times۱۰^{-۶})(۱/۵\times۱۰^{-۶})}{(۱۲\times۱۰^{-۲})^۲} = ۲/۸ N$$

چون بار دو ذره مخالف هم است، بنابراین نیرو جاذبه است.

●۴- کره‌های رسانای منزوی مشابه ۱ و ۲ بارهای یکسانی دارند و در فاصله‌ای از هم قرار گرفته‌اند که در مقایسه با قطر آنها زیاد است، (شکل ۱۷-۲۲ الف). نیروی الکتروستاتیکی که از سوی کرهٔ ۱ بر کرهٔ ۲ وارد می‌شود $\vec{F}$ است. حال فرض کنید که کرهٔ مشابه سوم ۳، که دارای دستگیره‌ای عایق و در ابتدا خنثی است، نخست با کرهٔ ۱ (شکل ۱۷-۲۲ب)، سپس با کرهٔ ۲ (شکل ۱۷-۲۲پ) تماس پیدا کند، و سرانجام برداشته شود (شکل ۱۷-۲۲ ت). بزرگی نیروی الکتروستاتیکی F' که اینک بر کرهٔ ۲ وارد می‌شود چقدر است؟ نسبت F'/F چیست؟



شکل ۱۷-۲۲ مسئلهٔ ۴

حل: وقتی کره‌ی ۳ با کره‌ی ۱ تماس می‌یابد. بار این دو کره با یکدیگر برابر می‌شود. بنابراین کره‌ی ۱ بعد از جدایی از کره‌ی ۳ دارای بار $\frac{q}{۲}$ است. بار کره‌ی ۳ نیز $\frac{q}{۲}$ است. هنگامی که کره‌ی ۳ با بار $\frac{q}{۲}$ با کره‌ی ۱ با بار q تماس پیدا می‌کند، این دو کره بعد از تماس دارای بارهای مساوی هستند که اندازه‌ی آن برابر است با:

$$q'_1 = q'_2 = \frac{q + q/۲}{۲} = \frac{۳}{۴}q$$

بنابراین نیروی بیان کره‌ی ۱ و ۲ در حالت نهایی برابر است با:

$$F' = k\frac{q'_1 q'_2}{r^۲} = k\frac{\left(\frac{۳}{۴}q\right)\left(\frac{۱}{۲}q\right)}{r^۲} = \frac{۳}{۸}k\frac{q^۲}{r^۲} = ۳F$$
$$\Rightarrow \frac{F'}{F} = \frac{۳}{۸} = ۰/۳۷۵ \Rightarrow F' = ۰/۳۷۵F$$

●۵- از بار Q که در ابتدا روی کرهٔ کوچکی است، یک جزء q به کرهٔ دیگری که در نزدیکی آن واقع است منتقل می‌شود. هر دو کره را می‌توان به صورت ذره در نظر گرفت. نیروی الکتروستاتیکی میان دو کره به ازای چه مقداری از q/Q بیشینه است؟ SSM ILW

حل:
$$F = k\frac{q(Q-q)}{r^۲} = \frac{k(qQ - q^۲)}{r^۲}$$

بیشینه F از رابطه زیر حاصل می‌گردد.

$$\frac{dF}{dq} = ۰ \Rightarrow Q - ۲q = ۰ \Rightarrow \frac{q}{Q} = \frac{۱}{۲}$$

●۶- در ضربهٔ برگشتی حاصل از تخلیهٔ یک آذرخش نوعی، جریان $۲/۵\times۱۰^{۴} A$ به مدت $۲۰ \mu s$ به وجود می‌آید. در این رویداد چقدر بار منتقل می‌شود؟ [redacted]

حل:
$$q = It = (۲/۵\times۱۰^{۴})(۲۰\times۱۰^{-۶}) = ۰/۵C$$

●●۷- دو کرهٔ رسانای مشابه، که در جایی ثابت شده‌اند، هنگامی که فاصلهٔ جدایی مرکز به مرکز آنها برابر $۵۰/۰ cm$ است، با نیروی الکتروستاتیکی $۰/۱۰۸N$ یکدیگر را می‌ربایند. سپس کره‌ها توسط سیم رسانای نازکی به هم متصل می‌شوند.

وقتی که سیم برداشته شود، کره‌ها یکدیگر را با نیروی الکتروستاتیکی N ۰/۰۳۶۰ می‌رانند. از بارهای اولیهٔ روی کره‌ها، که مجموع آنها مقدار مثبتی است، (الف) چه مقدار بار منفی روی یکی از آنها و (ب) چه مقدار بار مثبت روی دیگری قرار داشته است؟ **SSM WWW**

حل: بار کره‌ی اول $q_۱$ و بار کره‌ی دوم $q_۲$ است. بعد از تماس بار دو کره با یکدیگر برابر می‌شود. در این حالت داریم:

$$q_۱' = q_۲' = \frac{۱}{۲}(q_۱ + q_۲)$$

$$F = k\frac{q_۱ q_۲}{r_۲} \quad , \quad F' = k\frac{q_۱' q_۲'}{r^۲}$$

با استفاده از نیروی F' ، $(q_۱ + q_۲)$ را می‌یابیم.

$$۰/۰۳۶ = ۹\times ۱۰^۹ \frac{(q_۱ + q_۲)^۲}{۴(۰/۵)^۲} \Rightarrow (q_۱ + q_۲) = \pm ۲\times ۱۰^{-۶}\ C \quad (۱)$$

می‌توان دو حالت $q_۱ + q_۲ > ۰$ و $q_۱ + q_۲ < ۰$ را در نظر گرفت. برای حالت $q_۱ + q_۲ > ۰$ داریم:

$$q_۱ + q_۲ = ۲\times ۱۰^{-۶}\ C \Rightarrow q_۲ = ۲\times ۱۰^{-۶} - q_۱ \quad (۲)$$

از طرفی می‌توانیم مقدار $q_۱q_۲$ را از نیروی F بیابیم:

$$F = k\frac{q_۱q_۲}{r^۲} = ۹\times ۱۰^۹ \frac{q_۱ q_۲}{(۰/۵)^۲} = ۰/۱۰۸$$

$$\Rightarrow q_۱q_۲ = -۳\times ۱۰^{-۱۲}\ C^۲$$

از آنجا که بار دو کره در حالت اول مخالف هم است، علامت منفی برای حاصل بالا در نظر گرفته شد. اگر این شرط را با روابط ۱ و ۲ با هم در نظر بگیریم، به معادله‌ی درجه دوم زیر می‌رسیم:

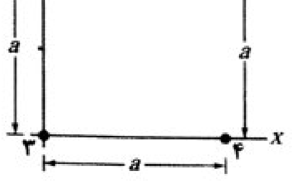
$$q_۱^۲ - ۲\times ۱۰^{-۶} q_۱ - ۳\times ۱۰^{-۱۲} = ۰$$

$$\Rightarrow q_۱ = ۳\times ۱۰^{-۶}\ C \ , \ q_۱ = -۱\times ۱۰^{-۶}\ C$$

اگر $q_۱ = ۳\times ۱۰^{-۶}\ C$ باشد، آنگاه $q_۲ = -۱\times ۱۰^{-۶}\ C$ و اگر $q_۱ = -۱\times ۱۰^{-۶}\ C$ باشد، آنگاه $q_۲ = ۳\times ۱۰^{-۶}\ C$ است.

برای حالتی که $q_۱ + q_۲ < ۰$ باشد، حل به همین گونه است.

●●۸- در شکل ۱۷-۲۳، چهار ذره مربعی را تشکیل داده‌اند. بارها عبارت‌اند از $q_۱ = q_۴ = Q$ و $q_۲ = q_۳ = q$. (الف) اگر نیروی الکترواستاتیکی خالص وارد بر ذره‌های ۱ و ۳ برابر صفر باشد، نسبت Q/q چقدر است؟ (ب) آیا هیچ مقداری از q وجود دارد که نیروی الکترواستاتیکی وارد بر هر چهار ذره را برابر صفر کند؟ توضیح دهید. GO



شکل ۱۷-۲۳ مسئله‌های ۸، ۹ و ۶۲.

حل: (الف) برآیند نیروهای وارد بر ذره‌های ۱ و ۳ صفر است.

$$\vec{F}_{net} = ۰ \Rightarrow (F_{net})x = ۰$$

$$(F_{net})y = ۰$$

$$(F_{net})_x = \frac{۱}{۴\pi\varepsilon_۰}\left[\frac{q_۱ q_۴}{۲a^۲}\cos(۴۵°) + \frac{q_۱ q_۲}{a^۲}\right] = ۰$$

$$\frac{Q^۲}{۲a^۲\sqrt{۲}} + \frac{۹Q}{a^۲} = ۰ \Rightarrow \frac{Q}{۹} = -۲\sqrt{۲}$$

(ب) خیر. می‌توان نشان داد اگر چنین باشد، آنگاه مقدار $\frac{Q}{۹}$ برای هر رابطه متفاوت است که خلاف فرض سؤال و منطق است.

●●۹- در شکل ۱۷-۲۳، بارها عبارت‌اند از $q_۱ = -q_۲ = ۱۰۰nC$ و $q_۳ = -q_۴ = ۲۰۰nC$، و فاصلهٔ بارها $a = ۵/۰cm$ است. مؤلفه‌های (الف) x و (ب) y نیروی الکتروستاتیکی خالص وارد بر ذرهٔ ۳ چقدر است؟ **ILW**

حل: (الف)

$$F_{۳x} = \frac{۱}{۴\pi\varepsilon_۰}\left(\frac{q_۳ q_۲}{۲a^۲}\cos(۴۵) + \frac{q_۳ q_۴}{a^۲}\right)$$

$$= ۹\times ۱۰^۹\left[\frac{(۲۰۰\times ۱۰^{-۹})(۱۰۰\times ۱۰^{-۹})}{۲(۲۵\times ۱۰^{-۴})}\frac{\sqrt{۲}}{۲} + \frac{(۲۰۰\times ۱۰^{-۹})(۲۰۰\times ۱۰^{-۹})}{۲۵\times ۱۰^{-۴}}\right]$$

$$= ۰/۱۷\ N$$

(ب)

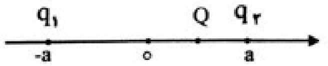
$$F_{۳y} = \frac{۱}{۴\pi\varepsilon_۰}\left(\frac{q_۳ q_۲}{۲a^۲}\sin(۴۵) - \frac{q_۳ q_۱}{a^۲}\right)$$

$$= ۹\times ۱۰^۹\left(\frac{(۲۰۰\times ۱۰^{-۹})(۱۰۰\times ۱۰^{-۹})}{۲(۲۵\times ۱۰^{-۴})}\times\frac{\sqrt{۲}}{۲} - \frac{(۲۰۰\times ۱۰^{-۹})(۱۰۰\times ۱۰^{-۹})}{۲۵\times ۱۰^{-۴}}\right)$$

$$= -۰/۰۴۶N$$

●●۱۰- سه ذره روی محور x ثابت شده‌اند. ذرهٔ ۱ با بار $q_۱$ در $x = -a$ و ذرهٔ ۲ با بار $q_۲$ در $x = +a$ قرار دارند. نسبت $q_۱/q_۲$ باید چقدر باشد تا در هنگامی که ذرهٔ ۳ با بار $+Q$ در (الف) $x = +۰/۵۰۰a$ و (ب) $x = +۱/۵۰a$ قرار دارد، نیروی الکتروستاتیکی وارد بر آن برابر با صفر باشد؟

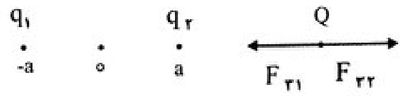
حل: (الف)



$$F_{۳۱} = F_{۳۲} \Rightarrow \frac{۱}{۴\pi\varepsilon_۰}\frac{q_۱ Q}{(۱/۵a)^۲} = \frac{۱}{۴\pi\varepsilon_۰}\frac{q_۲ Q}{(۰/۵a)^۲}$$

$$\frac{q_۱}{(۱/۵)^۲} = \frac{q_۲}{(۰/۵)^۲} \Rightarrow \frac{q_۱}{q_۲} = \left(\frac{۱/۵}{۰/۵}\right)^۲ = ۹$$

(ب) در این حالت باید نیروهای وارد بر ذره‌ی ۳ به صورت زیر باشد تا ذره ساکن باشد

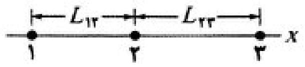


$$F_{۳۱}=F_{۳۲}\Rightarrow \frac{۱}{۴\pi\varepsilon_{\circ}}\frac{q_۳q_۱}{(۲/۵a)^۲}=\frac{۱}{۴\pi\varepsilon_{\circ}}\frac{q_۳q_۲}{(۰/۵a)^۲}$$

$$\Rightarrow \frac{q_۱}{q_۲}=\left(\frac{۲/۵}{۰/۵}\right)^۲=۲۵$$

کاملاً روشن است که $q_۱$ و $q_۲$ در این حالت دارای علامت‌های مختلف هستند.

●●۱۱- در شکل ۱۷-۲۴ سه ذرهٔ باردار روی محور x قرار دارند. ذره‌های ۱ و ۲ در مکان خود ثابت‌اند. ذرهٔ ۳ می‌تواند حرکت کند، ولی نیروی الکتروستاتیکی خالص وارد بر آن از طرف ذره‌های ۱ و ۲ در جایی برابر صفر است. اگر $L_{۲۳}=L_{۱۲}$ باشد؛ نسبت $q_۱/q_۲$ چقدر است؟



شکل ۱۷-۲۴ مسئله‌های ۱۱ و ۵۶

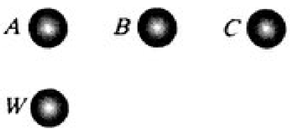
حل:

$$F_{۳۱}=F_{۳۲}\Rightarrow \frac{۱}{۴\pi\varepsilon_{\circ}}\frac{q_۳q_۱}{(L_{۱۲}+L_{۲۳})^۲}=\frac{۱}{۴\pi\varepsilon_{\circ}}\frac{q_۳q_۲}{(L_{۲۳})^۲}$$

$$\Rightarrow \frac{q_۱}{q_۲}=\left(\frac{۲L_{۱۲}}{L_{۱۲}}\right)^۲=۴$$

کاملاً روشن است که بار $q_۱$ و $q_۲$ مختلف‌العلامت هستند.

●●۱۲- شکل ۱۷-۲۵ چهار کرهٔ رسانای مشابه را نشان می‌دهد که در فاصله‌ای از یکدیگر قرار گرفته‌اند. کرهٔ W (با بار اولیهٔ صفر) با کرهٔ A تماس داده شده و سپس از آن جدا می‌شود. پس از آن، کرهٔ W با کرهٔ B (با بار اولیه $-۳۲e$) تماس داده شده و سپس از آن جدا می‌شود. سرانجام، کرهٔ W با کرهٔ C (با بار اولیهٔ $+۴۸e$) تماس داده شده و از آن جدا می‌شود. بار نهایی روی کرهٔ W برابر $+۱۸e$ است. بار اولیهٔ روی کرهٔ A چقدر بوده است؟ GO



شکل ۱۷-۲۵ مسئلهٔ ۱۲

حل: در تماس اول بار کره‌ی A نصف شده و بار کره‌ی W برابر $\frac{۱}{۲}q_A$ می‌شود که q_A بار اولیه‌ی کره‌ی A است. در تماس با کره‌ی B داریم:

$$q'_W=\frac{۱}{۲}(q_W+q_B)=\frac{۱}{۲}\left(\frac{۱}{۲}q_A-۳۲e\right)$$

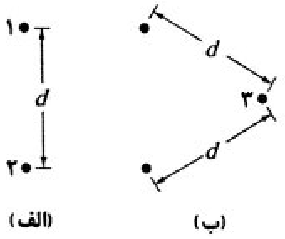
در تماس با کره‌ی C داریم:

$$q''_W=\frac{۱}{۲}(q'_W+q_C)=\frac{۱}{۲}\left[\frac{۱}{۲}\left(\frac{۱۹}{۲}A-۳۲e\right)\right]=۱۸e$$

از حل بدست می‌آوریم:

$$q_A=۱۶e$$

●●۱۳- در شکل ۱۷-۲۶ الف، ذره‌های ۱ و ۲ هر کدام بار $۲۰/۰\mu C$ دارند و در فاصلهٔ $d=۱/۵۰m$ از یکدیگر ثابت شده‌اند. (الف) بزرگی نیروی الکتروستاتیکی وارد بر ذرهٔ ۱ ناشی از ذرهٔ ۲ چقدر است؟ در شکل ۱۷-۲۶ ب، ذرهٔ ۳ با بار $۲۰/۰\mu C$ به گونه‌ای قرار گرفته است که یک مثلث با ضلعهای مساوی ایجاد می‌شود. (ب) بزرگی نیروی الکتروستاتیکی خالص وارد بر ذرهٔ ۱ ناشی از ذره‌های ۲ و ۳ چقدر است؟

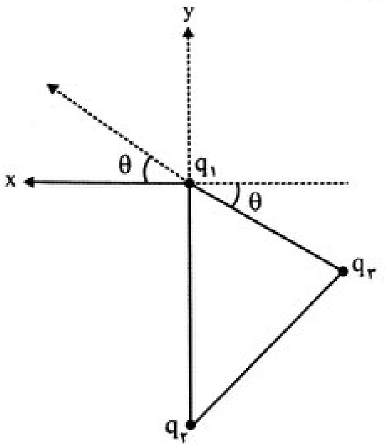


شکل ۱۷-۲۶ مسئلهٔ ۱۳

حل: (الف)

$$F_{۱۲}=\frac{۱}{۴\pi\varepsilon_{\circ}}\frac{q_۱q_۲}{d^۲}=۹\times۱۰^۹\frac{(۲۰\times۱۰^{-۶})^۲}{(۱/۵)^۲}=۱/۶\,N$$

(ب) از شکل پیداست $\theta=۳۰^{\circ}$ است.



$$F_{۱۳x}=F_{۱۳}\cos\theta=\frac{۱}{۴\pi\varepsilon_{\circ}}\frac{(۲۰\times۱۰^{-۶})^۲\cos(۳۰^{\circ})}{(۱/۵)^۲}=۱/۴\,N$$

$$F_{۱۳y}=F_{۱۳}\sin\theta=\frac{۱}{۴\pi\varepsilon_{\circ}}\frac{(۲۰\times۱۰^{-۶})^۲}{(۱/۵)^۲}\sin(۳۰^{\circ})=۰/۸\,N$$

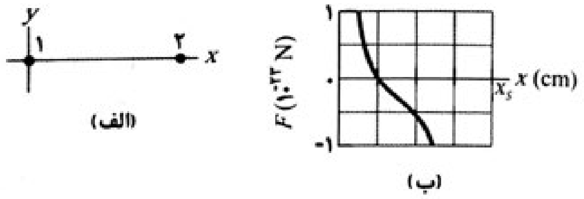
$$(F_{net})_y=۱/۶N+۰/۸N=۲/۴N$$

$$(F_{net})_x=۱/۴\,N$$

برآیند نیروها برابر است با:

$$F_{net}=\sqrt{(۲/۴)^۲+(۱/۴)^۲}=۲/۷۸N$$

●●۱۴- در شکل ۱۷-۲۷ الف، ذرهٔ ۱ (با بار q_1) و ذرهٔ ۲ (با بار q_2) در مکانی روی محور x ثابت شده‌اند و از یکدیگر $8/00$cm فاصله دارند. می‌خواهیم ذرهٔ ۳ (با بار $q_3 = +8/00\times10^{-19}$ C) به گونه‌ای روی خط میان ذره‌های ۱ و ۲ قرار گیرد که آنها نیروی الکتروستاتیکی خالص $\vec{F}_{3,net}$ را بر آن وارد کنند. شکل ۱۷-۲۷ ب، مؤلفهٔ x این نیرو را برحسب مختصهٔ x مکانی که ذرهٔ ۳ در آن واقع شده است، نشان می‌دهد. مقیاس محور x با $x_s = 8/0$cm مشخص شده است. (الف) علامت بار q_1 و (ب) نسبت q_2/q_1 چیست؟



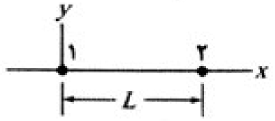
شکل ۱۷-۲۷ مسئلهٔ ۱۴

حل: (الف) هنگامی که بار q_3 به q_1 نزدیک می‌شود، نیروی بین آنها دافعه است، بنابراین این دو بار هم علامت هستند. ($q_1 > 0$)

(ب) به ازای $x = 2$cm ، نیروی برآیند صفر است. بنابراین:

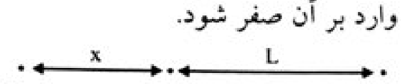
$$\frac{q_1}{4\pi\varepsilon_0 x^2} = \frac{q_2}{4\pi\varepsilon_0 (d-x)^2} \Rightarrow \frac{q_2}{q_1} = \frac{(d-x)^2}{x^2} = \left(\frac{8-2}{2}\right)^2 = 9$$

●●۱۵- در شکل ۱۷-۲۸، ذرهٔ ۱ با بار $+1/0\mu C$ و ذرهٔ ۲ با بار $-3/0\mu C$ به فاصلهٔ $L = 10/0$ cm روی محور x ثابت شده‌اند. اگر ذرهٔ ۳ با بار نامعلوم q_3 به گونه‌ای قرار داده شود که نیروی الکتروستاتیکی خالص وارد بر آن از طرف ذره‌های ۱ و ۲ صفر باشد، مختصهٔ (الف) x و (ب) y ذرهٔ ۳ باید چقدر باشد؟



شکل ۱۷-۲۸ مسئله‌های ۱۵، ۱۹، ۳۲، ۶۴ و ۶۹.

حل: (الف) ذره‌ی q_3 باید خارج میان دو بار q_1 و q_2 باشد تا نیروی برآیند وارد بر آن صفر شود.

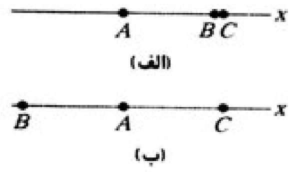


$$\frac{q_1 q_3}{4\pi\varepsilon_0 (x^2)} = \frac{q_2 q_3}{4\pi\varepsilon_0 (L+x)^2} \Rightarrow \left(\frac{L+x}{x}\right)^2 = \left|\frac{q_2}{q_1}\right|$$

$$\left(\frac{10+x}{x}\right)^2 = \left|\frac{3}{1}\right| \Rightarrow x = 13/6\text{cm}$$

(ب) تعادل روی محور x برقرار می‌شود و $y = 0$ است.

●●۱۶- در شکل ۱۷-۲۹ الف، سه ذرهٔ باردار مثبت روی محور x ثابت شده‌اند. ذره‌های B و C به حدی به یکدیگر نزدیک‌اند که می‌توانیم فاصلهٔ آنها از ذرهٔ A را یکی بگیریم. نیروی خالص وارد بر ذرهٔ A از طرف ذره‌های B و C برابر با $2/014\times10^{-23}$ N و در جهت منفی محور x است. در شکل ۱۷-۲۹ ب، ذرهٔ B در طرف مخالف نسبت به A جابه‌جا شده است ولی هنوز در همان فاصله از A است. اکنون نیروی خالص وارد بر A برابر با $2/877\times10^{-24}$ N و در جهت منفی محور x است. نسبت q_C/q_B چقدر است؟



شکل ۱۷-۲۹ مسئلهٔ ۱۶

حل: از داده‌های سؤال پیداست که q_C با q_A هم علامت هستند و q_A و q_B علامت مخالف دارند.

$$F_1 = \frac{q_A q_B}{4\pi\varepsilon_0 x^2} + \frac{q_A q_C}{4\pi\varepsilon_0 x^2} = \frac{q_A(q_B + q_C)}{x^2}$$

$$F_2 = \frac{q_A q_B}{4\pi\varepsilon_0 x^2} + \frac{q_A q_C}{4\pi\varepsilon_0 x^2} = \frac{q_A(-q_B + q_C)}{x^2}$$

$$\frac{F_1}{F_2} = \frac{q_B + q_C}{-q_B + q_C} \Rightarrow \frac{20/14}{-2/877} = \frac{q_B + q_C}{q_C - q_B} \Rightarrow \frac{q_C}{q_B} = 1/33$$

●●۱۷- بارها و مختصات دو ذرهٔ باردار که در صفحهٔ xy ثابت شده‌اند عبارت‌اند از $q_1 = +3/0\,\mu C$ ، $x_1 = 3/5$ cm ، $y_1 = 0/50$ cm ، و $q_2 = -4/0\,\mu C$ ، $x_2 = -2/0$ cm ، $y_2 = 1/5$ cm ، (الف) بزرگی و (ب) جهت نیروی الکتروستاتیکی وارد بر ذرهٔ ۲ از طرف ذرهٔ ۱ را بیابید. در چه مختصهٔ (پ) x و (ت) y ذرهٔ سوم با بار $q_3 = +4/0\,\mu C$ باید قرار گیرد تا نیروی الکتروستاتیکی خالص وارد بر ذرهٔ ۳ از طرف ذره‌های ۱ و ۲ صفر شود؟

حل: (الف)

$$r_{12} = \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_2 - y_1)^2} = \sqrt{(3/5 + 2)^2 + (0/5 - 1/5)^2} = 5/6\text{cm}$$

$$F_{21} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q_1 q_2}{r_{12}^2} = 9\times10^9 \frac{(3\times10^{-6})(4\times10^{-6})^2}{(0/056)^2} = 34/5\text{N}$$

نیرو جاذبه است.

(ب)
$$\theta = \tan^{-1}\left(\frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}\right) \Rightarrow \theta = -10/3^\circ$$

(پ) و (ت) فرض می‌کنیم ذره‌ی ۳ در مختصات x_3, y_3 قرار دارد. نیروی کولنی را به صورت برداری می‌نویسیم.

$$\vec{F}_{31} = \frac{q_1 q_3}{4\pi\varepsilon_0}\frac{\vec{r}_{31}}{|r_{31}|^3}$$

$$\vec{r}_{31} = (x_1 - x_3)\hat{i} + (y_1 - y_3)\hat{j}$$
$$= (3/5\times10^{-2} - x_3)\hat{i} + (0/5\times10^{-2} - y_3)\hat{j}$$

$$\vec{F}_{۲۳} = \frac{-q_۲ q_۳}{۴\pi\varepsilon_۰}\frac{\vec{r}_{۲۳}}{|r_{۲۳}|^۳}$$

$$\vec{r}_{۲۳} = (x_۳ - x_۲)\hat{i} + (y_۳ - y_۲)\hat{j}$$
$$= (-۲\times۱۰^{-۲} - x_۲)\hat{i} + (۱/۵\times۱۰^{-۲} - y_۲)\hat{j}$$

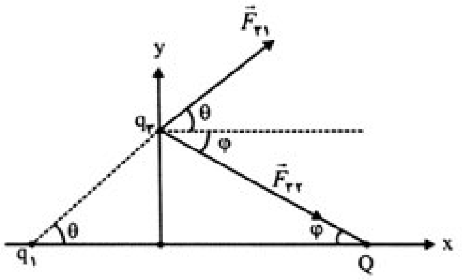
$$\vec{F}_۲ = \vec{F}_{۲۱} + \vec{F}_{۲۳} = ۰ \Rightarrow \frac{q_۱ q_۲}{۴\pi\varepsilon_۰}\frac{\vec{r}_{۲۱}}{|r_{۲۱}|^۳} - \frac{q_۲ q_۳}{۴\pi\varepsilon_۰}\frac{\vec{r}_{۲۳}}{|r_{۲۳}|^۳} = ۰$$

$$\Rightarrow q_۱\frac{\vec{r}_{۲۱}}{|r_{۲۱}|^۳} = +q_۳\frac{\vec{r}_{۲۳}}{|r_{۲۳}|^۳}$$

اگر این معادله‌ی برداری را حل کنیم، بدست می‌آوریم
$y_۲ = ۲/۶۶\times۱۰^{-۲}\ m$ و $x_۲ = -۸/۳۵\times۱۰^{-۲}\ m$

●●۱۸- دو ذره روی محور x ثابت شده‌اند. ذرهٔ ۱ با بار $۴۰\mu C$ در $x = -۲/۰\ cm$، و ذرهٔ ۲ با بار Q در $x = ۳/۰\ cm$ واقع‌اند. ذرهٔ ۳ که بزرگی بار آن $۲۰\mu C$ است از حالت سکون روی محور y در $y = ۲/۰ cm$ رها می‌شود. اگر شتاب اولیهٔ ذرهٔ ۳ در جهت مثبت (الف) محور x و (ب) محور y باشد، مقدار Q چقدر است؟

حل: (الف)



اگر بخواهیم شتاب در راستای محور x باشد، بنابراین نیروی برآیند در راستای محور y صفر است. از شکل پیداست:

$$F_{۳۱}\sin\theta = F_{۳۲}\sin(\varphi)$$

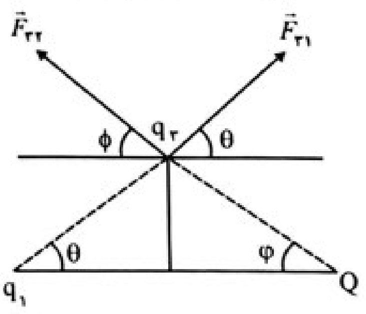
$$\sin\theta = \frac{\sqrt{۲}}{۲} \qquad \sin\varphi = \frac{۲}{\sqrt{(۲)^۲ + (۳)^۲}} = \frac{۲}{\sqrt{۱۳}}$$

$$\frac{۱}{۴\pi\varepsilon_۰}\frac{q_۱ q_۳}{(۲^۲ + ۲^۲)\times۱۰^{-۴}}\frac{\sqrt{۲}}{۲} = \frac{۱}{۴\pi\varepsilon_۰}\frac{q_۳ Q}{(۲^۲ + ۳^۲)\times۱۰^{-۴}}\frac{۲}{\sqrt{۱۳}}$$

$$\Rightarrow \frac{(۴۰\times۱۰^{-۶})\sqrt{۲}}{۱۶\times۱۰^{-۴}} = \frac{۲Q}{۱۳\sqrt{۱۳}\times۱۰^{-۴}} \Rightarrow Q = -۸۳\times۱۰^{-۶}\ C$$

علامت منفی بدین جهت انتخاب شد که نیروی بین Q و $q_۳$ باید مخالف هم باشد تا نیرو جاذبه باشد.

(ب) در این حالت نیروی افقی وارد بر ذره صفر است.



$$F_{۳۱}\cos\theta = F_{۳۲}\cos\varphi \qquad \theta = \frac{\pi}{۴}$$

$$\cos\varphi = \frac{۳}{\sqrt{(۳)^۲ + (۲)^۲}} = \frac{۳}{\sqrt{۱۳}}$$

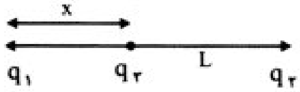
$$\frac{۱}{۴\pi\varepsilon_۰}\frac{q_۱ q_۳}{[۲^۲ + ۲^۲]\times۱۰^{-۴}}\frac{\sqrt{۲}}{۲} = \frac{۱}{۴\pi\varepsilon_۰}\frac{q_۳ Q}{[۳^۲ + ۲^۲]\times۱۰^{-۴}}\frac{۳}{\sqrt{۱۳}}$$

$$\Rightarrow Q = ۵۵/۲\times۱۰^{-۶}\ C$$

در این حالت چون نیروی بین $q_۳$ و Q دافعه است، Q و $q_۳$ هم علامت هستند.

●●۱۹- در شکل ۱۷-۲۸، ذرهٔ ۱ با بار $+q$ و ذرهٔ ۲ با بار $+۴/۰۰q$ در فاصلهٔ $L = ۹/۰۰\ cm$ روی محور x ثابت شده‌اند. اگر ذرهٔ ۳ با بار $q_۳$ به گونه‌ای قرار گیرد که سه ذره به هنگام رها شدن، در جای خود باقی بمانند (الف) مختصهٔ x و (ب) مختصهٔ y ذرهٔ ۳ و (پ) نسبت $q_۳/q$ باید چقدر باشد؟ SSM WWW

حل: (الف) بار $q_۳$ با علامت منفی را میان دو بار قرار می‌دهیم.



$$F_{۱۳} = F_{۲۳}$$

$$\frac{۱}{۴\pi\varepsilon_۰}\frac{q_۱ q_۳}{x^۲} = \frac{۱}{۴\pi\varepsilon_۰}\frac{q_۲ q_۳}{(L-x)^۲} \Rightarrow \frac{۴q}{(L-x)^۲} = \frac{q}{x^۲}$$

$$\Rightarrow ۳x^۲ + ۲Lx - L^۲ = ۰$$

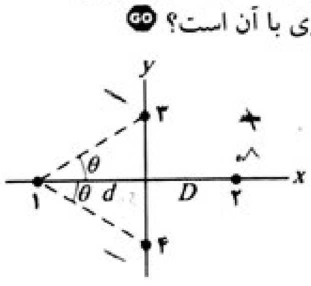
از حل این معادله جواب $x = ۰/۰۳m$ را بدست می‌آوریم. این مقدار را در معادله‌ی زیر قرار می‌دهیم

$$F_{۳۱} = F_{۲۱} \Rightarrow \frac{k q_۳ q}{۹\times۱۰^{-۴}} = \frac{kq(۴q)}{۸۱\times۱۰^{-۴}} \Rightarrow \frac{q_۳}{q} = \frac{۴}{۹}$$

(ب) $y = ۰$

(پ) $\frac{q_۳}{q} = \frac{-۴}{۹}$

●●●۲۰- شکل ۱۷-۳۰ آرایشی از چهار ذرهٔ باردار را، با زاویهٔ $\theta = ۳۰/۰°$ و فاصلهٔ $d = ۲/۰۰cm$ نشان می‌دهد. بار ذرهٔ ۲ برابر با $q_۲ = +۸/۰۰\times۱۰^{-۱۹}\ C$، و بار ذره‌های ۳ و ۴ برابر با $q_۳ = q_۴ = -۱/۶۰\times۱۰^{-۱۹}\ C$ است. (الف) اگر نیروی الکتروستاتیکی وارد بر ذرهٔ ۱ از طرف ذره‌های دیگر برابر صفر باشد، فاصلهٔ D میان مبدأ و ذرهٔ ۲ چقدر است؟ (ب) اگر ذره‌های ۳ و ۴ به محور x نزدیکتر شوند ولی تقارن آنها نسبت به این محور حفظ شود، آیا مقدار مورد نظر D بزرگتر از قسمت (الف) است یا کوچکتر یا مساوی با آن است؟ GO



شکل ۱۷-۳۰ مسئلهٔ ۲۰

حل: (الف) برای راستای x داریم:

$$\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q_1q_3\cos\theta}{\left(\frac{d}{\cos\theta}\right)^2}+\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q_1q_4}{\left(\frac{d}{\cos\theta}\right)^2}\cos\theta=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q_1q_2}{(d+D)^2}$$

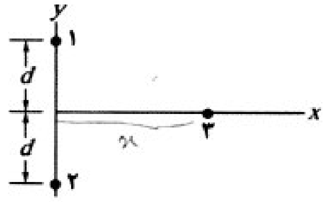
$$(\cos^3\theta)\left[\frac{q_3}{d_2}+\frac{q_4}{d^2}\right]=\frac{q_2}{(d+D)^2}\Rightarrow 2\frac{q_3}{d^2}\cos^3\theta=\frac{q_2}{(d+D)^2}$$

$$\frac{2(1/6\times10^{-19})}{4\times10^{-4}}(\cos30)^3=\frac{8\times10^{-19}}{(0/02+D)^2}$$

$$\Rightarrow D=1/92\times10^{-2}\ \text{m}$$

(ب) زمانی که q_3 و q_4 به محور x نزدیک می‌شود، فاصله‌ی آنها تا بار q_1 کمتر شده، بنابراین نیروی بین آنها افزایش می‌یابد. بنابراین بار q_2 باید نزدیکتر باشد تا این افزایش نیرو را خنثی کند. بنابراین D کم می‌شود.

●●●۲۱- در شکل ۱۷-۳۱، ذره‌های ۱ و ۲ با بار $q_1=q_2=+3/20\times10^{-19}\ \text{C}$ روی محور y به فاصلهٔ $d=17/0\ \text{cm}$ از مبدأ واقع‌اند. ذرهٔ ۳ با بار $q_3=+6/40\times10^{-19}\ \text{C}$ بتدریج از $x=0$ تا $x=+5/0\ \text{cm}$ حرکت می‌کند. به ازای چه مقدارهایی از x بزرگی نیروی الکتروستاتیکی وارد بر ذرهٔ سوم از طرف دو ذرهٔ دیگر (الف) کمینه و (ب) بیشینه است؟ این بزرگیهای (پ) کمینه و (ت) بیشینه چقدرند؟



شکل ۱۷-۳۱ مسئلهٔ ۲۱

حل: (الف) و (ب) نیروی برآیند وارد بر ذره‌ی q_3 در راستای محور x است.

$$F=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q_1q_3}{r^2}\cos\theta+\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q_2q_3}{r^2}\cos\theta$$

$$F=\frac{2}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q_1q_3}{r^2}\cos\theta$$

$$r^2=x^2+d^2\ ,\ \cos\theta=\frac{x}{\sqrt{x^2+d^2}}$$

$$\Rightarrow F=\frac{2}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q_1q_3x}{(x^2+d^2)^{3/2}}$$

از این نیرو نسبت به x مشتق می‌گیریم و نقطه‌ی فرین آن را می‌یابیم.

$$\frac{dF}{dx}=0\Rightarrow(x^2+d^2)^{1/2}[(x^2+d^2)-3x^2]=0$$

$$\Rightarrow x=\frac{d}{\sqrt{2}}=12\text{cm}$$

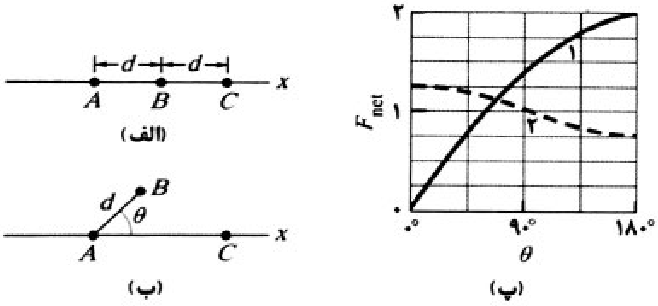
اگر مشتق دوم تابع را در $x=d/\sqrt{2}$ بدست آوریم، مقدار آن $-16\sqrt{d^2}/9\sqrt{3}d^5$ می‌شود. چون این مقدار کوچکتر است صفر است. بنابراین نقطه‌ی فرین یک بیشینه است.

به ازای $x=0$ نیروی برآیند صفر است که کمینه نیرو می‌باشد.

(پ) صفر

(ت)
$$F=2(9\times10^{-19})\frac{(3/2\times10^{19})(6/4\times10^{-19})}{[(0/12)^2+(0/17)^2]^{3/2}}(0/12)$$
$$=4/9\times10^{-26}\ \text{N}$$

●●●۲۲- شکل ۱۷-۳۲ الف آرایشی از سه ذره باردار به فاصلهٔ d را نشان می‌دهد. ذره‌های A و C روی محور x ثابت شده‌اند، ولی ذرهٔ B می‌تواند روی دایره‌ای به مرکز ذرهٔ A حرکت کند. در حین این حرکت، خط شعاعی میان A و B با جهت مثبت محور x زاویهٔ θ می‌سازد (شکل ۱۷-۳۲ ب). منحنیها در شکل ۱۷-۳۲ پ، برای دو وضعیت، بزرگی F_{net} نیروی الکتروستاتیکی خالص وارد بر ذرهٔ A از طرف ذره های دیگر را نشان می‌دهند. این نیروی خالص برحسب تابعی از زاویهٔ θ و برحسب مضربی از مقدار پایهٔ F_0 نشان داده شده است. مثلاً روی منحنی ۱، در $\theta=180°$، در می‌یابیم که $F_{net}=2F_0$ است. (الف) برای وضعیت مربوط به منحنی ۱، نسبت بار ذرهٔ C به بار ذرهٔ B (همراه با علامت) چقدر است؟ (ب) برای وضعیت مربوط به منحنی ۲، این نسبت چقدر است؟



شکل ۱۷-۳۲ مسئلهٔ ۲۲

حل: (الف) دو حالت $\theta=0$ و $\theta=180°$ را در نظر می‌گیریم در این دو حالت نیروهای وارد بر A کمینه و بیشینه است. در $\theta=0$ ، $F_A=0$ داریم:

$$\frac{kq_Bq_A}{d^2}=\frac{kq_Cq_A}{4d^2}\Rightarrow\left|\frac{q_C}{q_B}\right|=4\quad,\quad\frac{q_C}{q_B}=-4$$

(ب) با توجه به نمودار می‌توان مشاهده کرد

$$\theta=0\Rightarrow F_1=\frac{kq_Cq_A}{4d^2}+\frac{kq_Bq_A}{d^2}=1/25F_0$$

$$\theta=0\Rightarrow F_2=\frac{kq_Cq_A}{4d^2}-\frac{kq_Bq_A}{d^2}=0/75F_0$$

اگر دو رابطه را بازنویسی و بر هم تقسیم کنیم خواهیم داشت:

$$\frac{q_C+4q_B}{q_C-4q_B}=\frac{1/25}{0/75}\Rightarrow\frac{q_C}{q_B}=16$$

●●●۲۳- یک پوستهٔ کروی نارسانا، با شعاع دُرونی $4.0\,cm$ و شعاع بیرونی $6.0\,cm$ دارای باری است که به طور یکنواخت در حجم بین سطحهای درونی و بیرونی آن توزیع شده است. *چگالی بار حجمی* ρ یعنی، بار در واحد حجم دارای یکای کولن بر متر مکعب است. برای این پوسته $\rho=b/r$، که در آن r فاصله برحسب متر از مرکز پوسته و $b=3.0\,\mu C/m^2$ است. بار خالص موجود در پوسته چقدر است؟

حل:

$$q=\int dq=\int \rho\, dV=\int_{r_1}^{r_2}\frac{b}{r}4\pi r^2\, dr=2\pi b(r_2^2-r_1^2)$$

که به ازای مقادیر داده شده خواهیم داشت $q=3.8\times10^{-8}\,C$.

بخش ۱۷-۵ بار کوانتیده است

●۲۴- اگر فاصلهٔ یونهای سدیم یک بار یونیده (Na^+، با بار $+e$) و کلر یک بار یونیده (Cl^-، با بار $-e$) در بلور نمک خوراکی $2.82\times10^{-10}\,m$ باشد، بزرگی نیروی الکتروستاتیکی میان این دو یون چقدر است؟

حل: $$F=k\frac{e^2}{r^2}=(9\times10^9)\frac{(1.6\times10^{-19})^2}{(2.82\times10^{-10})^2}=2.9\times10^{-9}\,N$$

●۲۵- بزرگی نیروی الکتروستاتیکی میان دو نوع یون مشابه که به فاصلهٔ $5.0\times10^{-10}\,m$ از هم قرار گرفته‌اند برابر با $3.7\times10^{-9}\,N$ است. (الف) بار هر یون چقدر است؟ (ب) هر یون چند الکترون "از دست داده" است؟ (بنابراین، بار این یون نامتوازن است). SSM

حل: (الف) اگر q بار روی هر یون و r فاصله آنها باشد داریم

$$F=k\frac{q^2}{r^2}\Rightarrow q=r\sqrt{\frac{F}{k}}=(5\times10^{-10})\sqrt{\frac{3.7\times10^{-9}}{9\times10^9}}$$

$q=3.2\times10^{-19}\,C$

(ب) اگر N تعداد الکترون‌هایی باشد که هر یون فاقد آن است داریم $q=Ne$ و در نتیجه می‌توان نوشت

$$N=\frac{q}{e}=\frac{3.2\times10^{-19}}{1.6\times10^{-19}}=2$$

●۲۶- عبور جریان $0.300\,A$ از قفسهٔ سینه می‌تواند باعث لرزش عضلهٔ قلب، بر هم زدن ضرب آهنگ عادی ضربان قلب و اختلال در جریان خون (و در نتیجه اکسیژن) به مغز شود. اگر این جریان به مدت $2.00\,min$ تداوم یابد، چند الکترون رسانشی از قفسهٔ سینه عبور خواهد کرد؟ [redacted]

حل: مقدار بار پس از دو دقیقه برابر است با

$$q=(0.300)(120)=36.0\,C$$

در نتیجه داریم

$$q=Ne\Rightarrow 36=N(1.6\times10^{-19})\Rightarrow N=2.25\times10^{20}$$

●۲۷- چند الکترون باید از یک سکه برداشته شود تا بار باقیماندهٔ آن $+1.0\times10^{-7}\,C$ شود؟ ILW

حل:

$$q=Ne\Rightarrow N=\frac{q}{e}=\frac{1.0\times10^{-7}}{1.6\times10^{-19}}=6.25\times10^{11}$$

●۲۸- فاصلهٔ مرکز به مرکز دو قطره آب کروی کوچک با بار یکسان $-1.00\times10^{-16}\,C$، برابر با $1.00\,cm$ است، (الف) بزرگی نیروی الکتروستاتیکی که بین آنها عمل می‌کند چقدر است؟ (ب) چند الکترون اضافی در هر قطره موجب نامتوازنی بار آنها شده است؟

حل: (الف)

$$F=k\frac{q^2}{r^2}=9\times10^9\frac{(1.00\times10^{-16})^2}{(1.00\times10^{-2})^2}=9\times10^{-19}\,N$$

(ب) اگر N تعداد الکترون‌های اضافی باشد، داریم

$$N=\frac{q}{e}=\frac{1.00\times10^{-16}}{1.6\times10^{-19}}=625$$

●●۲۹- جو زمین به طور دائم با *پروتونهای پرتو کیهانی* که برآمده‌از جایی در فضا هستند بمباران می‌شود. اگر همهٔ پروتونها از جو بگذرند، به هر متر مربع از سطح زمین به طور متوسط ۱۵۰۰ پروتون در ثانیه برخورد می‌کند. جریان الکتریکی که با کل سطح زمین برخورد می‌کند چقدر است؟ ILW

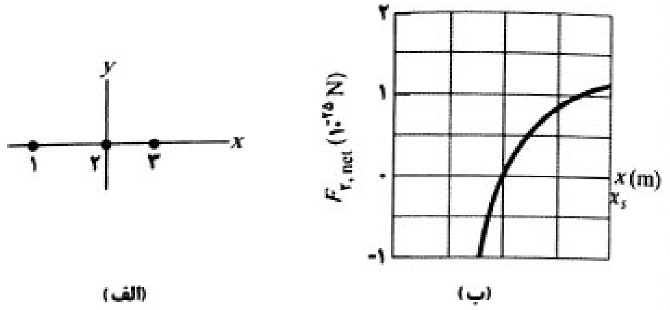
حل: جریانی که در هر ثانیه بر یک متر مربع از زمین وارد می‌شود برابر است با

$$\frac{i}{A}=(1500)(1.6\times10^{-19})=2.4\times10^{-16}\,C/s\cdot m^2$$

بنابراین جریانی که از سطح زمین ($4\pi R_E^2$) می‌گذرد برابر است با

$$i=(2.4\times10^{-16}\,C/s\cdot m^2)4\pi(6.37\times10^6\,m)^2=0.123\,A$$

●●۳۰- شکل ۱۷-۳۳ الف ذره‌های باردار ۱ و ۲ را که در مکانی روی محور x ثابت شده‌اند نشان می‌دهد. ذرهٔ ۱ دارای باری به‌بزرگی $|q_1|=8.00\,e$ است. ذرهٔ ۳ با بار $q_3=+8.00\,e$ در ابتدا روی محور x در نزدیکی ذرهٔ ۲ واقع است. حال ذرهٔ ۳ را بتدریج در سوی مثبت محور x حرکت می‌دهیم. در نتیجه، بزرگی نیروی الکتروستاتیکی خالص $\vec{F}_{2,net}$ وارد بر ذرهٔ ۲ از طرف ذره های ۱ و ۳ تغییر می‌کند. شکل ۱۷-۳۳ ب مؤلفهٔ x نیروی خالص را برحسب تابعی از مکان x ذرهٔ ۳ نشان می‌دهد. مقیاس محور x با $x_s=0.80\,m$ مشخص شده است. نمودار وقتی $x\to\infty$ دارای یک مجانب $F_{2,net}=1.5\times10^{-25}\,N$ است. بزرگی بار ذرهٔ ۲ برحسب مضربی از e، و علامت آن چیست؟



شکل ۱۷-۳۳ مسئلهٔ ۳۰

حل: با توجه به نمودار دیده می‌شود که منحنی در $r = 0/4\,m$، صفر را قطع می‌کند.

$$F = \frac{k q_1 q_2}{r^2} \Rightarrow q_2 = \frac{F}{k q_1} r^2$$

$$q_2 = \frac{(1/5\times10^{-25})(0/4)^2}{(8/99\times10^9)(8/00\times1/6\times10^{-19})} = 2/08\times10^{-18}\,C$$

$$= 13e$$

●●۳۱- تعداد کولن‌های بار مثبت در $250\,cm^3$ آب (خنثی) را محاسبه کنید. (*راهنمایی:* اتم هیدروژن دارای یک پروتون، و اتم اکسیژن دارای ۸ پروتون است).

حل: جرم آب برابر است با $m = \rho V = (1)(250) = 250\,g$ و تعداد مولکول‌های آن برابر است با

$$N = N_0 \frac{m}{M} = (6/02\times10^{23})\left(\frac{250}{18}\right) = 8/36\times10^{24}$$

هر مولکول آب دارای ۱۰ پروتون است که بار هر کدام برابر e است لذا بار کل برابر است با

$$Q = N(10e) = (8/36\times10^{24})(10)(1/6\times10^{-19})$$
$$= 1/34\times10^{7}\,C$$

●●۳۲- در شکل ۱۷-۲۸، ذره‌های ۱ و ۲ در مکان خود روی محور x به فاصلهٔ $L = 8/00\,cm$ ثابت شده‌اند. بارهای آنها $q_1 = +e$ و $q_2 = -27e$ است. ذرهٔ ۳ با بار $q_3 = +4e$ روی خط میان ذره‌های ۱ و ۲ قرار داده می‌شود تا آنها نیروی الکتروستاتیکی خالص $\vec{F}_{3,net}$ را بر آن وارد کنند. (الف) ذرهٔ ۳ باید در چه مختصه‌ای قرار گیرد. تا بزرگی این نیرو کمینه شود؟ (ب) بزرگی کمینه چقدر است؟

حل:

$$F_{3,net} = \frac{k q_1 q_3}{x^2} + \frac{k q_2 q_3}{(L-x)^2} = \frac{4ke^2}{x^2} + \frac{108ke^2}{(L-x)^2}$$
$$= 4ke^2\left[\frac{1}{x^2} + \frac{27}{(L-x)^2}\right]$$

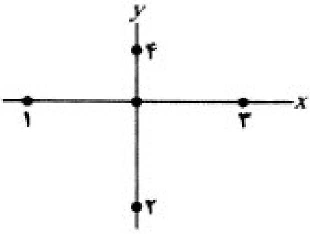
$$\frac{dF_{3,net}}{dx} = 0 \Rightarrow 4ke^2\left[\frac{-2}{x^3} - \frac{(27)(2)}{(L-x)^3}\right] = 0 \Rightarrow$$

$$x = \frac{L}{4} \quad\Rightarrow\quad x = 2cm$$

(ب) این مقدار x را در رابطه $F_{3,net}$ قرار می‌دهیم، خواهیم داشت

$$F_{3,net} = 9/21\times10^{-24}\,N$$

●●۳۳- در شکل ۱۷-۳۴، ذره‌های ۲ و ۴ با بار $-e$ در مکان خود واقع بر محور y، در $y_2 = -10/0cm$ و $y_4 = 5/00cm$ ثابت شده‌اند. ذره‌های ۱ و ۳ با بار $-e$ می‌توانند در امتداد محور x حرکت کنند. ذرهٔ ۵ با بار $+e$ در مبدأ ثابت شده است. در ابتدا ذرهٔ ۱ در $x_1 = -10/0\,cm$ و ذرهٔ ۳ در $x_3 = 10/0\,cm$ قرار دارند. (الف) ذرهٔ ۱ را باید تا چه مقدار x حرکت داد تا جهت نیروی الکتریکی خالص وارد بر ذرهٔ ۵ به اندازهٔ $30°$ پادساعتگرد بچرخد؟ (ب) وقتی ذرهٔ ۱ در مکان جدید خود ثابت شود، ذرهٔ ۳ را باید تا چه مقدار x حرکت داد تا $\vec{F}_{net}$ بچرخد و به جهت اولیهٔ خود باز گردد؟ GO



شکل ۱۷-۳۴ مسئلهٔ ۳۳

حل: (الف) با توجه به تقارن مسئله نیروی وارد بر q_5 در آغاز در راستای محور y است و داریم

$$F_{net} = \frac{ke^2}{d^2} - \frac{ke^2}{4d^2} = \frac{3ke^2}{4d^2}$$

حال اگر بار q_1 را به اندازه x جابه‌جا کنیم، داریم:

$$F_x = -\frac{ke^2}{(2d-x)^2} + \frac{ke^2}{(2d)^2} = \frac{ke^2[-4d^2 + (2d-x)^2]}{4d^2(2d-x)^2}$$

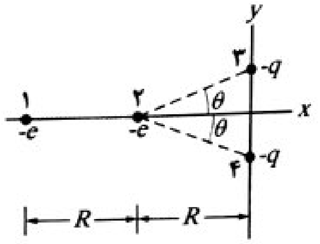
$$F_y = \frac{3ke^2}{4d^2}$$

$$\tan(120°) = \frac{F_y}{F_x} \Rightarrow -1/73 = \frac{3(2d-x)^2}{[-4d^2 + (2d-x)^2]}$$

با ساده کردن رابطهٔ فوق و قرار دادن $d = 5cm$ و حل معادله برای x خواهیم داشت $x = 3/95cm$

(ب) برای اینکه دوباره شرایط تقارن حاصل شود باید بار ۳ را نیز به همین اندازه بار ۵ نزدیک کنیم تا دوباره مؤلفه‌های x نیروها یکدیگر را خنثی کنند و برآیند در راستای y قرار گیرد.

●●●۳۴- شکل ۱۷-۳۵، الکترونهای ۱ و ۲ را روی محور x و یونهای باردار ۳ و ۴ را با بار یکسان $-q$ و درزاویه‌های یکسان θ نشان می‌دهد. الکترون ۲ می‌تواند آزادانه حرکت کند؛ سه ذرهٔ دیگر در مکان خود به فاصله‌های افقی R از الکترون ۲ ثابت شده‌اند و می‌خواهند الکترون ۲ را در مکان خود ثابت نگه دارند. برای مقدارهای از لحاظ فیزیکی ممکن $q \le 5e$، (الف) کوچکترین، (ب) دومین کوچکترین، و (پ) سومین کوچکترین مقدارهای θ برای آنکه الکترون ۲ در مکان خود ثابت بماند چقدر است؟



شکل ۱۷-۳۵ مسئلهٔ ۳۴

حل: بـرای اینکـه الکتـرون ۲ ثابـت بـاقی بمانـد، بایـد برآینـد نیروهای وارد بر آن صفر باشد

$$\cos\theta = \frac{R}{r} \Rightarrow r = \frac{R}{\cos\theta}$$

$$F_{23} = F_{24} \Rightarrow \frac{kq_2q_3}{r^2} = \frac{kq_2q_4\cos^2\theta}{R^2}$$

$$F_{12} = 2F_{23}\cos\theta \Rightarrow \frac{ke^2}{R^2} = 2\frac{kqe\cos^2\theta}{R^2}\cos\theta$$

$$q = \frac{e}{2\cos^3\theta}$$

اما با در نظر گرفتن شرط $q \le 5e$ داریم

$$\frac{e}{2\cos^3\theta} \le 5e \Rightarrow \cos\theta \ge \frac{1}{(10)^{1/3}}$$

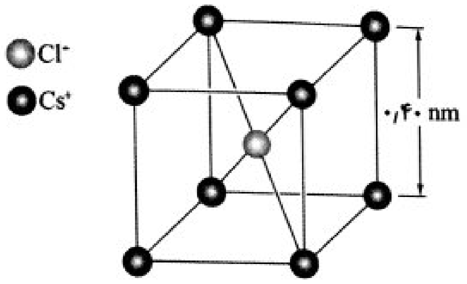
در نتیجه باید $\theta \le 62/34°$ باشد. چـون مـسئله مقـادیر ممکـن فیزیکی را خواسـته و اینکـه $q = Ne$ و $N = 1,...,5$ اسـت. از رابطـه‌ایـی کـه بـرای q بـه دسـت آوردیـم، خـواهیم داشـت $\cos\theta = (1/2N)^{1/3}$.

(الف) بـرای کمتـرین مقـدار زاویـه بـه ازای $N = 1$ برابـر بـا $37/5°$ می‌شود.

(ب) برای دومین کمترین مقـدار زاویـه بـه ازای $N = 2$ برابـر $50/95°$ می‌شود.

(پ) سومین کمترین مقدار زوایه به ازای $N = 3$ برابر $56/6°$ می‌شود.

●●●۳۵- در بلورهای نمک سزیم کلراید، یونهای سزیم Cs^+، هشت گوشهٔ یک مکعب را می‌سازند و یون کلر Cl^- در مرکـز آن مکعـب قـرار دارد (شـکل ۱۷-۳۶). طـول ضـلع مکعـب $0/40\,nm$ است. یونهای Cs^+ هـر یـک کمبـود یـک الکتـرون دارند (و بنابراین، بار هـر کـدام $e+$ اسـت)، و یـون Cl^- یـک الکترون اضافی دارد (و بنابراین، بار آن $e-$ است). (الف) بزرگی نیروی الکتروستاتیکی خالص وارد بر یون Cl^- ناشی از ۸ یـون Cs^+ که در گوشه‌های مکعب قرار دارنـد، چقـدر اسـت؟ (ب) اگر یکی از یونهای Cs^+ در جای خود نباشد، گفته می‌شود کـه بلور دارای *نقص (ناراستی)* است؛ بزرگی نیروی الکتروستاتیکی خالص وارد بر Cl^- از طرف هفت یون Cs^+ بـه جـای مانـده چقدر است؟ SSM

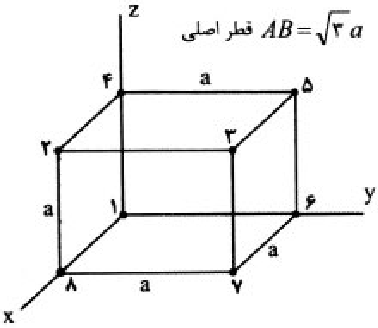


شکل ۱۷-۳۶ مسئلهٔ ۳۵

حل: (الف) هشت نیروی وارد بر یون Cl^{-1} دوبه‌دو یکدیگر را خنثی می‌کنند، در نتیجه نیروی کـل وارد بـر یـون Cl^{-1} صـفر می‌باشد.

$a' = \sqrt{2}a$ قطر یک وجه

$AB = \sqrt{3}a$ قطر اصلی



(ب) چهار نیروی وارد بر یون Cl^{-1} از طرف بارهـای ۸، ۵، ۳ و ۴ دوبه‌دو یکدیگر را خنثی مـی‌کننـد. نیـروی وارد از طـرف بارهای ۲ و ۶ نیز یکدیگر را خنثی می‌کنند و تنها نیروی وارد از طرف بار ۷ باقی می‌ماند.

$$F = F_7 = \frac{ke^2}{\left(\frac{\sqrt{3}}{2}a\right)^2} = \frac{(9\times10^9)(1/6\times10^{-19})^2}{\left(\frac{3}{4}\right)(0/4\times10^{-9})^2}$$
$$= 1/92\times10^{-9}\ N$$

بخش ۱۷-۶ بار الکتریکی پایسته است

●۳۶- الکترونها و پـوزیترونهـا توسـط تبـدیل‌هـای هـسته‌ای پروتونها و نوترونها که به نام *واپاشی بتا* شناخته شـده‌انـد، ایجاد می‌شوند. (الف) اگر یک پروتون به یـک نـوترون تبـدیل شود، آیا یک الکترون یا یک پوزیترون ایجاد می‌شود؟ (ب) اگر یک نوترون به یک پروتون تبدیل شود، آیا یک الکترون یا یـک پوزیترون ایجاد می‌شود؟

حل: (الف) بار اولیه مثبت است و با توجه با پایستگی بار بایـد یک پرزیترون که دارای بار مثبت است گسیل شود.

(ب) بار اولیه صفر است لذا باید یک الکترون گـسیل شـود تـا مجموع بار آن و پروتون صفر شود.

●۳۷- X را به کمک پیوست ج، در واکنش‌های هسته‌ای زیر شناسایی کنید:

(الف) $^1H + ^9Be \rightarrow X + n$ ؛

(ب) $^{12}C + ^1H \rightarrow X$ ؛

(پ) $^{15}N + ^{1}H \to ^{4}He + X$ SSM

حل: مجموع عدد جرمی و اتمی در دو طرف واکنش‌ها باید مساوی باشند.

(الف) $^{1}_{1}H + ^{9}_{4}B \to ^{9}_{5}X + ^{1}_{0}n$

بنابراین عنصر موردنظر ^{9}Be است.

(ب) $^{12}_{6}C + ^{1}_{1}H \to ^{13}_{7}X$

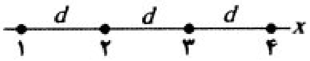
بنابراین عنصر موردنظر $^{13}_{7}N$ است.

(پ) $^{15}_{7}N + ^{1}_{1}H \to ^{4}_{2}He + ^{12}_{6}X$

بنابراین عنصر موردنظر $^{12}_{6}C$ است.

مسئله‌های اضافی

۳۸- در شکل ۱۷-۳۷، چهار ذره روی محور x ثابت شده‌اند و به فاصلهٔ $d = 2.00\ cm$ از یکدیگر قرار دارند. بارها عبارت‌اند از: $q_1 = +2e$ ، $q_2 = -e$ ، $q_3 = +e$ ، و $q_4 = +4e$، با $e = 1.60 \times 10^{-19}\ C$. برحسب نمادگذاری بردار یکه، نیروی الکتروستاتیک خالص وارد بر (الف) ذرهٔ ۱ و (ب) ذرهٔ ۲، از طرف ذره‌های دیگر چقدر است؟



شکل ۱۷-۳۷ مسئلهٔ ۳۸

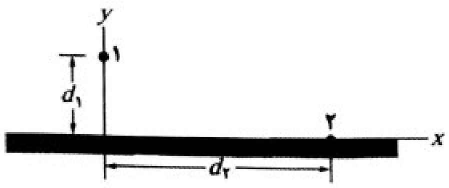
حل: (الف) با توجه به جهت مثبت محور x داریم.

$$F_1 = F_{12} - F_{13} - F_{14}$$
$$F_1 = \frac{2ke^2}{d^2} - \frac{2ke^2}{4d^2} - \frac{8ke^2}{9d^2} = \frac{11ke^2}{18d^2}$$
$$= \frac{(11)(9\times10^{9})(1.6\times10^{-19})}{(0.02)^2} = 3.52\times10^{-25}\ N$$

(ب) در این حالت داریم

$$F_2 = F_{23} + F_{24} - F_{21}$$
$$F_2 = \frac{4ke^2}{4d^2} + \frac{ke^2}{d^2} - \frac{2ke^2}{d^2} = 0$$

۳۹- درشکل ۱۷-۳۸،ذرهٔ ۱ با بار $+4e$ در فاصلهٔ $d_1 = 2.00\ mm$ بالای کف، و ذرهٔ ۲ با بار $+6e$ روی آن کف به فاصلهٔ افقی $d_2 = 6.00\ mm$ از ذرهٔ ۱ قرار دارد. مؤلفهٔ x نیروی الکتروستاتیکی وارد بر ذرهٔ ۲ از طرف ذرهٔ ۱ چقدر است؟ SSM



شکل ۱۷-۳۸ مسئلهٔ ۳۹

حل: چنانچه زاویه بین نیرو و محور x را θ درنظر بگیریم، در نتیجه مؤلفهٔ x نیروی F_{12} برابر است با:

$$F_x = F_{12}\cos\theta = \frac{kq_1q_2}{d_1^2 + d_2^2} \times \frac{L_2}{\sqrt{d_1^2 + d_2^2}}$$
$$= 1.31\times10^{-22}\ N$$

۴۰- ذره‌ای با بار Q در مبداء دستگاه مختصات ثابت شده است. در $t = 0$ ، ذره‌ای ($m = 0.800\ g$ و $q = 4.00\ \mu C$) که در $x = 20.0\ cm$ روی محور x واقع است، با تندی $50.0\ m/s$ در جهت مثبت y حرکت می‌کند. به ازای چه مقداری از Q ذرهٔ متحرک، حرکت دایره‌ای انجام می‌دهد؟ (از نیروی گرانشی وارد بر ذره چشمپوشی کنید.)

حل: برای اینکه حرکت دورانی برقرار باشد، خواهیم داشت:

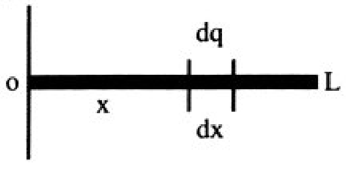
$$\frac{kQq}{r^2} = m\frac{v^2}{r} \Rightarrow Q = \frac{mv^2R}{kq}$$
$$Q = \frac{(0.8\times10^{-3})(50)^2(0.2)}{(9\times10^{9})(4\times10^{-6})} = 1.11\times10^{-5}\ C$$

۴۱- میلهٔ نارسانای بارداری به طول $2.00\ m$ و سطح مقطع $4.00\ cm^2$ در طرف مثبت محور x به گونه‌ای قرار دارد که یک سر آن در مبدأ است. *چگالی بار حجمی* ρ، بار در واحد حجم بر حسب کولن بر متر مکعب است. اگر ρ (الف) یکنواخت باشد، با مقدار $-4.00\ \mu C/m^3$ و (ب) نایکنواخت باشد، با مقداری که با رابطهٔ $\rho = bx^2$ داده می‌شود که در آن $b = -2.00\ \mu C/m^5$ است، چه مقدار الکترون اضافی روی میله قرار دارد؟

حل: (الف) ρ ثابت است لذا خواهیم داشت:

L طول و A سطح مقطع میله است

$$q = \int \rho\, dv = \rho v = \rho LA$$
$$= -(4\times10^{-6})(2)(4\times10^{-4}) = -32\times10^{-10}\ C$$
$$N = \frac{q}{e} = \frac{-32\times10^{-10}}{-1.6\times10^{-19}} = 2\times10^{10}$$



(ب) $\rho = -2\times10^{-6}\,x^2$, $dv = A\,dx$

$$q = \int \rho\, dv = \int \rho A\, dx$$
$$= \int_0^2 (-2\times10^{-6}\,x^2)(4\times10^{-4})\, dx$$
$$= (-8\times10^{-10})\left(\frac{1}{3}x^3\right)\Bigg|_0^2 = -21.33\times10^{-10}\ C$$
$$N = \frac{q}{c} = \frac{-21.33\times10^{-10}}{-1.6\times10^{-19}} = 1.33\times10^{10}$$

۴۲- بار $6.0\ \mu C$ به دو بخش تقسیم شده و سپس به فاصلهٔ $3.0\ mm$ از یکدیگر قرار داده شده‌اند. بیشینهٔ مقدار ممکن نیروی الکتروستاتیکی میان این دو بخش چقدر است؟

حل: بار Q را به دو قسمت تقسیم می‌کنیم، q و $Q-q$. در نتیجه نیروی بین این دو برابر است با:

$$F=\frac{k(Q-q)q}{r^۲}=\frac{k}{r^۲}(Qq-q^۲)$$

با تغییر q نیرو تغییر می‌کند، شرط بیشینه را برای F می‌نویسیم:

$$\frac{dF}{dq}=۰ \qquad \frac{k}{r^۲}(Q-۲q)=۰ \quad \Rightarrow \quad q=\frac{Q}{۲}$$

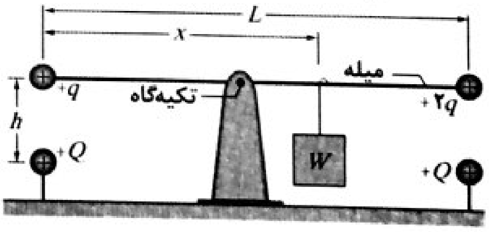
$$F_{max}\Big|_{q=\frac{Q}{۲}}=\frac{k(\frac{Q}{۲})(\frac{Q}{۲})}{r^۲}=\frac{(۹\times۱۰^۹)(۳\times۱۰^{-۶})^۲}{(۹\times۱۰^{-۶})^۲}=۹۰۰۰\,N$$

۴۳- چند مگاکولن بار مثبت در ۱/۰۰ مول گاز هیدروژن- مولکولی $(H_۲)$ وجود دارد؟

حل: در هر مولکول گاز $H_۲$ دو پروتون وجود دارد، هر یک با بار $+e$ یک مول گاز داریم لذا تعداد اتم‌ها برابر با عدد آواگادرو است.

$$q=N_AZe=(۶/۰۲\times۱۰^{۲۳})(۲)(۱/۶\times۱۰^{-۱۹})$$
$$=۱/۹۲\times۱۰^۵\,C=۰/۱۹\,MC$$

۴۴- شکل ۱۷-۳۹ میله‌ای نارسانا، بدون جرم و بلند به طول L را نشان می‌دهد که در مرکزش لولا شده و با قطعه‌ای به وزن W که در فاصلهٔ x از انتهای چپ قرار دارد موازنه کرده است. به دو انتهای چپ و راست میله، کره‌های رسانای کوچکی به ترتیب با بارهای مثبت q و $۲q$ متصل است. به فاصلهٔ h مستقیماً زیر هر یک از این کره‌ها، کره‌ای با بار مثبت Q قرار دارد. (الف) هنگامی که میله افقی و موازنه کرده است، فاصلهٔ x چقدر است؟ (ب) h چه مقداری باید داشته باشد تا وقتی میله افقی و در توازن است هیچ نیروی قائمی بر تکیه‌گاه وارد نکند؟



شکل ۱۷-۳۹ مسئلهٔ ۴۴

حل: (الف) شرط تعادل دورانی حول تکیه را می‌نویسیم

$$\sum\tau=۰ \quad\Rightarrow\quad -F_۱\frac{L}{۲}-W(x-\frac{L}{۲})+F_۲\frac{L}{۲}=۰$$

$$-\frac{kQq}{h^۲}\left(\frac{L}{۲}\right)-W\left(x-\frac{L}{۲}\right)+\frac{۲kQq}{h^۲}\left(\frac{L}{۲}\right)=۰$$

$$\Rightarrow x=\frac{L}{۲}\left(۱+\frac{kQq}{Wh^۲}\right)$$

(ب) شرط تعادل انتقال را در راستای قائم می‌نویسیم:

$$\sum F=۰ \quad\Rightarrow\quad \frac{kQq}{h^۲}+\frac{۲kQq}{h^۲}-W+F_N=۰$$

از شرط مسئله $F_N=۰$ لذا داریم.

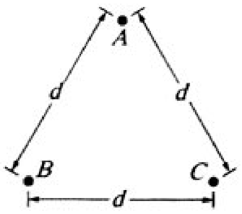
$$h=\sqrt{\frac{۳kQq}{W}}$$

۴۵- هر نوترون شامل یک کوارک «بالا» با بار $+۲e/۳$ و دو کوارک «پایین» هر یک با بار $-e/۳$ است. اگر فرض کنیم فاصلهٔ کوارکهای پایین در داخل نوترون برابر با $۲/۶\times۱۰^{-۱۵}$ m باشد، بزرگی نیروی الکتروستاتیکی میان آنها چقدر است؟

حل:

$$F=\frac{k\left(\frac{e}{۳}\right)^۲}{r^۲}=\frac{(۹\times۱۰^۹)\left(\frac{۱}{۹}\right)(۱/۶\times۱۰^{-۱۹})^۲}{(۲/۶\times۱۰^{-۱۵})^۲}$$
$$=۳/۷۹\,N$$

۴۶- در شکل ۱۷-۴۰، سه کرهٔ رسانای مشابه یک مثلث متساوی الاضلاع به ضلع $d=۲۰/۰$ cm را تشکیل داده‌اند. شعاعهای کره‌ها بسیار کوچکتر از d است و بار کره‌ها عبارت‌اند از: $q_A=-۲/۰۰$ nC، $q_B=-۴/۰۰$ nC، و $q_C=+۸/۰۰$ nC. (الف) بزرگی نیروی الکتروستاتیکی میان کره‌های A و C چقدر است؟ مرحله‌های زیر را در نظر بگیرید: A و B توسط سیم نازکی به‌هم‌متصل شده و سپس اتصال برداشته می‌شود؛ B توسط سیمی به زمین متصل شده و سپس اتصال برداشته می‌شود؛ B و C توسط سیمی به یکدیگر متصل می‌شوند و سپس اتصال قطع می‌شود. اکنون بزرگیهای نیروی الکتروستاتیکی (ب) میان کره‌های A و C، و (پ) میان کره‌های B و C چقدر است؟



شکل ۱۷-۴۰ مسئلهٔ ۴۶

حل: (الف)

$$F_{AC}=k\frac{q_Aq_C}{d^۲}=(۹\times۱۰^۹)\frac{(۲\times۱۰^{-۹})(۸\times۱۰^{-۹})}{(۰/۲)^۲}$$
$$=۳/۶\times۱۰^{-۶}\,N$$

(ب) پس از اتصال A و B بار آنها یکسان می‌شود.

$$q_A=q_B=\frac{-۲-۴}{۲}=-۳\,nC$$

پس از اتصال B به زمین $q_B=۰$ می‌شود. حال B و C به یکدیگر متصل می‌شود، بار هر کدام برابر است با:

$$q_B=q_C=\frac{۰+۸}{۲}=۴\,nC$$

در نتیجه بار نهایی کره‌ها برابر خواهد بود با

$$q'_A=-۳\,nC \qquad q'_B=q'_C=۴\,nC$$

$$F_{AC}=k\frac{q'_Aq'_C}{d^۲}=(۹\times۱۰^۹)\frac{(-۳\times۱۰^{-۹})(۴\times۱۰^{-۹})}{(۰/۲)^۲}$$
$$=-۲/۷\times۱۰^{-۶}\,N$$

جاذبه

(پ)

$$F_{BC}=k\frac{q'_Bq'_C}{d^۲}=(۹\times۱۰^۹)\frac{(۴\times۱۰^{-۹})^۲}{(۰/۲)^۲}$$
$$=۳/۶\times۱۰^{-۶}\,N$$

دافعه

۴۷- بزرگی نیروی الکتروستاتیکی میان دو بار نقطه‌ای ۱/۰۰ C به فاصلهٔ (الف) ۱/۰۰ m و (ب) ۱/۰۰ km چقدر می‌شد اگر چنین بارهای نقطه‌ای وجود داشتند (که ندارند) و اگر چنین پیکربندی وجود می‌داشت؟

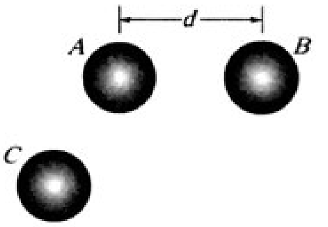
حل: (الف)

$$F=(9\times10^{9})\frac{(1)^2}{(1)^2}=9\times10^{9}\ \text{N}$$

(ب)

$$F=(9\times10^{9})\frac{(1)^2}{(10^3)^2}9000\ \text{N}$$

۴۸- در شکل ۱۷-۴۱، سه کرهٔ رسانای مشابه دارای این بارهای اولیه هستند: کرهٔ A، $4Q$؛ کرهٔ B، $-6Q$؛ و کرهٔ C، ۰. کره‌های A و B در جای خود ثابت‌اند و در فاصلهٔ مرکز به مرکزی بسیار بزرگتر از اندازهٔ کره‌ها قرار دارند. دو آزمایش انجام می‌گیرد. در آزمایش ۱، کرهٔ C به کرهٔ A و سپس (به طور جداگانه) به کرهٔ B تماس داده شده و از هم جدا می‌شوند. در آزمایش ۲، که با همان شرایط اولیه صورت می‌گیرد، مرحله‌ها وارونه می‌شوند: کرهٔ C به کرهٔ B و سپس (به طور جداگانه) به کرهٔ A تماس داده شده و از هم جدا می‌شوند. نسبت نیروی الکتروستاتیکی بین A و B در پایان آزمایش ۲ به مقدار آن در پایان آزمایش ۱ چقدر است؟



شکل ۲۱-۴۱ مسئله‌های ۴۸ و ۶۷

حل: پس از اتمام کره C با کره A داریم

$$q_A=q_C=\frac{Q+\frac{Q}{2}}{2}=\frac{3Q}{4}$$

حال کره C را با کره B تماس می‌دهیم، داریم:

$$q_B=q_C=\frac{\frac{-Q}{4}+\frac{3Q}{4}}{2}=\frac{Q}{4}$$

در نتیجه نیروی بین کره‌های A و B برابر است با

$$F=(9\times10^{9})\frac{\left(\frac{3Q}{4}\right)\left(\frac{Q}{4}\right)}{\left(\frac{1}{2}\right)^2}=4/69\times10^{-19}\ \text{N}$$

۴۹- می‌دانیم که بار منفی الکترون و بار مثبت پروتون برابرند. با این حال، فرض کنید مقدار آنها به اندازهٔ ۰/۰۰۰۱۰٪ با یکدیگر تفاوت داشته باشد. دو سکهٔ مسی که به فاصلهٔ ۱/۰ m از هم قرار دارند، با چه نیرویی یکدیگر را می‌رانند؟ فرض کنید هر سکه شامل 3×10^{22} اتم مس باشد. (*راهنمایی:* اتم مس خنثی دارای ۲۹ پروتون و ۲۹ الکترون است.) چه نتیجه‌ای می‌گیرید؟

حل: با توجه به مسئله فرض می‌شود که بار پروتون به اندازه 10^{-4}٪ بیشتر از بار الکترون است. در هر اتم حس این اختلاف بار برابر است با:

$$q=29\times10^{-6}\,e=4/64\times10^{-24}\ \text{C}$$

بار در هر سکه برابر است با

$$Q=(3\times10^{22})(4/64\times10^{-24})=0/139\text{C}$$

در نتیجه داریم

$$F=k\frac{Q^2}{r^2}=(9\times10^{9})\frac{(0/139)^2}{(1)^2}=1/74\times10^{8}\ \text{N}$$

۵۰- فاصلهٔ دو پروتون باید چقدر باشد تا بزرگی نیروی الکتروستاتیکی وارد بر هر یک از دو پروتون برابر با بزرگی نیروی گرانشی وارد بر یک پروتون در سطح زمین باشد؟ SSM

حل:

$$\text{mg}=k\frac{e^2}{r^2}$$

$$(1/67\times10^{-27})(9/8)=(9\times10^{9})\frac{(1/6\times10^{-19})^2}{\text{r}^2}$$

$$\Rightarrow \text{r}=0/119\ \text{m}$$

۵۱- از بار Q روی یک کرهٔ کوچک، کسر α به کرهٔ دومی در نزدیکی آن منتقل شده است. کره‌ها را می‌توان به صورت ذره در نظر گرفت. (الف) چه مقداری از α بزرگی F نیروی الکتروستاتیکی میان دو کره را بیشینه می‌کند؟ مقدارهای (ب) کمتر و (پ) بیشتر α که به ازای آنها F نصف مقدار بیشینه می‌شود، چقدر است؟

حل: (الف) بار روی یک کره αQ و بار روی کره دیگر را $(1-\alpha)Q$ درنظر می‌گیریم، داریم

$$F=k\frac{\alpha(1-\alpha)Q^2}{d^2}$$

مشتق F را نسبت به α برابر صفر قرار می‌دهیم مقدار $\alpha=\frac{1}{2}$ برای F_{max} به دست می‌آید، یعنی وقتی که بار Q به دو قسمت مساوی تقسیم شود نیروی بین دوبار بیشینه است.

(ب) و (پ)

$$F_{max}=\frac{kQ^2}{4d^2}\qquad F=\frac{1}{2}F_{max}$$

$$\frac{k\alpha(1-\alpha)Q^2}{d^2}=\left(\frac{1}{2}\right)\frac{kQ^2}{4d^2}\Rightarrow\begin{cases}\alpha_1=0/85\\ \alpha_2=0/14\end{cases}$$

۵۲- اگر گربه‌ای در یک روز خشک، چند بار خود را به شلوار کتان شما بمالد، انتقال بار میان موهای گربه و کتان می‌تواند بار اضافی $-2/00\ \mu\text{C}$ را روی شما بر جای گذارد. (الف) چه تعداد الکترون میان شما و گربه منتقل شده است؟

شما بتدریج از طریق کف زمین بی بار می‌شوید، ولی اگر به جای اینکه منتظر بمانید، بی درنگ به سوی یک شیر آب

بروید، ممکن است هنگامی که انگشتان خود را نزدیک شیر آب می‌برید، به طور ناگهانی یک جرقهٔ دردناک ظاهر شود. (ب) در این جرقه، آیا الکترونها از شما به شیر آب حرکت می‌کنند یا برعکس؟ (پ) درست پیش از آنکه جرقه ظاهر شود، آیا شما در شیر آب بار مثبت القا می‌کنید یا بار منفی؟ (ت) اگر به جای شما، گربه پنجه‌اش را به شیر آب برساند، الکترونها در جرقهٔ حاصل به چه طریق حرکت می‌کنند؟ (ث) اگر در یک روز خشک، گربه‌ای را با دست لخت نوازش دهید، باید مواظب باشید انگشتان خود را نزدیک بینی گربه نبرید، وگرنه با جرقه‌ای به آن صدمه می‌زنید. با توجه به اینکه موهای گربه عایق است، توضیح دهید چگونه جرقه می‌تواند رخ دهد؟

حل: (الف) الکترون $n=\frac{q}{e}=\frac{۲/۰۰\times۱۰^{-۶}}{۱/۶\times۱۰^{-۱۹}}=۱/۲۵\times۱۰^{۱۳}$

(ب) بار روی بدن L منفی شده و الکترون اضافه دارد که در اتصال با شیر آب این الکترون‌ها به شیر آب منتقل شده و بدن ما خنثی می‌شود.

(پ) وقتی دست با بار منفی به شیر آب نزدیک می‌شود الکترون‌های روی شیر آب دور می‌شوند و لذا می‌توان گفت بار مثبت القا شده است.

(ت) چون بینی گربه مو ندارد یعنی پوشش عایق ندارد لذا احتمال دارد بین دست شما و بینی گربه جرقه بوجود آید.

۵۳- (الف) چه بارهای مثبت یکسانی باید روی زمین و ماه قرار داده شوند تا جاذبهٔ گرانشی آنها را خنثی کند؟ (ب) چرا برای حل این مسئله نیازی به دانستن فاصلهٔ آنها ندارید؟ (پ) چند کیلوگرم یون هیدروژن (یعنی، پروتون) برای تهیهٔ بار مثبت محاسبه شده در قسمت (الف) مورد نیاز است؟

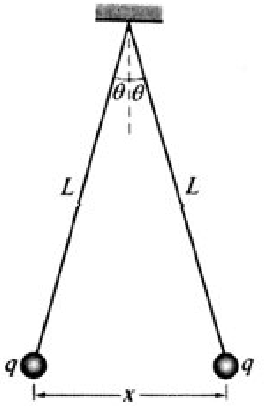
حل: (الف)
$$G\frac{m_e m_m}{r^۲}=k\frac{q^۲}{r^۲}$$
$$(۶/۶۷\times۱۰^{-۱۱})(۵/۹۸\times۱۰^{۲۴})(۷/۳۶\times۱۰^{۲۳})=(۹\times۱۰^{۹})q^۲$$
$$q=۵/۷۱\times۱۰^{۱۳}\ \mathrm{C}$$

(ب) چون فاصله از رابطه حذف می‌شود.

(پ)
$$n=\frac{q}{e}=\frac{۵/۷۱\times۱۰^{۱۳}}{۱/۶\times۱۰^{-۱۹}}=۳/۵۷\times۱۰^{۳۲}$$

تعداد پروتون‌ها، n برابر تعداد اتم‌های هیدروژن است. هر پروتون نیز دارای جرم $۱/۶۷\times۱۰^{-۲۷}\ \mathrm{kg}$ است، لذا داریم:
$$m=(۳/۵۷\times۱۰^{۳۲})(۱/۶\times۱۰^{-۲۷})=۵/۹۶\times۱۰^{۵}\ \mathrm{kg}$$

۵۴- در شکل ۱۷-۴۲، دو گوی رسانای کوچک با جرم یکسان m و بار یکسان q از نخهایی نارسانا به طول L آویزان‌اند. فرض کنید θ به اندازه‌ای کوچک است که می‌توان $\tan\theta$ را با مقدار تقریباً برابر آن، $\sin\theta$، جایگزین کرد. (الف) نشان دهید که
$$x=\left(\frac{q^۲L}{۲\pi\varepsilon_۰ mg}\right)^{۱/۳}$$
فاصلهٔ x گویها به هنگام تعادل را به دست می‌دهد. (ب) اگر $L=۱۲۰\ \mathrm{cm}$، $m=۱۰\ \mathrm{g}$، و $x=۵/۰\ \mathrm{cm}$ باشد، $|q|$ چقدر است؟

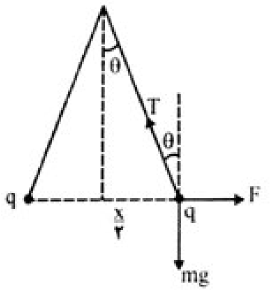


شکل ۱۷-۴۲ مسئله‌های ۵۴ و ۵۵

حل: (الف) از شرط تعادل داریم

$$F=T\sin\theta$$
$$mg=T\cos\theta$$

از تقسیم دو رابطه $\tan\theta=\frac{F}{mg}\quad\Rightarrow\quad F=mg\tan\theta$



با توجه به کوچک بودن θ می‌توان نوشت

$$\tan\theta=\sin\theta=\frac{\frac{x}{۲}}{L}=\frac{x}{۲L}$$

در نتیجه داریم:

$$\frac{kq^۲}{x^۲}=mg\left(\frac{x}{۲L}\right)\quad\Rightarrow\quad x=\left(\frac{۲kq^۲L}{mg}\right)^{۱/۳}$$

(ب)
$$(۹\times۱۰^{۹})q^۲=(۱۰\times۱۰^{-۳})(۹/۸)\frac{(۵\times۱۰^{-۲})^۳}{(۲)(۰/۱۲)}$$
$$\Rightarrow q=۲/۴\times۱۰^{-۸}\ \mathrm{C}$$

۵۵- (الف) اگر یکی از گوی‌های مسئلهٔ ۵۴ تخلیه شود (مثلاً بار q خود را به زمین بدهد) توضیح دهید که برای گویها چه رخ می‌دهد. (ب) فاصلهٔ تعادل جدید x را با استفاده از مقدارهای داده شدهٔ L و m و مقدار محاسبه شدهٔ $|q|$ به دست آورید.

حل: (الف) وقتی یکی از گوی‌ها تخلیه شوند، دوگوی به هم نزدیک شده و تماس می‌یابند و در این حالت بار بین آنها تقسیم می‌شود. بار جدید گوی‌ها برابر است با:

$$q'=\frac{q}{۲}=۱/۲\times۱۰^{-۸}\ \mathrm{C}$$

(ب) فاصله جدید بین دو گوی x' با قرار دادن q' در رابطه x به دست می‌آید، $x' = ۰/۰۳۱\,m$

۵۶- در شکل ۱۷-۲۴، ذره‌های ۱ و ۲ در مکان خود ثابت شده‌اند، ولی ذرهٔ ۳ می‌تواند آزادانه حرکت کند. اگر نیروی الکتروستاتیکی وارد بر ذرهٔ ۳ از طرف ذره‌های ۱ و ۲ برابر صفر و $L_{۲۳} = ۲/۰۰\, L_{۱۲}$ باشد، نسبت $q_۱/q_۲$ چقدر است؟

حل: برای اینکه نیروی خالص بر $q_۳$ صفر باشد داریم:

$$\frac{kq_۱q_۳}{(L_{۱۲}+L_{۲۳})^۲} = \frac{kq_۲q_۳}{(L_{۲۳})^۲} \Rightarrow \frac{q_۱}{۹L_{۱۲}^۲} = \frac{q_۲}{۴L_{۱۲}}$$

$$\Rightarrow \frac{q_۱}{q_۲} = \frac{۹}{۴}$$

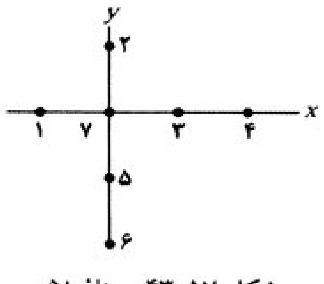
چون نیروها اثر یکدیگر را خنثی می‌کنند بارهای $q_۱$ و $q_۲$ ناهمنام‌اند.

۵۷- بار کل ۷۵/۰ kg الکترون برحسب کولن چقدر است؟

حل:
$$N = \frac{M}{m_e} = \frac{۷۵}{۹/۱\times۱۰^{-۳۱}} = ۸/۲۳\times۱۰^{۳۱} \text{ الکترون}$$

$$q = -Ne = -(۸/۲۳\times۱۰^{۳۱})(۱/۶\times۱۰^{-۱۹}) = -۱/۳۲\times۱۰^{+۱۳}\,C$$

۵۸- چنانکه در شکل ۱۷-۴۳ دیده می‌شود، شش ذرهٔ باردار، ذرهٔ ۷ را که به فاصله‌های شعاعی $d = ۱/۰\,cm$ یا $۲d$ از آنها قرار دارد احاطه کرده‌اند. بارها عبارت‌اند از: $q_۱ = +۲e$ ، $q_۲ = +۴e$ ، $q_۳ = +e$ ، $q_۴ = +۴e$ ، $q_۵ = +۲e$ ، $q_۶ = +۸e$ ، $q_۷ = +۶e$ ، با $e = ۱/۶۰\times۱۰^{-۱۹}\,C$. بزرگی نیروی الکتروستاتیکی خالص وارد بر ذرهٔ ۷ چقدر است؟



شکل ۱۷-۴۳ مسئلهٔ ۵۸

حل:
$$\vec{F}_{۷۱} = \frac{k(۶e)(Fe)}{d^۲}\hat{i} = ۱۲\frac{ke^۲}{d^۲}\hat{i}$$

$$\vec{F}_{۷۳} = \frac{k(۶e)(e)}{d^۲}(-\hat{i}) = -۶\frac{ke^۲}{d^۲}\hat{i}$$

$$\vec{F}_{۷۴} = \frac{k(۶e)(۴e)}{(۲d)^۲}\hat{i} = -۶\frac{ke^۲}{d^۲}\hat{i}$$

$$\vec{F}_{۷۲} = \frac{k(۶e)(۴e)}{d^۲}\hat{j} = -۲۴\frac{ke^۲}{d^۲}\hat{j}$$

$$\vec{F}_{۷۵} = \frac{k(۶e)(۲e)}{d^۲}\hat{j} = +۱۲\frac{ke^۲}{d^۲}\hat{j}$$

$$\vec{F}_{۷۶} = \frac{k(۶e)(۸e)}{(۲d)^۲}\hat{j} = ۱۲\frac{ke^۲}{d^۲}\hat{j}$$

$$\vec{F}_{۷} = (۱۲-۶-۶)\frac{ke^۲}{d^۲}\hat{i} + (-۲۴+۱۲+۲)\frac{ke^۲}{d^۲}\hat{j} = ۰$$

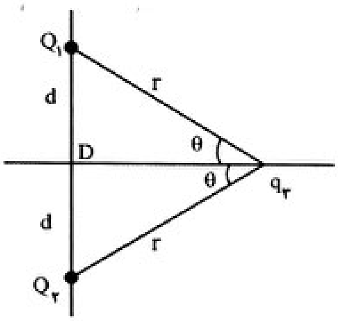
۵۹- سه ذرهٔ باردار تشکیل یک مثلث می‌دهند: ذرهٔ ۱ با بار $Q_۱ = ۸۰/۰\,nC$ در مختصات xy $(۰, ۳/۰۰\,mm)$ ، ذرهٔ ۲ با بار $Q_۲$ در $(۰, -۳/۰۰\,mm)$ ، و ذرهٔ ۳ با بار $q = ۱۸/۰\,nC$ در $(۴/۰۰\,mm, ۰)$. برحسب نمادگذاری بردار یکه، نیروی الکتروستاتیکی وارد بر ذرهٔ ۳ از طرف دو ذرهٔ دیگر چقدر است، در صورتی که $Q_۲$ برابر با (الف) ۸۰/۰nC و (ب) ۸۰/۰nC- باشد؟

حل:
$$\tan\theta = \frac{d}{D} = \frac{۳}{۴} \Rightarrow \theta = ۳۷°$$

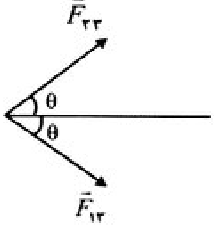
$$r = \sqrt{d^۲ + D^۲} = \sqrt{۹+۱۶} = ۵\,mm$$

$$F_{۱۳} = F_{۲۳} = \frac{kQ_۱q_۳}{r^۲} = \frac{(۹\times۱۰^۹)(۸۰\times۱۰^{-۹})(۱۸\times۱۰^{-۹})}{۲۵\times۱۰^{-۶}}$$

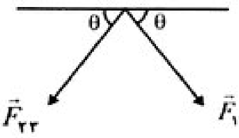
$$= ۰/۵۱۸\,N$$



(الف)
$$F_{۳x} = (۲)(۰/۵۱۸)(\cos ۳۷°) = ۰/۸۲۷\,N$$

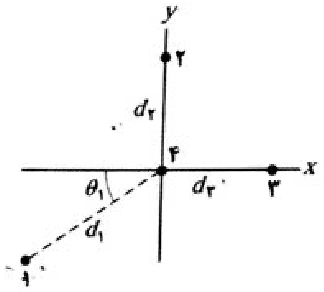


$$F_{۳y} = (۲)(۰/۵۱۸)(\sin ۳۷°) = ۰/۶۲۷$$



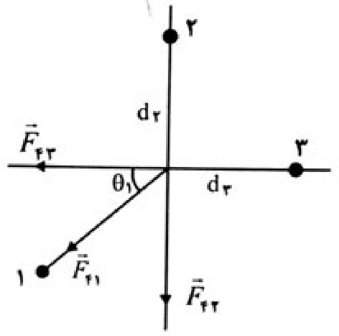
$$\vec{F}_۳ = F_{۳x}\hat{i} - F_{۳y}\hat{j} = (۰/۸۲۷\hat{i} - ۰/۶۲۷\hat{j})\,N$$

۶۰- در شکل ۱۷-۴۴، (الف) بزرگی و (ب) جهت نیروی الکتروستاتیکی خالص وارد بر ذرهٔ ۴ از طرف سه ذرهٔ دیگر چیست؟ هر چهار ذره در صفحهٔ xy ثابت شده‌اند، $q_۱ = -۳/۲۰\times۱۰^{-۱۹}\,C$ ، $q_۲ = +۳/۲۰\times۱۰^{-۱۹}\,C$ ، و $q_۳ = +۶/۴۰\times۱۰^{-۱۹}\,C$ ، $q_۴ = +۳/۲۰\times۱۰^{-۱۹}\,C$ ، $\theta_۱ = ۳۵/۰°$ ، $d_۱ = ۳/۰۰\,cm$ ، و $d_۲ = d_۳ = ۲/۰۰\,cm$.



شکل ۱۷-۴۴ مسئلهٔ ۶۰

حل: با توجه به مقادیر داده شده داریم $F_{21} = 1.02\times10^{-24}$ N، $F_{23} = 2.304\times10^{-24}$ N و $F_{24} = 4.608\times10^{-24}$ N.



$$F_{2x} = -F_{23} - F_{21}\cos\theta_1 = -5.62\times10^{-24}\ \text{N}$$
$$F_{2y} = -F_{24} - F_{21}\sin\theta_1 = -2.89\times10^{-24}\ \text{N}$$
$$\vec{F}_2 = F_{2x}\hat{i} + F_{2y}\hat{j} \Rightarrow \vec{F}_2 = (-5.62\hat{i}\times 2.89\hat{j})\text{N}$$

۶۱- دو بار نقطه‌ای ۳۰ nC و ۴۰- nC روی محور x، به ترتیب در مبدأ و در $x = 72\text{cm}$ ثابت شده‌اند. ذره‌ای با بار ۴۲ μC در $x = 28\text{cm}$ از حالت سکون رها می‌شود. اگر بزرگی شتاب اولیهٔ ذره ۱۰۰ km/s^2 باشد، جرم ذره چقدر است؟

حل: نیروی خالص وارد بر ذرهٔ بار $q_3 = 42\mu c$

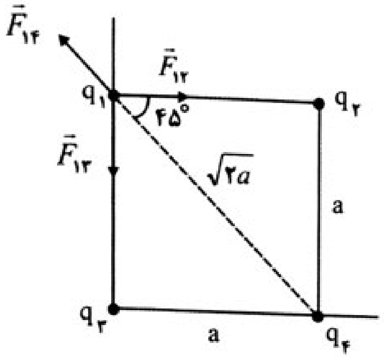
$$F = \frac{kq_3q_1}{d^2} + \frac{kq_3q_2}{(d-x)^2}$$
$$= \frac{(9\times10^9)(42\times10^{-6})(30\times10^{-9})}{(0.72)^2} + \frac{(9\times10^9)(42\times10^{-6})(-40\times10^{-9})}{(0.44)^2}$$
$$= 0.22\text{N}$$

در نتیجه داریم

$$F = ma \Rightarrow m = \frac{F}{a} = \frac{0.22}{100\times10^3} = 2.2\times10^{-6}\ \text{kg}$$

۶۲- در شکل ۱۷-۲۳، چهار ذره یک مربع تشکیل داده‌اند. بارها عبارت‌اند از: $q_1 = +Q$ ، $q_2 = q_3 = q$ ، و $q_4 = -2.00\,Q$. اگر نیروی الکتروستاتیکی خالص وارد بر ذرهٔ ۱ برابر صفر باشد، نسبت q/Q چقدر است؟

حل: برای اینکه بار q_1 در تعادل باشد، شرط آن این است که q و Q ناهمنام باشند.

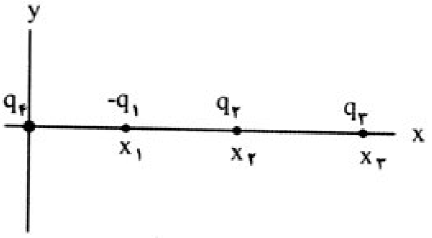


$$F_{12} = F_{13} = F_{14}\cos45°$$
$$\frac{kq_1q_2}{a^2} = \left(\frac{kq_1q_4}{(\sqrt{2}a)^2}\right)\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right) \Rightarrow \frac{q}{Q} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

۶۳- بارهای نقطه‌ای ۶/۰+ μC و ۴/۰- μC روی محور x، به ترتیب در $x = 8.0\,\text{m}$ و $x = 16\ \text{m}$ ثابت شده‌اند. چه باری باید در $x = 24\text{m}$ قرار داده شود تا به هر باری که در مبدأ قرار گیرد هیچ نیروی الکتروستاتیکی وارد نشود؟ GO

حل:

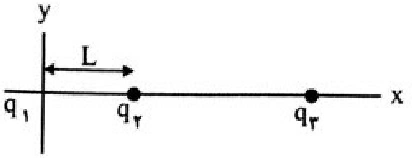
$$x_1 = 8\,\text{cm}$$
$$x_2 = 16\,\text{cm}$$
$$x_3 = 24\,\text{cm}$$



$$F_{41} + F_{42} + F_{43} = 0 \Rightarrow \frac{kq_4q_1}{x_1^2} + \frac{kq_4q_2}{x_2^2} + \frac{kq_4q_3}{x_3^2} = 0$$
$$\frac{6\times10^{-6}}{(8)^2\times10^{-4}} + \frac{-4\times10^{-6}}{(16)^2\times10^{-4}} + \frac{q_3}{(24)^2\times10^{-4}} = 0 \Rightarrow$$
$$q_3 = -45\times10^{-6}\ \text{C}$$

۶۴- در شکل ۱۷-۲۸، ذرهٔ ۱ با بار ۸۰/۰- μC و ذرهٔ ۲ با بار ۴۰/۰+ μC روی محور x به فاصلهٔ $L = 20.0\text{cm}$ ثابت شده‌اند. در صورتی‌که ذرهٔ ۳ (الف) در $x = 40.0\text{cm}$ و (ب) در $x = 80.0$ cm واقع شده باشد، نیروی الکتروستاتیکی خالص وارد بر آن برحسب بردار یکه چیست؟ اگر نیروی الکتروستاتیکی خالص وارد بر ذرهٔ ۳ از طرف ذره‌های ۱ و ۲ برابر با صفر باشد، مختصهٔ (پ) x و (ت) y ذرهٔ ۳ باید چقدر باشد؟

حل:



(الف) $x = 40\,\text{cm}$

$$\vec{F}_3 = \vec{F}_{31} + \vec{F}_{32} = (-F_{31} + F_{32})\hat{i}$$

$$\left[-\frac{(9\times10^9)(20\times10^{-6})(40\times10^{-6})}{(0/4)^2}+\frac{(9\times10^9)(20\times10^{-6})(80\times10^{-6})}{(0/2)^2}\right]\hat{i}$$

$$=90\hat{i}\,N$$

(ب) $x=80\,cm$، با روش مشابه و در نظر گرفتن $r_{31}=0/8\,cm$ و $r_{32}=0/6\,cm$، داریم

$$\vec{F}_3=-2/5\,\hat{i}$$

(پ) $$\vec{F}_{3x}=\left[\frac{kq_3q_2}{(x-l)^2}-\frac{kq_3q_1}{x^2}\right]\hat{i}=0 \Rightarrow \frac{q_2}{(x-l)^2}=\frac{q_1}{x^2}$$

$$\frac{2}{x-1}=\frac{2\sqrt{2}}{x} \Rightarrow x=68\,cm$$

(ت) از نتیجه بالا مشاهده می‌شود که $y=0$ می‌شود.

۶۵- در واپاشی پرتوزای معادلهٔ ۱۷-۱۳، یک هستهٔ ^{238}U به ^{234}Th و یک ^{4}He خارج شده تبدیل می‌شود. (اینها هسته‌اند نه اتم، در نتیجه الکترونها وارد نشده‌اند.) وقتی فاصلهٔ میان ^{234}Th و ^{4}He برابر $9/0\times10^{-15}\,m$ است، بزرگیهای (الف) نیروی الکتروستاتیکی میان آنها و (ب) شتاب ذرهٔ ^{4}He چقدر است؟

حل: (الف) هسته هلیوم دارای ۲ پروتون و هستهٔ توریم دارای ۹۰ پروتون است، لذا داریم:

$$q_1=90e \quad q_2=2e$$

$$F=\frac{kq_1q_2}{r^2}=\frac{(9\times10^9)(90)(2)(1/6\times10^{-19})^2}{(9\times10^{-15})^2}$$

$$=512\,N$$

(ب) جرم هستهٔ هلیوم از ۲ پروتون و ۲ نوترون تشکیل شده، لذا داریم:

$$F=ma \Rightarrow 512=(4)(1/67\times10^{-27})a$$

$$\Rightarrow a=7/66\times10^{28}\,m/s$$

۶۶- دو کرهٔ باردار مثبت کوچک دارای بار کل $5/0\times10^{-5}\,C$ هستند. اگر هنگامی که فاصلهٔ دو کره $2/0\,m$ است، هر کره با نیروی الکتروستاتیکی $1/0\,N$ توسط دیگری دفع شود، بار روی کرهٔ با بار کوچکتر چقدر است؟

حل: $q_1+q_2=5\times10^{-5}\,c$ (۱)

$$F=\frac{kq_1q_2}{r^2}\Rightarrow q_1q_2=\frac{Fr^2}{k}=\frac{(1)(4)}{9\times10^9}=4/44\times10^{-10}\,C^2 \quad (2)$$

دو معادله (۱) و (۲) در دست است و می‌توان به طور همزمان حل کرده و به سادگی $q_1=3/84\times10^{-5}\,C$ و $q_2=1/2\times10^{-5}\,C$ به دست می‌آید.

۶۷- بارهای اولیه روی سه کرهٔ فلزی مشابه شکل ۱۷-۴۱ عبارت‌اند از: کرهٔ A، Q؛ کرهٔ B، $-Q/4$؛ و کرهٔ C، $Q/2$، که در آنها $Q=2/00\times10^{-14}\,C$ است. کره‌های A و B در جای خود ثابت‌اند، و فاصلهٔ مرکز به مرکز آنها $d=1/20\,m$ است، که بسیار بزرگتر از اندازهٔ کره‌هاست. کرهٔ C ابتدا به کرهٔ A و سپس به کرهٔ B تماس داده شده و آنگاه برداشته می‌شود. بزرگی نیروی الکتروستاتیکی میان کره‌های A و B چقدر است؟

حل: پس از تماس کره C با کره A بار هر دو کره یکسان می‌شود و برابر است با

$$q_C=q_A=\frac{\frac{Q}{2}+Q}{2}=\frac{3}{4}Q$$

حال کره C را با کره B تماس داده شود بار هر یک پس از تماس برابر است با

$$q_B=q_C=\frac{-\frac{Q}{4}+\frac{3Q}{4}}{2}=\frac{Q}{4}$$

در نتیجه نیروی بین کره A و کره B برابر است با

$$F=\frac{(9\times10^9)\left(\frac{3Q}{4}\right)\left(\frac{Q}{4}\right)}{(1/2)^2}=4/7\times10^{-19}\,N$$

۶۸- الکترونی در نزدیکی سطح زمین در خلأ است و در $y=0$ روی محور قائم y قرار دارد. الکترون دومی در چه مقداری از y باید قرار گیرد تا نیروی الکتروستاتیکی وارد بر الکترون اول برابر با نیروی گرانشی وارد بر آن باشد؟

حل: شرط تعادلی نیروی الکترواستاتیک و نیروی گرانش را درنظر می‌گیریم

$$mg=\frac{ke^2}{y^2}$$

لذا داریم

$$(1/67\times10^{-27})(9/8)=\frac{(9\times10^9)(1/6\times10^{-19})^2}{y^2}$$

$$\Rightarrow \quad y=5/1m$$

۶۹- در شکل ۱۷-۲۸، ذرهٔ ۱ با بار $-5/00q$ و ذرهٔ ۲ با بار $+2/00q$ در فاصلهٔ L روی محور x ثابت شده‌اند. اگر ذرهٔ ۳ با بارنامعلوم q_3 به گونه‌ای قرار داده شود که نیروی الکتروستاتیکی خالص وارد بر آن از طرف ذره‌های ۱ و ۲ برابر صفر باشد، مختصهٔ (الف) x و (ب) y ذرهٔ ۳ چه باید باشد؟ SSM

حل: (الف) نیروها دافعه‌اند و شرط لازم خواهد بود

$$\frac{kq_3q_1}{x^2}=\frac{kq_3q_2}{(x-L)^2}$$

$$\frac{5q}{x^2}=\frac{2q}{(x-L)^2} \quad\Rightarrow\quad x=2/72L$$

ب) $y=0$

۷۰- دو دانشجوی مهندسی، یکی به جرم ۹۰ kg و دیگری به جرم ۴۵ kg به فاصلهٔ ۳۰ m از یکدیگر قرار دارند. فرض کنید هر یک به اندازهٔ ۰/۰۱٪ در مقدار بار مثبت و منفی عدم توازن دارند، یکی باردار مثبت و دیگری باردار منفی است. با جایگزین کردن هر دانشجو با یک کرهٔ آب که همان جرم دانشجوراداشته باشد، مرتبهٔ بزرگی نیروی جاذبهٔ الکتروستاتیکی میان آنها را بیابید.

حل: بار دانشجویی به جرم $m = ۹۰\,\mathrm{kg}$ برابر است با:

$$q = (۰/۰۰۰۱)\frac{mN_A Ze}{M}$$

$$= (۰/۰۰۰۱)\frac{(۹۰)(۶/۰۲\times۱۰^{۲۳})(۱۸)(۱/۶\times۱۰^{-۱۹})}{۰/۰۱۸}$$

$$= ۸/۶۶\times۱۰^{۵}\ \mathrm{C}$$

بار خالص دانشجوی دوم نصف این مقدار گفته شده است لذا نیروی الکترواستاتیکی بین آنها برابر است با:

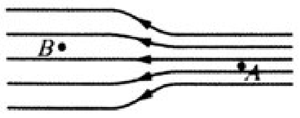
$$F = \frac{kq\left(\frac{q}{۲}\right)}{d^{۲}} = \frac{(۹\times۱۰^{۹})\left(\frac{۱}{۲}\right)(۵/۶۶\times۱۰^{۵})^{۲}}{(۳۰)^{۲}}$$

$$= ۳/۷۵\times۱۰^{۱۸}\ \mathrm{N}$$

۱۸ میدان‌های الکتریکی

بخش ۱۸-۳ خط‌های میدان الکتریکی

•۱- در شکل ۱۸-۳۰، فاصلهٔ خطهای میدان الکتریکی در سمت چپ، دو برابر فاصلهٔ آنها در سمت راست است. (الف) اگر بزرگی میدان در نقطهٔ A برابر ۴۰N/C باشد، بزرگی نیروی وارد بر یک پروتون در نقطهٔ A چقدر است؟ (ب) بزرگی میدان در نقطهٔ B چقدر است؟



شکل ۱۸-۳۰ مسئلهٔ ۱

حل: (الف)

$$F = qE = eE = (1.6\times10^{-19})(40) = 6.4\times10^{-18}\ \text{N}$$

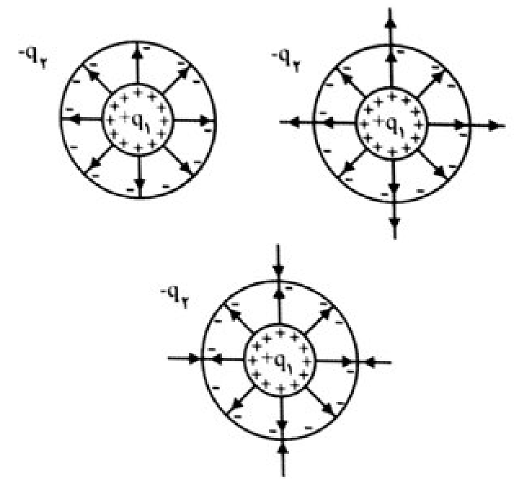
جهت نیرو به سمت چپ است.

(ب) می‌دانیم که بزرگی میدان متناسب با تعداد خطوط نیروی میدان است. بنابراین با توجه به شکل داریم:

$$E_A = 2E_B \Rightarrow E_B = \frac{E_A}{2} = \frac{40}{2} = 20\ \text{N/C}$$

•۲- خطهای میدان الکتریکی را هم در میان دو پوستهٔ کروی رسانای هم‌مرکز و هم در بیرون آنها هنگامی که بار مثبت یکنواخت q_1 روی پوستهٔ داخلی و بار منفی یکنواخت $-q_2$ روی پوستهٔ خارجی قرار دارد، به طور کیفی رسم کنید. حالتهای $q_1<q_2$ ، $q_1=q_2$ ، $q_1>q_2$ را در نظر بگیرید.

حل:



بخش ۱۸-۴ میدان ناشی از یک بار نقطه‌ای

•۳- بزرگی یک بار نقطه‌ای را که میدان الکتریکی ناشی از آن در فاصلهٔ ۵۰cm از آن برابر ۲/۰N/C است، پیدا کنید. SSM

حل:

$$E = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q}{r^2} \quad\Rightarrow\quad q = \frac{Er^2}{(1/4\pi\varepsilon_0)} = \frac{(2)(0.5)^2}{9\times10^9}$$

$$q = 5.56\times10^{-11}\ \text{C}$$

•۴- بزرگی یک بار نقطه‌ای که میدان الکتریکی ۱/۰۰N/C در نقطه‌هایی به فاصلهٔ ۱/۰۰m از آن ایجاد می‌کند، چقدر است؟

حل:

$$q = \frac{Er^2}{(1/4\pi\varepsilon_0)} = \frac{(1)(1)^2}{9\times10^9} = 1.11\times10^{-10}\ \text{C}$$

•۵- هستهٔ اتم پلوتونیم -۲۳۹ شامل ۹۴ پروتون است. فرض کنید این هسته، کره‌ای به شعاع ۶/۶۴fm است و بار پروتونها به طور یکنواخت در این کره پخش شده‌اند. در سطح هسته، (الف) بزرگی و (ب) جهت (به طور شعاعی، رو به داخل یا رو به خارج) میدان الکتریکی ناشی از پروتونها چگونه است؟ SSM

حل: (الف)

$$E = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q}{r^2} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{ze}{r^2} = (9\times10^9)\frac{(94)(1.6\times10^{-19})}{(6.64\times10^{-15})^2}$$

$$E = 3.07\times10^{21}\ \text{N/C}$$

(ب) میدان شعاعی و به سمت خارج از هسته است.

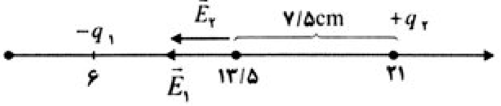
•۶- دو ذره روی محور x قرار دارند: ذرهٔ ۱ با بار -2.00×10^{-7} C در $x=6.00$cm و ذرهٔ ۲ با بار $+2.00\times10^{-7}$ C در $x=21.0$cm . میدان الکتریکی خالص آنها در وسط ذره‌ها، برحسب نمادگذاری بردار یکه چگونه است؟

حل:

$$x = \frac{x_2 - x_1}{2} = \frac{21-6}{2} = 7.5\ \text{cm}$$

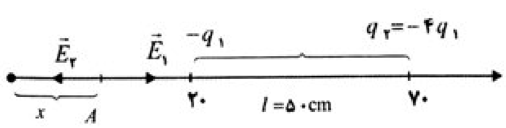
$$E = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q}{r^2} = (9\times10^9)\frac{2\times10^{-7}}{(7.5\times10^{-2})^2} = 3.2\times10^5\ \text{N/C}$$

$$\vec{E}_{total} = \vec{E}_1 + \vec{E}_2 = 2\vec{E}_1 = -6.4\times10^5\ \hat{i}\text{N/C}$$



••۷- دو ذره روی محور x قرار دارند: ذرهٔ ۱ با بار $q_1=2.1\times10^{-8}$C در $x=20$cm و ذرهٔ ۲ با بار $q_2=-4.00q_1$ در $x=70$cm. در چه مختصه‌ای روی محور x، میدان الکتریکی خالص دو ذره برابر صفر است؟ SSM

حل:



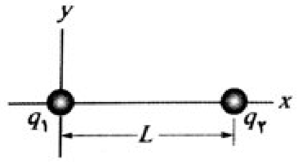
$$E_1 = E_2 \Rightarrow \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q_1}{(20-x^2)\times10^{-4}} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{4q_1}{(70-x)^2\times10^{-4}} \Rightarrow$$

$$\frac{1}{(20-x)^2} = \frac{4}{(70-x)^2} \Rightarrow \frac{1}{20-x} = \pm\frac{2}{70-x} \Rightarrow$$

$$40-2x = 70-x \Rightarrow x = -30\ \text{cm}$$

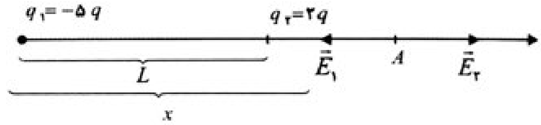
پس نقطه A در جایی که درنظر گرفتیم قرار ندارد بلکه سمت چپ مبدأ قرار دارد. پاسخ با منفی $x=۳۶/۶۷(\mathrm{cm})$ بدست می‌آید که غیر قابل قبول است.

۸●●- در شکل ۱۸-۳۱، ذرهٔ ۱ با بار $q_۱=-۵/۰۰q$ و ذرهٔ ۲ با بار $q_۲=+۲/۰۰q$ روی محور x قرار دارند. (الف) برحسب مضربی از فاصلهٔ L، در چه مختصه‌ای روی محور x، میدان الکتریکی خالص دو ذره برابر صفر است، (ب) خطهای میدان الکتریکی خالص را رسم کنید.



شکل ۱۸-۳۱ مسئلهٔ ۸

حل:



(الف)

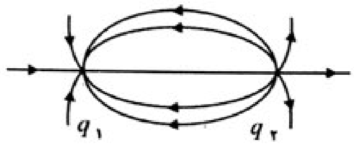
$$E_۱=E_۲ \Rightarrow \frac{۱}{۴\pi\varepsilon_۰}\frac{۵q}{x^۲}=\frac{۱}{۴\pi\varepsilon_۰}\frac{۲q}{(x-L)^۲} \Rightarrow$$

$$\frac{\sqrt{۵}}{x}=\pm\frac{\sqrt{۲}}{(x-L)} \Rightarrow \sqrt{۵}x-\sqrt{۵}L=\sqrt{۲}x \Rightarrow$$

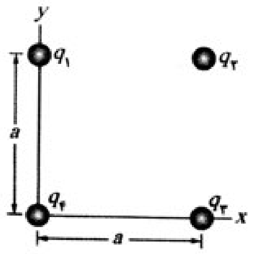
$$x=\frac{\sqrt{۵}L}{\sqrt{۵}-\sqrt{۲}} \Rightarrow x=۲/۷۲L$$

پاسخ با منفی برابر $x=۰/۶۱L$ بدست می‌آید که غیر قابل قبول است.

(ب)

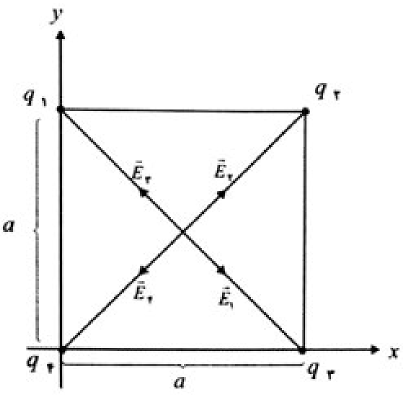


۹●●- در شکل ۱۸-۳۲، چهار ذره با بارهای $q_۱=+۱۰/۰\mathrm{nC}$، $q_۲=-۲۰/۰\mathrm{nC}$، $q_۳=+۲۰/۰\mathrm{nC}$، و $q_۴=-۱۰/۰\mathrm{nC}$ تشکیل مربعی به ضلع $a=۵/۰۰\mathrm{cm}$ را داده‌اند. میدان الکتریکی خالصی که این چهار ذره در مرکز مربع ایجاد می‌کنند، برحسب نمادگذاری بردارهای یکه، چگونه است؟ SSM ILW WWW



شکل ۱۸-۳۲ مسئلهٔ ۹

حل:



$$r=\frac{\sqrt{۲}}{۲}a=۳/۵۴(\mathrm{cm})$$

$$E_۱=E_۴=\frac{۱}{۴\pi\varepsilon_۰}\frac{q}{r^۲}=(۹\times۱۰^۹)\frac{۱۰\times۱۰^{-۹}}{(۳/۵۴)^۲\times۱۰^{-۴}}$$
$$=۷/۱۸\times۱۰^۴\ \mathrm{N/C}$$

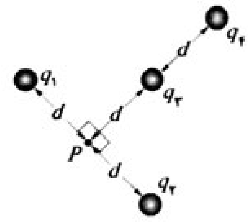
$$E_۲=E_۳=(۹\times۱۰^۹)\frac{۲\times۱۰^{-۹}}{(۳/۵۴\times۱۰^{-۲})^۲}=۱/۴۴\times۱۰^۵\ \mathrm{N/C}$$

$$E_x=(E_۱+E_۲-E_۳-E_۴)\cos۴۵=۰$$

$$E_y=(E_۲+E_۳-E_۱-E_۴)\sin۴۵=۲(E_۲-E_۱)\sin۴۵$$
$$=۲(۱/۴۴\times۱۰^۵-۷/۱۸\times۱۰^۴)\left(\frac{\sqrt{۲}}{۲}\right)=۱/۰۲\times۱۰^۵\ \mathrm{N/C}$$

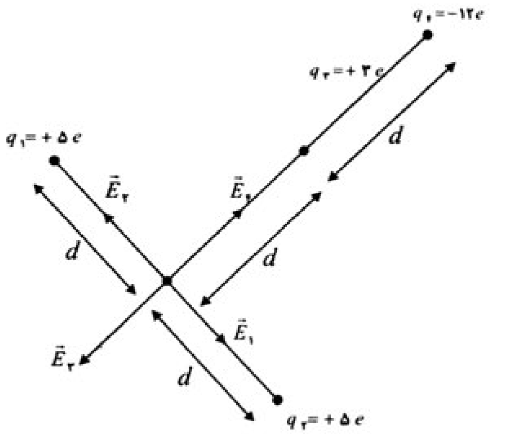
$$\vec{E}=۱۰/۲\times۱۰^۵\ \hat{\mathrm{j}}\ \mathrm{N/C}$$

۱۰●●●- در شکل ۱۸-۳۳، چهار ذره در مکانهایی ثابت شده‌اند و دارای بارهای $q_۱=q_۲=+۵e$، $q_۳=+۳e$ و $q_۴=-۱۲e$ هستند. فاصلهٔ d برابر با $۵/۰\mu\mathrm{m}$ است. بزرگی میدان الکتریکی خالص ناشی از ذره‌ها در نقطهٔ P چقدر است؟ GO



شکل ۱۸-۳۳ مسئلهٔ ۱۰

حل:



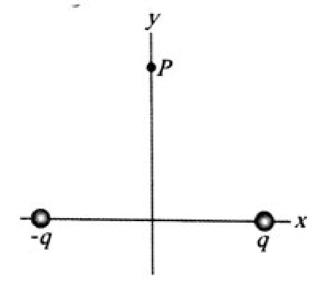
$$\vec{E}=\vec{E}_1+\vec{E}_2+\vec{E}_3+\vec{E}_4$$

$\vec{E}_1$ و $\vec{E}_2$ اثر همدیگر را خنثی می‌کنند.

$$E=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{3e}{d^2}-\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{12e}{4d^2}=0$$

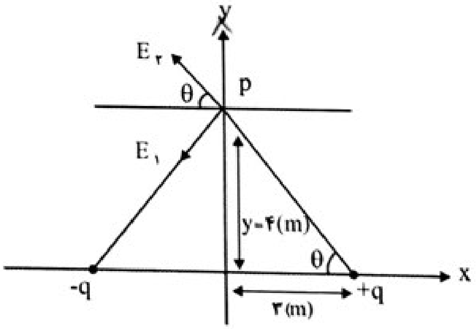
$$\vec{E}=0$$

••۱۱۰۰- شکل ۱۸-۳۴، دو ذرهٔ باردار را روی محور x نشان می‌دهد $-q=-3/20\times10^{-19}\,\text{C}$ در $x=-3/00\,\text{m}$ و $q=3/20\times10^{-19}\,\text{C}$ در $x=+3/00\,\text{m}$. (الف) بزرگی و (ب) جهت (نسبت به جهت مثبت محور x) میدان الکتریکی ایجاد شده در نقطهٔ P واقع بر $y=4/00\,\text{m}$ چگونه است؟



شکل ۱۸-۳۴ مسئلهٔ ۱۱

حل:



$$\tan\theta=\frac{4}{3}\ \Rightarrow\ \theta=53^\circ$$

$$r^2=x^2+y^2$$

$$E_1=E_2=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q}{r^2}=(9\times10^9)\frac{3/2\times10^{-19}}{(9+16)}=$$

$$1/15\times10^{-10}\ \text{N/C}$$

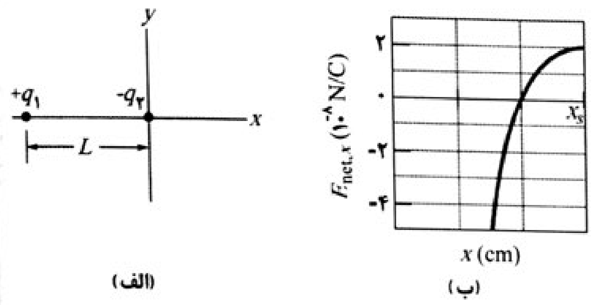
$$E_y=E_{2y}-E_{1y}=0$$

$$E_x=2E_1\cos\theta=(2)(1/15\times10^{-10})(\cos 53)$$

$$=1/38\times10^{-10}\ \text{N/C}$$

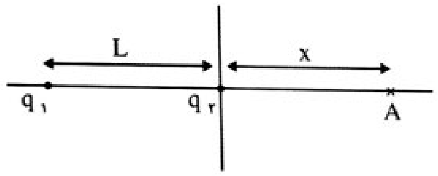
$$\vec{E}=-1/38\times10^{-10}\,\hat{i}\ \text{N/C}$$

••۱۲۰۰- شکل ۱۸-۳۵ الف، دو ذرهٔ باردار را نشان می‌دهد که در مکانهایی روی محور x به فاصلهٔ L ثابت شده‌اند. نسبت q_1/q_2 بزرگیهای بار آنها برابر با ۴/۰۰ است. شکل ۱۸-۳۵ ب، $E_{\text{net},x}$، مؤلفهٔ x میدان الکتریکی آنها را در امتداد محور x برای سمت راست ذرهٔ ۲ نشان می‌دهد. مقیاس محور x با $x_s=30/0\,\text{cm}$ مشخص شده است. (الف) به ازای چه مقدار $x>0$، $E_{\text{net},x}$ بیشینه است؟ (ب) اگر بار ذرهٔ ۲ برابر با $-q_2=-3e$ باشد، مقدار آن بیشینه چقدر است؟



شکل ۱۸-۳۵ مسئلهٔ ۱۲

حل:



(الف)

$$E=\frac{kq_1}{(L+x)^2}-\frac{kq_2}{x^2}\Rightarrow E=\frac{4kq_2}{(L+x)^2}-\frac{kq_2}{x^2}$$

$$E=kq_2\left(\frac{4}{(L+x)^2}-\frac{1}{x^2}\right)$$

$$\frac{dE}{dx}=kq_2\left(\frac{-8}{(L+x)^3}-\frac{2}{x^3}\right)=0\ \Rightarrow$$

$$\frac{-8x^3+2(L+x)^3}{x^3(L+x)^3}=0\ \Rightarrow L+x=(4)^{1/3}x\Rightarrow$$

$$x=\frac{L}{(4)^{1/3}-1}\ \Rightarrow\ x=\frac{L}{0/59}$$

$$x=20\,cm\ \Rightarrow\ E=0\Rightarrow\ \frac{4}{(L+0/2)^2}-\frac{1}{(0/2)^2}=0\ \Rightarrow$$

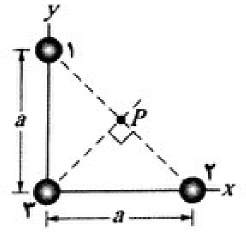
$$\frac{2}{L+0/2}=\pm\frac{1}{0/2}\Rightarrow L=0/2\text{m}\Rightarrow x=\frac{0/2}{0/59}\Rightarrow x=0/34\,\text{m}$$

(ب)

$$E=(9\times10^9)(3\times1/6\times10^{-19})\left[\frac{4}{(0/2+0/34)^2}-\frac{1}{(0/34)^2}\right]$$

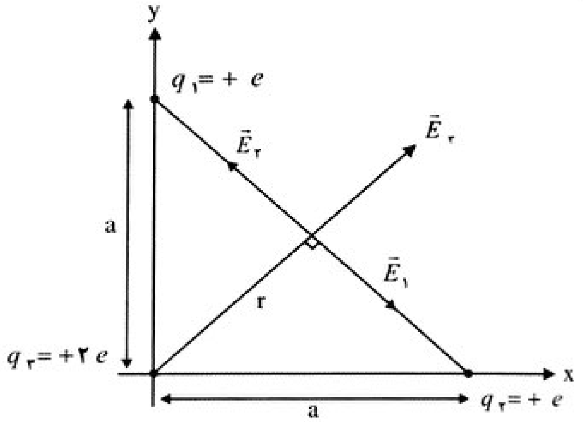
$$E=2/9\times10^{-8}\ \text{N/C}$$

••۱۳۰۰- در شکل ۱۸-۳۶، سه ذره در مکانهای خود ثابت شده‌اند و دارای بارهای $q_1=q_2=+e$ و $q_3=+2e$ هستند. فاصلهٔ a برابر $6/00\,\mu\text{m}$ است. (الف) بزرگی و (ب) جهت میدان الکتریکی خالص ناشی از ذره‌ها در نقطهٔ P چگونه است؟



شکل ۱۸-۳۶ مسئلهٔ ۱۳

حل:



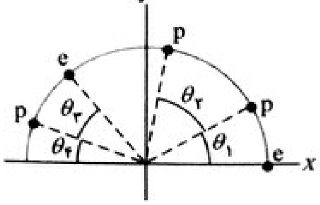
$\vec{E}_1$ و $\vec{E}_3$ یکدیگر را خنثی می‌کنند. $r=\frac{\sqrt{2}}{2}a=4.24(\mu m)$

(الف)

$$E=E_2=\frac{kq_2}{r^2}=(9\times10^9)\frac{(2)(1.6\times10^{-19})}{(4.24\times10^{-6})^2}=160.2\ \text{N/C}$$

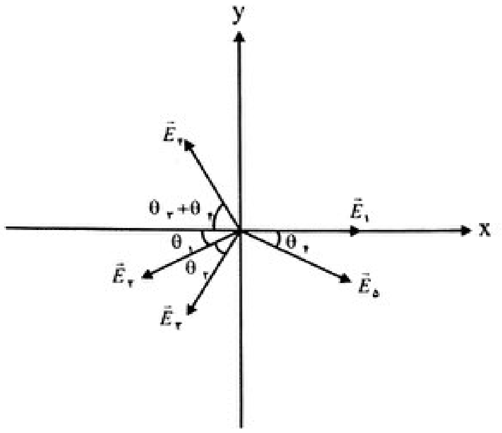
(ب) جهت E همان جهت E_2 یعنی با محور x زاویه ۴۵° می‌سازد.

۱۴●●- شکل ۱۸-۳۷ آرایش نامنظمی از الکترونها (e) و پروتونها (p) را نشان می‌دهد که روی کمانی دایره‌ای به شعاع $r=2.00\text{cm}$ با زاویه‌های $\theta_1=30.0°$ ، $\theta_2=50.0°$ ، $\theta_3=30.0°$ ، و $\theta_4=20.0°$ قرار گرفته‌اند. (الف) بزرگی و (ب) جهت (نسبت به جهت مثبت محور x) میدان الکتریکی خالص ایجاد شده در مرکز کمان چیست؟



شکل ۱۸-۳۷ مسئلهٔ ۱۴

حل:



$$E_x=E_1+E_5\cos\theta_4-E_4\cos(\theta_3+\theta_4)-E_2\cos\theta_1-E_3\cos(\theta_1+\theta_2)$$

$$E_x=\frac{ke}{R^2}(1+\cos\theta_4-\cos(\theta_3+\theta_4)-\cos\theta_1-\cos(\theta_1+\theta_2))$$

$$E_x=\frac{(9\times10^9)(1.6\times10^{-19})}{(0.02)^2}$$

$$(1+\cos20-\cos50-\cos30-\cos80)\ \Rightarrow$$

$$E_x=9.26\times10^{-7}\ (\text{N/C})$$

$$E_y\ \frac{(9\times10^9)(1.6\times10^{-19})}{(0.02)^2}\times$$

$$(-\sin20-\sin80-\sin30+\sin50)\Rightarrow$$

$$E_y=-3.82\times10^{-6}\ (\text{N/C})$$

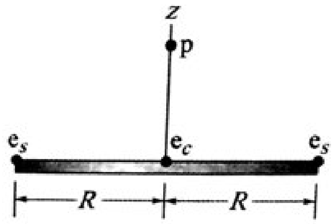
$$E=\sqrt{Ex^2+Ey^2}=\sqrt{(9.26\times10^{-7})^2+(-3.82\times10^{-6})^2}$$

$$=3.93\times10^{-6}\ (\text{N/C})$$

$$\tan\theta=\frac{Ey}{Ex}=\frac{-3.82\times10^{-6}}{9.26\times10^{-7}}=-4.13\Rightarrow\theta=-76.37°$$

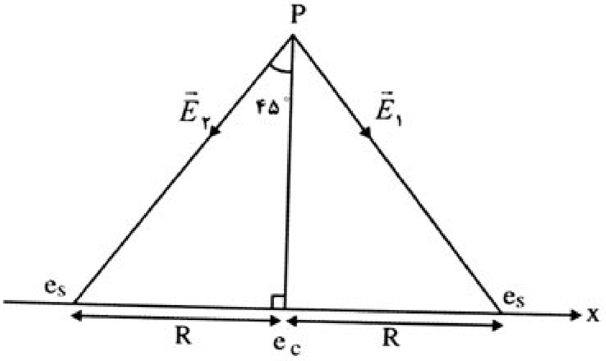
زاویه θ نسبت به محور x بدست می‌آید.

۱۵●●- شکل ۱۸-۳۸، یک پروتون (p) را روی محور مرکزی یک قرص با چگالی بار یکنواخت ناشی از الکترونهای اضافی نشان می‌دهد. سه تا از این الکترونها نشان داده شده‌اند: الکترون e_c در مرکز قرص و الکترونهای e_s در دو سوی مخالف قرص به شعاع R از مرکز. پروتون در ابتدا در فاصلهٔ $z=R=2.00\text{cm}$ از قرص قرار دارد. در این مکان، بزرگیهای (الف) میدان الکتریکی $\vec{E}_c$ ناشی از الکترون e_c ، و (ب) میدان الکتریکی *خالص* $\vec{E}_{s,\text{net}}$ ناشی از الکترونهای e_s چقدر است؟ سپس پروتون به $z=R/10.0$ حرکت می‌کند. در این صورت بزرگیهای (پ) $\vec{E}_c$ و (ت) $\vec{E}_{s,\text{net}}$ در محل پروتون چقدر است؟ (ث) از (الف) و (پ) درمی‌یابیم که وقتی پروتون به قرص نزدیکتر شود، بزرگی $\vec{E}_c$ افزایش می‌یابد. چرا آنطور که از (ب) و (ت) دیده می‌شود، بزرگی $\vec{E}_{s,\text{net}}$ کاهش می‌یابد؟



شکل ۱۸-۳۸ مسئلهٔ ۱۵

حل:



(الف)
$$E_c = \frac{ke_c}{R^۲} = \frac{(۹\times۱۰^۹)(۱/۶\times۱۰^{-۱۹})}{(۰/۰۲)^۲} = ۳/۶\times۱۰^{-۶}\ \text{N/C}$$

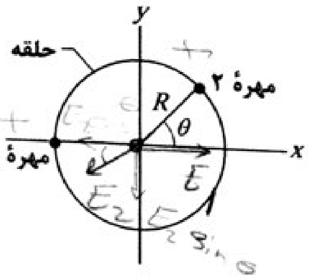
(ب)
$$r^۲ = R^۲ + R^۲ = ۲R^۲$$
$$E_۱ = E_۲ = \frac{ke_s}{r^۲} \Rightarrow E_{s,\text{net}} = ۲E_۱\cos\theta = \frac{۲ke_s}{۲R^۲}\cos\theta \Rightarrow$$
$$E_{s,\text{net}} = \frac{(۹\times۱۰^۹)(۱/۶\times۱۰^{-۱۹})}{(۰/۰۲)^۲}\times\left(\frac{\sqrt{۲}}{۲}\right) = ۲/۵۵\times۱۰^{-۶}\ \text{N/C}$$

(پ)
$$r = ۰/۱R = ۰/۰۰۲\text{m}$$
$$E_c = \frac{(۹\times۱۰^۹)(۱/۶\times۱۰^{-۱۹})}{(۰/۰۰۲)^۲} = ۳/۶\times۱۰^{-۴}\ \text{N/C}$$

(ت)
$$r^۲ = R^۲ + ۰/۰۱R^۲ \Rightarrow r = \sqrt{۱/۰۱R^۲} = ۰/۰۲۰۱\text{m}$$
$$E_{s,\text{net}} = ۲E_۱\cos\theta = \frac{۲ke_s}{r^۲}\cos\theta = \frac{۲ke_s}{r^۲}\left(\frac{۰/۱R}{r}\right) \Rightarrow$$
$$E_{s,\text{net}} = (۲\times۹\times۱۰^۹)\frac{۱/۶\times۱۰^{-۱۹}}{(۰/۰۲۱)^۲}\times\left(\frac{۰/۰۰۲}{۰/۰۲۰۱}\right) = ۶/۲۲\times۱۰^{-۷}\ \text{N/C}$$

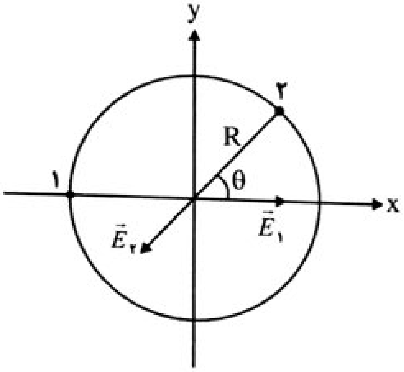
(ث) هرچه نقطه P به سطح قرص نزدیکتر می‌شود θ بزرگتر شده و $\cos\theta$ بسیار کوچکتر می‌گردد. بنابراین وقتی پروتون به قرص نزدیکتر می‌شود $E_{s,\text{net}}$ کاهش می‌یابد.

۱۶●●●- شکل ۱۸-۳۹، حلقه‌ای پلاستیکی به شعاع R=۵۰/۰cm را نشان می‌دهد. دو مهرهٔ باردار کوچک روی حلقه قرار دارند: مهرهٔ ۱ با بار $+۲/۰۰\mu$C در مکان خود در سمت چپ ثابت شده است؛ مهرهٔ ۲ با بار $+۶/۰۰\mu$C می‌تواند روی حلقه جابه جا شود. دو مهره، میدان الکتریکی خالصی به بزرگی E را در مرکز حلقه ایجاد می‌کنند. مهرهٔ ۲ دو باید در چه زاویهٔ θ (الف) مثبت و (ب) منفی قرار داده شود تا E=۲/۰۰×۱۰^۵ N/C باشد؟



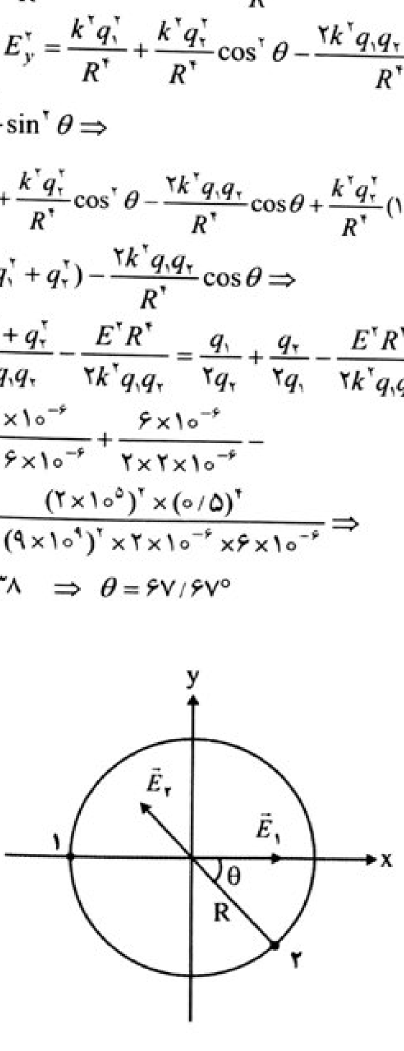
شکل ۱۸-۳۹ مسئلهٔ ۱۶

حل:



(الف)
$$E_x = \frac{kq_۱}{R^۲} - \frac{kq_۲}{R^۲}\cos\theta\ ,\ E_y = -\frac{kq_۲}{R^۲}\sin\theta$$
$$E^۲ = E_x^۲ + E_y^۲ = \frac{k^۲q_۱^۲}{R^۴} + \frac{k^۲q_۲^۲}{R^۴}\cos^۲\theta - \frac{۲k^۲q_۱q_۲\cos\theta}{R^۴} + \frac{k^۲q_۲^۲}{R^۴}\sin^۲\theta \Rightarrow$$
$$E^۲ = \frac{k^۲q_۱^۲}{R^۴} + \frac{k^۲q_۲^۲}{R^۴}\cos^۲\theta - \frac{۲k^۲q_۱q_۲}{R^۴}\cos\theta + \frac{k^۲q_۲^۲}{R^۴}(۱-\cos^۲\theta) \Rightarrow$$
$$E^۲ = \frac{k^۲}{R^۴}(q_۱^۲ + q_۲^۲) - \frac{۲k^۲q_۱q_۲}{R^۴}\cos\theta \Rightarrow$$
$$\cos\theta = \frac{q_۱^۲ + q_۲^۲}{۲q_۱q_۲} - \frac{E^۲R^۴}{۲k^۲q_۱q_۲} = \frac{q_۱}{۲q_۲} + \frac{q_۲}{۲q_۱} - \frac{E^۲R^۴}{۲k^۲q_۱q_۲} \Rightarrow$$
$$\cos\theta = \frac{۲\times۱۰^{-۶}}{۲\times۶\times۱۰^{-۶}} + \frac{۶\times۱۰^{-۶}}{۲\times۲\times۱۰^{-۶}} - \frac{(۲\times۱۰^۵)^۲\times(۰/۵)^۴}{۲\times(۹\times۱۰^۹)^۲\times۲\times۱۰^{-۶}\times۶\times۱۰^{-۶}} \Rightarrow$$
$$\cos\theta = ۰/۳۸ \quad\Rightarrow\quad \theta = ۶۷/۶۷°$$

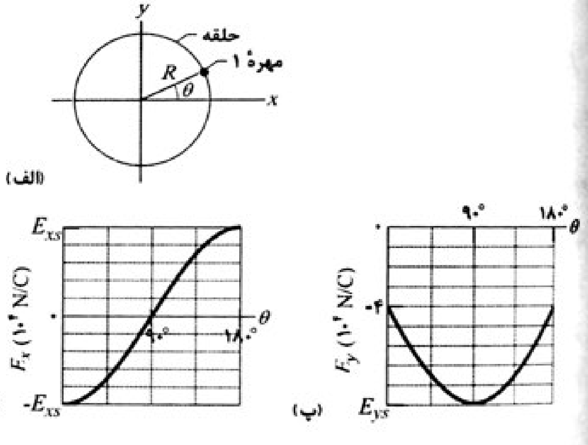
(ب)



$$E_x = \frac{kq_۱}{R^۲} - \frac{kq_۲}{R^۲}\cos\theta \quad , \quad E_y = \frac{kq_۲}{R^۲}\sin\theta$$

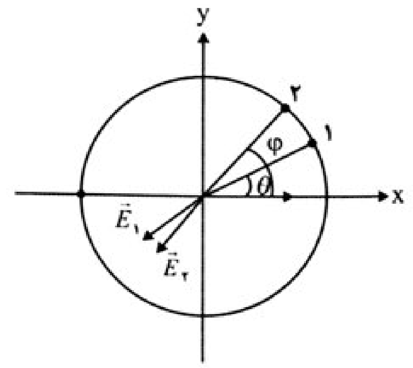
به همان جواب $\cos\theta = ۰/۳۸$ می‌رسد، در نتیجه $\theta = -۶۷/۶۷°$.

۱۷●●●- دو مهرهٔ باردار روی حلقهٔ پلاستیکی شکل ۱۸-۴۰ الف قرار دارند. مهرهٔ ۲، که نشان داده نشده است، در مکانی روی حلقه به شعاع $R=۶۰/۰\text{cm}$ ثابت شده است. مهرهٔ ۱ در ابتدا روی محور x در زاویهٔ $\theta=۰°$ واقع است. سپس این مهره با عبور از ربعهای اول و دوم دستگاه مختصات xy به سمت مقابل با زاویهٔ $\theta=۱۸۰°$ حرکت می‌کند. شکل ۱۸-۴۰ ب مؤلفهٔ x میدان الکتریکی خالص حاصل از دو مهره را برحسب تابعی از θ در مبدأ، و شکل ۱۸-۴۰ پ مؤلفهٔ y همان میدان را به دست می‌دهند. مقیاسهای محور قائم با $E_{xs} = ۵/۰\times۱۰^۴$ و $E_{ys} = -۹/۰\times۱۰^۴\ \text{N/C}$ مشخص شده‌اند: (الف) مهرهٔ ۲ در چه زاویهٔ θ قرار گرفته است؟ بارهای (ب) مهرهٔ ۱ و (پ) مهرهٔ ۲ چقدرند؟



شکل ۱۸-۴۰ مسئلهٔ ۱۷

حل:



(الف)
$$\begin{cases} E_x = -E_۱\cos\theta - E_۲\cos\varphi \\ E_y = -E_۱\sin\theta - E_۲\sin\varphi \end{cases}$$

$$\theta = ۰ \Rightarrow \begin{cases} -۵\times۱۰^۴ = -E_۱ - E_۲\cos\varphi & (۱) \\ -۴\times۱۰^۴ = -E_۲\sin\varphi & (۲) \end{cases}$$

$$\theta = ۹۰ \Rightarrow \begin{cases} E_x = ۰ \Rightarrow ۰ = -E_۲\cos\varphi \Rightarrow \varphi = \pi/۲ & (۳) \\ E_y = -۹\times۱۰^۴ = -E_۱ - E_۲\sin\varphi & (۴) \end{cases}$$

مهره دوم در $\varphi = \pi/۲$ قرار دارد.

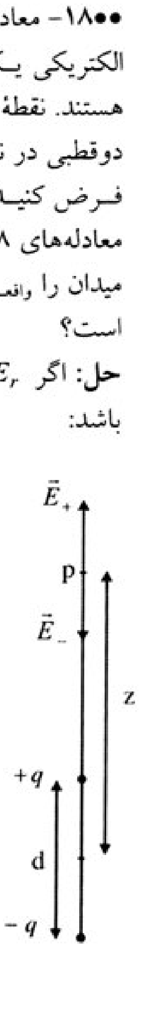
(ب)

$$(۲),(۴) \Rightarrow -۹\times۱۰^۴ = -E_۱ - ۴\times۱۰^۴ \Rightarrow E_۱ = ۵\times۱۰^۴\ \text{N/C}$$
$$(۱),(۳) \Rightarrow -۵\times۱۰^۴ = -E_۱ \qquad (۵)$$
$$(۳),(۴) \Rightarrow -۹\times۱۰^۴ = -E_۱ - E_۲ \qquad (۶)$$
$$(۵),(۶) \Rightarrow -۹\times۱۰^۴ = -۵\times۱۰^۴ - E_۲ \Rightarrow E_۲ = ۴\times۱۰^۴\ \text{N/C}$$
$$E_۱ = k\frac{q_۱}{R^۲} \Rightarrow ۵\times۱۰^۴ = (۹\times۱۰)^۹\frac{q_۱}{(۰/۶)^۲}$$
$$\Rightarrow q_۱ = ۲\times۱۰^{-۶}\ \text{C}$$
$$E_۲ = k\frac{q_۲}{R^۲} \Rightarrow ۴\times۱۰^۴ = (۹\times۱۰^۹)\frac{q_۲}{(۰/۶)^۲}$$
$$\Rightarrow q_۲ = ۱/۶\times۱۰^{-۶}\ \text{C}$$

بخش ۱۸-۵ میدان الکتریکی ناشی از یک دو قطبی الکتریکی

۱۸●●●- معادله‌های ۱۸-۸ و ۱۸-۹ تقریبهایی برای بزرگی میدان الکتریکی یک دوقطبی، در نقطه‌هایی روی محور دوقطبی هستند. نقطهٔ P را روی آن محور به فاصلهٔ $z=۵/۰۰d$ از مرکز دوقطبی در نظر بگیرید (d فاصلهٔ میان ذره‌های دو قطبی است). فرض کنید $E_{\text{تقریبی}}$ بزرگی میدان در نقطهٔ P باشد که با معادله‌های ۱۸-۸ و ۱۸-۹ تقریب زده شده است. بزرگی واقعی میدان را $E_{\text{واقعی}}$ در نظر بگیرید. نسبت $E_{\text{تقریبی}}/E_{\text{واقعی}}$ چقدر است؟

حل: اگر E_r مقدار واقعی و E مقدار تقریبی میدان الکتریکی باشد:



$$E_r = E_+ - E_- = \frac{kq}{\left(z-\frac{d}{۲}\right)^۲} - \frac{kq}{\left(z+\frac{d}{۲}\right)^۲}$$

$$E_r = kq\left(\frac{z^۲ + \frac{d^۲}{۴} + zd - z^۲ - \frac{d^۲}{۴} + zd}{\left(z-\frac{d}{۲}\right)^۲\left(z+\frac{d}{۲}\right)^۲}\right)$$

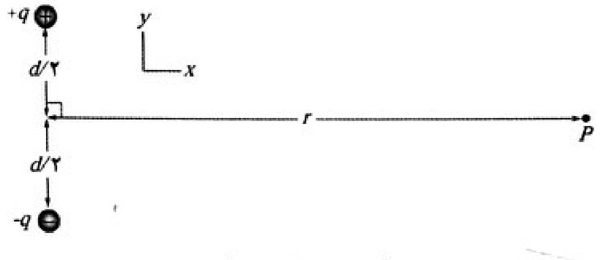
$$E_r = kq\left(\frac{۲zd}{\left(z^۲ - \frac{d^۲}{۴}\right)^۲}\right)$$

$$z >> d \quad \Rightarrow \quad E = kq\frac{۲d}{z^۳} = \frac{qd}{۲\pi\varepsilon_۰ z^۳}$$

$$\frac{E}{E_r} = \frac{\dfrac{qd}{۲\pi\varepsilon_۰ z^۳}}{\dfrac{۲zqd}{۴\pi\varepsilon_۰\left(z^۲ - \frac{d^۲}{۴}\right)^۲}} = \frac{\left(z^۲ - \frac{d^۲}{۴}\right)^۲}{z^۴} \Rightarrow$$

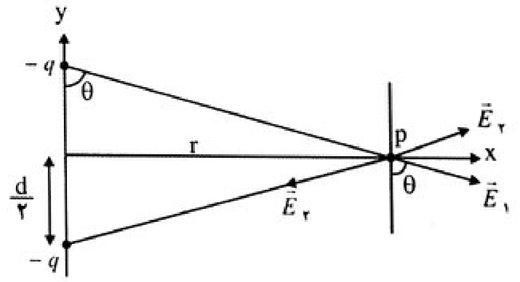
$$\frac{E}{E_r}=\frac{\left(۲۵d^۲-\frac{d^۲}{۴}\right)^۲}{(۵d)^۴}=\frac{\left(۲۵-\frac{۱}{۴}\right)^۲}{۶۲۵}=۰/۹۸۰۱$$

●●●۱۹- شکل ۱۸-۴۱، یک دوقطبی الکتریکی را نشان می‌دهد. (الف) بزرگی و (ب) جهت (نسبت به جهت مثبت محور x) میدان الکتریکی دو قطبی در نقطهٔ P واقع در فاصلهٔ $r \gg d$ چگونه است؟



شکل ۱۸-۴۱ مسئلهٔ ۱۹

حل:



$$\vec{E}_۱=\vec{E}_۲$$

$\vec{E}_۱$ و $\vec{E}_۲$ اثر یکدیگر را در راستای x خنثی می‌کنند و میدان نهایی در خلاف جهت محور y است.

$$E=۲E_۱\cos\theta=۲\frac{kq}{\left(r^۲+\frac{d^۲}{۴}\right)}\frac{\frac{d}{۲}}{\left(r^۲+\frac{d^۲}{۴}\right)^{۱/۲}}\Rightarrow$$

$$E=\frac{۱}{۴\pi\varepsilon_۰}\frac{qd}{\left(r^۲+\frac{d^۲}{۴}\right)^{۳/۲}}$$

$$r>>d\ \Rightarrow\ E=\frac{qd}{۴\pi\varepsilon_۰ r^۳}$$

●●●۲۰- میدان الکتریکی یک دوقطبی الکتریکی روی محور آن تقریباً با معادله‌های ۱۸-۸ و ۱۸-۹ داده می‌شود، اگر یک بسط دوجمله‌ای از معادلهٔ ۱۸-۷ صورت گیرد، جملهٔ بعدی در عبارت میدان الکتریکی دوقطبی در امتداد محور x چه خواهد بود؟ یعنی در عبارت زیر $E_{\text{بعدی}}$ چیست؟

$$E=\frac{۱}{۲\pi\varepsilon_۰}\frac{qd}{z^۳}+E_{\text{بعدی}}$$

حل:

$$E=kq\left[\frac{۱}{\left(z-\frac{d}{۲}\right)^۲}-\frac{۱}{\left(z+\frac{d}{۲}\right)^۲}\right]\Rightarrow$$

$$E=\frac{kq}{z^۲}\left[\left(۱-\frac{d}{۲z}\right)^{-۲}-\left(۱+\frac{d}{۲z}\right)^{-۲}\right]\Rightarrow$$

$$E=\frac{kq}{z^۲}\left[۱+\frac{۲d}{۲z}+\frac{(-۲)(-۲-۱)\left(-\frac{d}{۲z}\right)^۲}{۲!}+\frac{(-۲)(-۲-۱)(-۲-۲)\left(-\frac{d}{۲z}\right)^۳}{۳!}+\ldots-\left(۱+\frac{-۲d}{۲z}\right)+\frac{(-۲)(-۲-۱)\left(\frac{d}{۲z}\right)^۲}{۲!}+\frac{(-۲)(-۲-۱)(-۲-۲)\left(\frac{d}{۲z}\right)^۳}{۳!}+\ldots\right]\Rightarrow$$

$$E=\frac{kq}{z^۲}\left[\frac{۲d}{z}+\frac{۳d^۲}{۴z^۲}+\frac{۴d^۳}{۸z^۳}+\ldots+\frac{d}{z}-\frac{۳d^۲}{۴z^۲}+\frac{۴d^۳}{۸z^۳}-\ldots\right]\Rightarrow$$

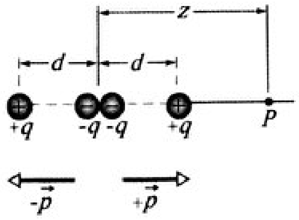
$$E=\frac{kq}{z^۲}\left[\frac{۲d}{z}+\frac{d^۳}{z^۳}\right]=\frac{qd}{۲\pi\varepsilon_۰ z^۳}+\frac{qd^۳}{۴\pi\varepsilon_۰ z^۵}\Rightarrow$$

$$E_{\text{next}}=\frac{qd^۳}{۴\pi\varepsilon_۰ z^۵}$$

●●●۲۱- *چهارقطبی الکتریکی*. شکل ۱۸-۴۲، یک چهارقطبی الکتریکی را نشان می‌دهد، که شامل دو دوقطبی است که بزرگی گشتاورهای دوقطبی آنها برابر ولی جهت آنها مخالف یکدیگر است. نشان دهید که مقدار E روی محور چهارقطبی برای نقطهٔ P به فاصلهٔ z از مرکز آن (با فرض $z \gg d$) با رابطهٔ زیر داده می‌شود

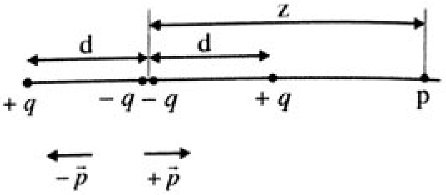
$$E=\frac{۳Q}{۴\pi\varepsilon_۰ z^۴}$$

که در آن $Q(=۲qd^۲)$ *گشتاور چهار قطبی* توزیع بار نامیده می‌شود. SSM



شکل ۱۸-۴۲ مسئلهٔ ۲۱

حل:



$$E_1=\frac{q}{4\pi\varepsilon_0(z-d)^2}$$

$$E_2=E_3=\frac{-q}{4\pi\varepsilon_0 z^2}$$

$$E_4=\frac{q}{4\pi\varepsilon_0(z+d)^2}$$

$$E=\frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\left[\frac{1}{(z-d)^2}-\frac{2}{z^2}+\frac{1}{(z+d)^2}\right]\Rightarrow$$

$$E=\frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\left[\frac{z^2(z^2+d^2+2dz)-2(z^2-d^2)^2+z^2(z^2+d^2-2zd)}{(z-d)^2z^2(z+d)^2}\right]\Rightarrow$$

$$E=\frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\times\frac{6z^2d^2-2d^4}{(z^2-d^2)^2z^2}$$

$$z>>d\Rightarrow E=\frac{6q\,z^2d^2}{4\pi\varepsilon_0 z^6}=\frac{3(2qd^2)}{4\pi\varepsilon_0 z^4}=\frac{3Q}{4\pi\varepsilon_0 z^4}$$

که در آن Q گشتاور چهار قطبی توزیع بار است. $Q=2qd^2$

بخش ۱۸-۶ میدان الکتریکی ناشی از یک خط باردار

۲۲•- چگالی، چگالی، چگالی. (الف) بار $-300e$ روی کمانی دایره‌ای به شعاع ۴/۰۰cm در یک زاویهٔ °۴۰، به طور یکنواخت توزیع شده است. چگالی بار خطی روی کمان چقدر است؟ (ب) بار $-300e$ روی یک طرف قرصی دایره‌ای به شعاع ۲/۰۰cm به طور یکنواخت توزیع شده است. چگالی بار سطحی روی این وجه چقدر است؟ (پ) بار $-300e$ روی سطح کره‌ای به شعاع ۲/۰۰cm به طور یکنواخت توزیع شده است. چگالی بار سطحی روی این سطح چقدر است؟ (ت) بار $-300e$ در حجم کره‌ای به شعاع ۲/۰۰cm به طور یکنواخت پخش شده است. چگالی بار حجمی در این کره چقدر است؟

حل: (الف)

$$\lambda=\frac{q}{R\theta}=\frac{(-300)(1/6\times10^{-19})}{(0/04)\left(\frac{40\pi}{180}\right)}=-1/72\times10^{-15}\ \text{C/m}$$

(ب)
$$\sigma=\frac{q}{\pi R^2}=\frac{(-300)(1/6\times10^{-19})}{\pi(0/02)^2}=-3/82\times10^{-14}\ \text{C/m}^2$$

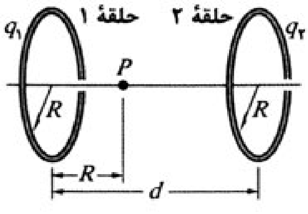
(پ)
$$\sigma=\frac{q}{4\pi R^2}=\frac{(-300)(1/6\times10^{-19})}{4\pi(0/02)^2}$$

$$=-9/55\times10^{-15}\ \text{C/m}^2$$

(ت)
$$\rho=\frac{q}{\frac{4}{3}\pi R^3}=\frac{(-300)(1/6\times10^{-19})}{\frac{4}{3}\pi(0/02)^3}$$

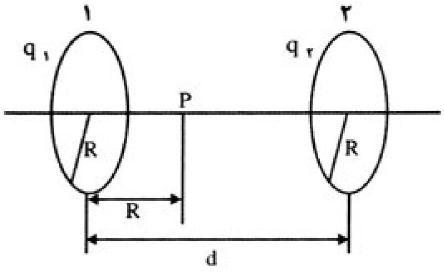
$$=-1/43\times10^{-12}\ \text{C/m}^3$$

۲۳•- شکل ۱۸-۴۳، دو حلقهٔ نارسانای موازی را نشان می‌دهد که محورهای مرکزی آنها روی یک خط مشترک قرار دارند. حلقهٔ ۱ با باریکنواخت q_1 و شعاع R؛ حلقهٔ ۲ با بار یکنواخت q_2 و همان شعاع R. حلقه‌ها به فاصلهٔ $d=3/00R$ از یکدیگر قرار گرفته‌اند. میدان الکتریکی خالص در نقطهٔ P روی خط مشترک، در فاصلهٔ R از حلقهٔ ۱ برابر با صفر است. نسبت q_1/q_2 چقدر است؟



شکل ۱۸-۴۳ مسئلهٔ ۲۳

حل:



$d=3R$

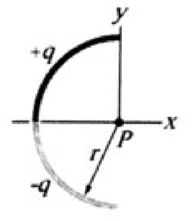
حلقه $E=\dfrac{qz}{4\pi\varepsilon_0(z^2+R^2)^{3/2}}$

در نقطه P: $E_1=E_2$

$$\frac{q_1R}{4\pi\varepsilon_0(2R^2)^{3/2}}=\frac{q_2(2R)}{4\pi\varepsilon_0(4R^2+R^2)^{3/2}}\Rightarrow$$

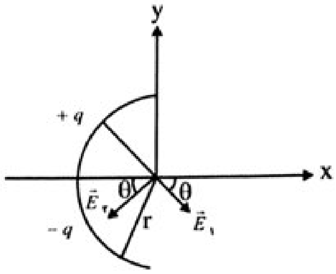
$$\frac{q_1}{2^{3/2}}=\frac{2q_2}{5^{3/2}}\Rightarrow\frac{q_1}{q_2}=2\times\left(\frac{2}{5}\right)^{3/2}=0/506$$

۲۴••- در شکل ۱۸-۴۴، یک میلهٔ شیشه‌ای باریک به شکل نیمدایره‌ای به شعاع $r=5/00\text{cm}$ درآمده است. بار $+q=4/50\text{pC}$ به طور یکنواخت روی نیمهٔ بالایی، و بار $-q=-4/50\text{pC}$ به طور یکنواخت روی نیمهٔ پایینی توزیع شده است. (الف) بزرگی و (ب) جهت (نسبت به جهت مثبت محور x) میدان الکتریکی در نقطهٔ P، واقع در مرکز نیمدایره چگونه است؟



شکل ۱۸-۴۴ مسئلهٔ ۲۴

حل:



(الف) معادله یک کمان باردار به این صورت بدست می‌آید

(مسأله ۲۵):
$$E=\frac{Q}{2\pi\varepsilon_0 R^2}\frac{\sin\frac{\varphi}{2}}{\varphi}$$

جهت میدان در راستای محور تقارن کمان است.

در این مسأله $\varphi=\frac{\pi}{2}$ است.

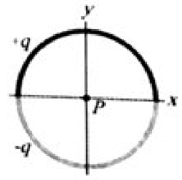
$$E_1=E_2=\frac{2Q}{4\pi\varepsilon_0 R^2}\frac{\sin\frac{\pi}{2}}{\frac{\pi}{2}}=\frac{(9\times10^{9})\times2\times(4/5\times10^{-12})}{(0/05)^2}\times(0/45)\Rightarrow$$

$$E_1=E_2=14/58\ \text{N/C}$$

$$E_{\text{total}}=2E_1\sin45=(2)(14/58)\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)=20/62\ \text{N/C}$$

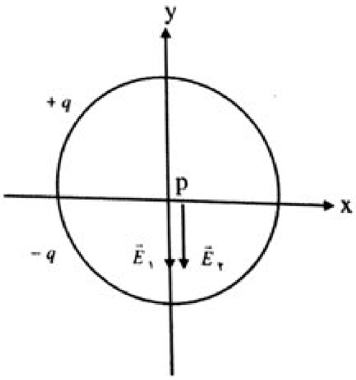
(ب) جهت میدان در خلاف جهت میدان y است.

●●۲۵- در شکل ۱۸-۴۵، دو میلهٔ پلاستیکی خمیده، یکی دارای بار $+q$ و دیگری $-q$ ، در صفحهٔ xy دایره‌ای به شعاع $R=8/50\,\text{cm}$ را تشکیل داده‌اند. محور x از هر دو نقطهٔ اتصال می‌گذرد، و بار به طور یکنواخت روی هر دو میله توزیع شده است. اگر $q=15/0\,\text{pC}$ باشد، (الف) بزرگی و (ب) جهت (نسبت به جهت مثبت محور x) میدان الکتریکی $\vec{E}$ ایجاد شده در نقطهٔ P ، واقع در مرکز دایره چگونه است؟

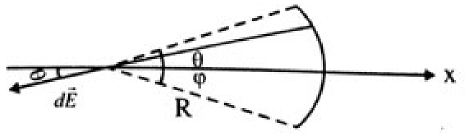


شکل ۱۸-۴۵ مسئلهٔ ۲۵

حل:



(الف)



ابتدا میدان ناشی از یک کمان باردار را در مرکز آن بدست می‌آوریم.

$$dE=\frac{dq}{4\pi\varepsilon_0 R^2}=\frac{\lambda ds}{4\pi\varepsilon_0 R^2}=\frac{\lambda R d\theta}{4\pi\varepsilon_0 R^2}=\frac{\lambda d\theta}{4\pi\varepsilon_0 R}$$

به علت تقارن میدان فقط در امتداد محور تقارن کمان است که در اینجا محور x می‌باشد.

$$dE_x=dE\cos\theta=\frac{\lambda\cos\theta\, d\theta}{4\pi\varepsilon_0 R}$$

$$E=\int dE_x=\frac{\lambda}{4\pi\varepsilon_0 R}\int_{-\varphi/2}^{\varphi/2}\cos\theta\, d\theta=\frac{\frac{Q}{R\varphi}\left(2\sin\frac{\varphi}{2}\right)}{4\pi\varepsilon_0 R}$$

$$E=\frac{Q}{2\pi\varepsilon_0 R^2}\frac{\sin\frac{\varphi}{2}}{\varphi}$$

$E_1=E_2$ برای هر دو نیم حلقه $\varphi=\pi$ می‌باشد.

$$E_{\text{total}}=E_1+E_2=2E_1=\frac{2q}{2\pi\varepsilon_0 R^2}\frac{\sin\frac{\pi}{2}}{\pi}=\frac{q}{\pi^2\varepsilon_0 R^2}\Rightarrow$$

$$E_{\text{total}}=\frac{15\times10^{-12}}{\pi^2(8/85\times10^{-12})(8/5\times10^{-2})^2}=23/77\ \text{N/C}$$

(ب) جهت میدان در خلاف جهت محور y می‌باشد.

●●۲۶- بار به طور یکنواخت به دور حلقه‌ای به شعاع $R=2/40\,\text{cm}$ توزیع شده است، و بزرگی E میدان الکتریکی ناشی از آن روی محور مرکزی حلقه (عمود بر صفحهٔ آن) اندازه‌گیری می‌شود. در چه فاصله‌ای از مرکز حلقه، E بیشینه است؟

حل:
$$E=\frac{qz}{4\pi\varepsilon_0(z^2+R^2)^{3/2}}=\frac{q}{4\pi\varepsilon_0}z(z^2+R^2)^{-3/2}$$

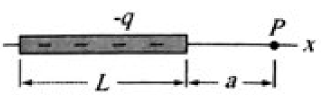
$$\frac{dE}{dz}=\frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\left[(z^2+R^2)^{-3/2}+z\left(\frac{-3}{2}\right)(2z)(z^2+R^2)^{-5/2}\right]$$

$$=\frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\times\frac{R^2+z^2-3z^2}{(z^2+R^2)^{5/2}}=0\quad\Rightarrow$$

$$R^2-2z^2=0\ \Rightarrow z=\pm\frac{R}{\sqrt{2}}=\pm=\frac{2/4}{\sqrt{2}}\pm1/7\,\text{cm}$$

●●۲۷- در شکل ۱۸-۴۶، یک میلهٔ نارسانا به طول $L=8/15\,\text{cm}$ دارای بار $-q=-4/23\,\text{fC}$ است که به طور یکنواخت در طول آن توزیع شده است. (الف) چگالی خطی بار میله چقدر است؟ (ب) بزرگی و (پ) جهت (نسبت به جهت مثبت محور x) میدان الکتریکی ایجاد شده در نقطهٔ P ، واقع در فاصلهٔ $a=12/0\,\text{cm}$ از میله، چگونه است؟ بزرگی میدان

الکتریکی ایجاد شده در فاصلهٔ $a=50\,cm$ توسط (ت) میله و (ث) ذره‌ای دارای بار $-q=-4.23\,fC$ که به جای میله قرار داده شود، چقدر است؟ SSM ILW WWW

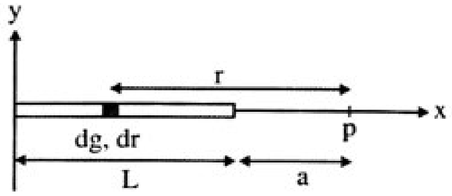


شکل ۱۸-۴۶ مسئلهٔ ۲۷

حل: (الف)

$$\lambda=\frac{q}{L}=\frac{-4.23\times10^{-15}}{8.15\times10^{-2}}=-5.19\times10^{-14}\ C/m$$

(ب)



$$dE=\frac{dq}{4\pi\varepsilon_0 r^2}=\frac{\lambda\,dr}{4\pi\varepsilon_0 r^2}$$

$$E=\frac{\lambda}{4\pi\varepsilon_0 r^2}\int_a^{a+L}\frac{dr}{r^2}=\frac{\lambda}{4\pi\varepsilon_0}\left[\frac{1}{a}-\frac{1}{L+a}\right]=\frac{\lambda}{4\pi\varepsilon_0}\frac{L}{a(L+a)}$$

$$E=(9\times10^{9})(5.19\times10^{-14})\frac{(8.15\times10^{-2})}{(0.12)(0.12+0.0815)}$$

$$=1.57\times10^{-3}\ N/C$$

(پ) جهت میدان به دلیل منفی بودن بار به طرف میله یعنی در خلاف جهت محور x می‌باشد.

(ت) $$a>>L\Rightarrow E=\frac{\lambda L}{4\pi\varepsilon_0 a^2}=\frac{q}{4\pi\varepsilon_0 a^2}$$

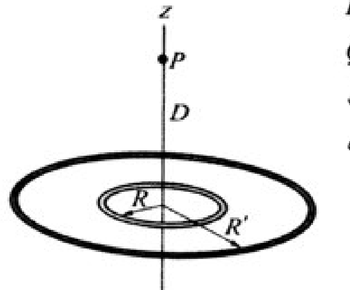
که مشابه بار نقطه‌ای است.

$$a=50\,(cm)$$

$$E=\frac{(9\times10^{9})(4.23\times10^{-15})}{(0.5)^2}=1.52\times10^{-4}\ N/C$$

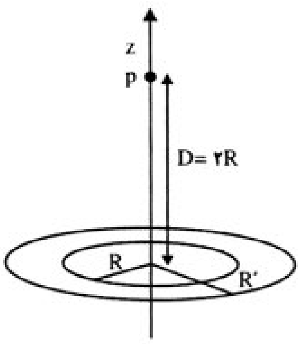
$$E=\frac{q}{4\pi\varepsilon_0 r^2}=\frac{(9\times10^{9})(4.23\times10^{-15})}{(0.5)^2}=1.52\times10^{-4}\ N/C$$

••۲۸- شکل ۱۸-۴۷، دو حلقهٔ هم‌مرکز را یکی به شعاع R و دیگری به شعاع $R'=3.00R$ نشان می‌دهد که در سطح یکسانی قرار دارند. نقطهٔ P روی محور z مرکزی و به فاصلهٔ $D=2.00R$ از مرکز حلقه واقع است. حلقهٔ کوچکتر دارای بار $+Q$ است که به طور یکنواخت توزیع شده است. اگر میدان الکتریکی خالص در نقطهٔ P برابر صفر باشد، برحسب Q چه باری به طور یکنواخت روی حلقهٔ بزرگتر توزیع شده است؟



شکل ۱۸-۴۷ مسئلهٔ ۲۸

حل:



$$R'=3R$$

$$E=\frac{qz}{4\pi\varepsilon_0(z^2+R^2)^{3/2}}$$

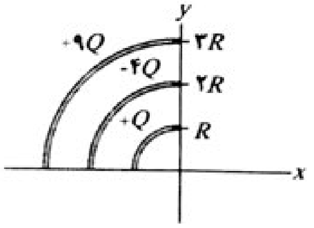
$$E=E_1+E_2=0\Rightarrow$$

$$\frac{kQz}{(z^2+R^2)^{3/2}}+\frac{kqz}{(z^2+9R^2)^{3/2}}=0\Rightarrow$$

$$\frac{Q}{(5R^2)^{3/2}}=\frac{-q}{(13R^2)^{3/2}}\Rightarrow q=-\left(\frac{13}{5}\right)^{3/2}Q$$

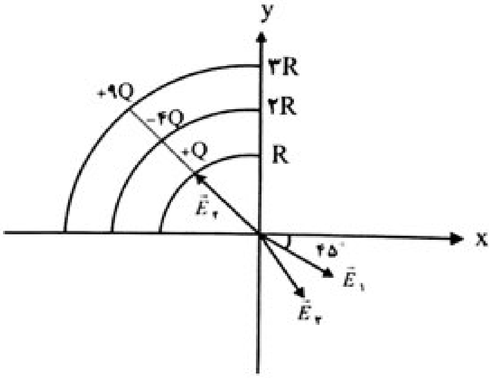
$$\Rightarrow q=-4.19Q$$

••۲۹- شکل ۱۸-۴۸، سه کمان دایره‌ای را به مرکز مبداء یک دستگاه‌مختصات نشان می‌دهد. روی هر کمان، بارهایی برحسب $Q=2.00\,\mu C$ به‌طور یکنواخت توزیع شده‌اند. شعاعها برحسب $R=10.0\,cm$ داده شده‌اند. (الف) بزرگی و (ب) جهت (نسبت به جهت مثبت x) میدان الکتریکی خالص ناشی از کمانها در مبدأ چگونه است؟



شکل ۱۸-۴۸ مسئلهٔ ۲۹

حل:



در مساله ۲۵ میدان الکتریکی را برای یک کمان بدست آورده‌بودیم.

(الف) در این مساله φ برای هر سه کمان برابر $\frac{\pi}{2}$ است.

$$E=\frac{Q}{2\pi\varepsilon_0 R^2}\,\frac{\sin\frac{\varphi}{2}}{\varphi}$$

$$E_1=\frac{Q}{2\pi\varepsilon_0 R^2}\,\frac{\sin 45}{\frac{\pi}{2}}=\frac{Q\sin 45}{\pi^2\varepsilon_0 R^2}$$

$$E_2=\frac{-4Q}{2\pi\varepsilon_0(4R^2)}\,\frac{\sin 45}{\frac{\pi}{2}}=\frac{-Q\sin 45}{\pi^2\varepsilon_0 R^2}$$

$$E_3=\frac{9Q}{2\pi\varepsilon_0(9R^2)}\,\frac{\sin 45}{\frac{\pi}{2}}=\frac{Q\sin 45}{\pi^2\varepsilon_0 R^2}$$

$$E=E_1+E_2+E_3\Rightarrow$$

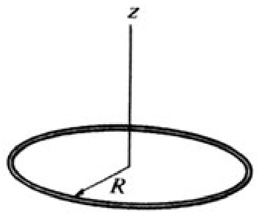
$$E_2=\frac{Q\sin 45}{\pi^2\varepsilon_0 R^2}-\frac{Q\sin 45}{\pi^2\varepsilon_0 R^2}+\frac{Q\sin 45}{\pi^2\varepsilon_0 R^2}=\frac{4Q}{4\pi\varepsilon_0}\,\frac{\sin 45}{\pi R^2}\Rightarrow$$

$$E=(9\times10^9)(4\times2\times10^{-6})\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)\left(\frac{1}{\pi\times(0/1)^2}\right)$$

$$=1/62\times10^6\ \text{N/C}$$

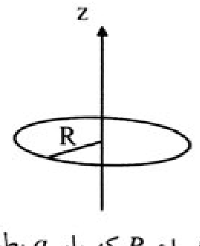
(ب) جهت میدان الکتریکی با زاویه $-45°$ نسبت به جهت مثبت محور x می‌باشد.

••۳۰- یک میلهٔ نارسانای باریک با توزیع یکنواخت بار مثبت Q به شکل دایره‌ای به شعاع R درآمده است (شکل ۱۸-۴۹). محور عمودی در مرکز حلقه محور z است که مبداء آن بر مرکز حلقه قرار دارد. بزرگی میدان الکتریکی ناشی از میله در (الف) $z=0$ و (ب) $z=\infty$ چقدر است؟ (پ) برحسب R، در چه مقدار مثبتی از z، این بزرگی بیشینه است؟ (ت) اگر $R=2/00\text{cm}$ و $Q=4/00\mu\text{C}$ باشد، آن مقدار بیشینه چقدر است؟



شکل ۱۸-۴۹ مسئلهٔ ۳۰

حل:



میدان حلقه نازکی به شعاع R که بار q بطور یکنواخت روی آن توزیع شده است از رابطه زیر بدست می‌آید.

$$E=\frac{qz}{4\pi\varepsilon_0(z^2+R^2)^{3/2}}$$

(الف) و **(ب)** میدان در $z=0$ و $z=\infty$ صفر است.

(پ)

$$E=\frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\left[z(z^2+R^2)^{-3/2}\right]\Rightarrow$$

$$\frac{dE}{dz}=\frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\left[(z^2+R^2)^{-3/2}+z\left(\frac{-3}{2}\right)(2z)(z^2+R^2)^{-5/2}\right]\Rightarrow$$

$$\frac{dE}{dz}=\frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{z^2+R^2-3z^2}{(z^2+R^2)^{5/2}}\right)=0\Rightarrow$$

$$R^2-2z^2=0\Rightarrow z=\pm\frac{R}{\sqrt{2}}=\frac{2}{\sqrt{2}}=1/41(\text{cm})$$

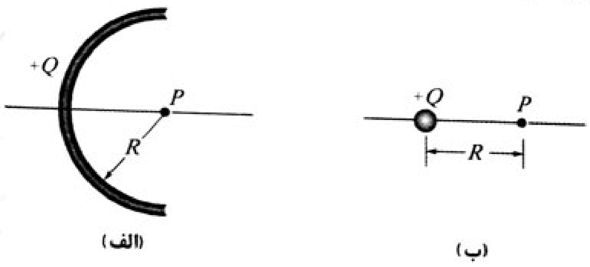
(ت)

$$E=\frac{qz}{4\pi\varepsilon_0(z^2+R^2)^{3/2}}\Rightarrow$$

$$E=(9\times10^9)\frac{4\times10^{-6}\times(1/41\times10^{-2})}{\left[(1/41\times10^{-2})^2+(0/02)^2\right]^{3/2}}$$

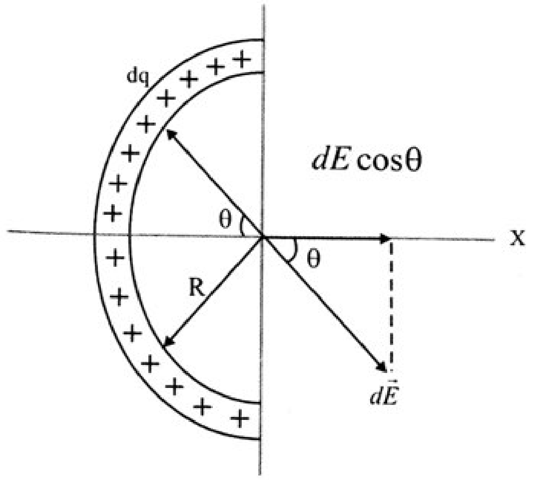
$$=3/46\times10^7\ \text{N/C}$$

••۳۱- شکل ۱۸-۵۰ الف، میلهٔ نارسانایی را نشان می‌دهد که روی آن بار $+Q$ به طور یکنواخت توزیع شده است. میله به شکل یک نیمدایره به شعاع R درآمده است و میدانی الکتریکی به بزرگی $E_{\text{کمان}}$ را در مرکز خمیدگی P ایجاد می‌کند. اگر این کمان به نقطه‌ای در فاصلهٔ R از P فشرده شود (شکل ۱۸-۵۰ ب)، بزرگی میدان الکتریکی در نقطهٔ P در چه عاملی باید ضرب شود؟



شکل ۱۸-۵۰ مسئلهٔ ۳۱

حل:



$$dE=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\,\frac{d\theta}{R^2}-E=\int dE$$

$$E_{کمان} = Ex = \int \cos\theta \, dE$$

$$\lambda = Q/L \quad L = R\theta \rightarrow Q = \lambda R\theta \rightarrow dQ = \lambda R d\theta$$

$$E_{کمان} = \int_{-\pi/۲}^{\pi/۲} \frac{۱}{۴\pi\varepsilon_۰} \frac{\lambda R}{R^۲} \cos\theta \, d\theta$$

$$= \frac{\lambda}{۴\pi\varepsilon_۰ R} \int_{-\pi/۲}^{\pi/۲} \cos\theta \, d\theta = \frac{\lambda}{۲\pi\varepsilon_۰ R}$$

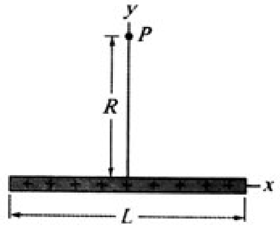
داریم: $\lambda = Q/L = Q/R\pi$: داریم

$$E_{کمان} = \frac{Q/R\pi}{۲\pi\varepsilon_۰ R} = \frac{Q}{۲\pi^۲\varepsilon_۰ R^۲}$$

$$E_{ذره} = \frac{Q}{۴\pi\varepsilon_۰ R^۲}$$

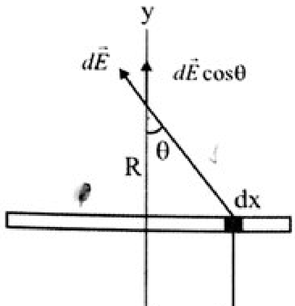
$$\frac{E_{ذره}}{E_{کمان}} = \frac{Q/۴\pi\varepsilon_۰ R^۲}{Q/۲\pi^۲\varepsilon_۰ R^۲} = \frac{\pi}{۲}$$

۳۲●●●- در شکل ۱۸-۵۱، بار مثبت $q=۷/۸۱\,\text{pC}$ روی میلهٔ نارسانای باریکی به طول $L=۱۴/۵\,\text{cm}$ به طور یکنواخت توزیع شده است. (الف) بزرگی و (ب) جهت (نسبت به جهت مثبت محور x) میدان الکتریکی ایجاد شده در نقطهٔ P، به فاصلهٔ $R=۶/۰۰\,\text{cm}$ از میله و در امتداد عمود منصف آن، چگونه است؟ GO



شکل ۱۸-۵۱ مسئلهٔ ۳۲

حل:



$$E = \int dy_E = \int_{-L/۲}^{L/۲} dE\cos\theta = ۲\int_۰^{L/۲} dE\cos\theta$$

$$= \frac{۲}{۴\pi\varepsilon_۰} \int_۰^{L/۲} \frac{\lambda dx}{R^۲+x^۲} \frac{R}{\sqrt{R^۲+x^۲}}$$

$$= \frac{۲\lambda R}{۴\pi\varepsilon_۰} \int_۰^{L/۲} \frac{dx}{(R^۲+x^۲)^{۳/۲}}$$

از تغییر متغییر زیر استفاده می‌کنیم:

$$x = R\tan\theta \text{ و } dx = R\sec^۲\theta \, d\theta$$

$$x^۲ + R^۲ = R^۲(۱+\tan^۲\theta) = R^۲\sec^۲\theta$$

داریم:

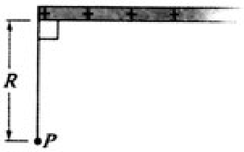
$$E = \frac{۲\lambda R}{۴\pi\varepsilon_۰} \int \frac{R\sec^۲\theta}{R^۳\sec^۳\theta} d\theta = \frac{۲\lambda}{۴\pi\varepsilon_۰ R} \int \cos\theta \, d\theta$$

$$= \frac{۲\lambda}{۴\pi\varepsilon_۰ R} \sin\theta = \frac{۲\lambda}{۴\pi\varepsilon_۰ R} \frac{x}{\sqrt{R^۲+x^۲}} \Bigg|_۰^{L/۲}$$

$$= \frac{۲\lambda}{۴\pi\varepsilon_۰ R} \frac{L/۲}{\sqrt{R^۲+L^۲/۴}}$$

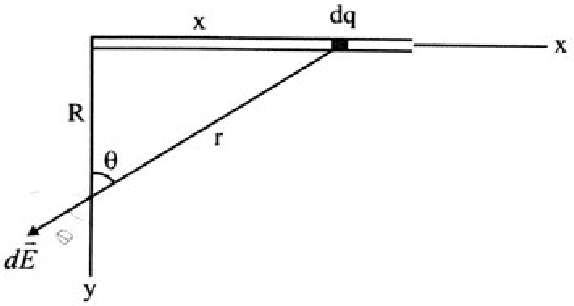
$$= \frac{q}{۲\pi\varepsilon_۰ R} \frac{۱}{\sqrt{۴R^۲+L^۲}} = ۱۲/۴\,\text{N/C}$$

۳۳●●●- در شکل ۱۸-۵۲، یک میلهٔ نارسانای «نیم- نامتناهی» (یعنی، فقط از یک طرف نامتناهی است) دارای چگالی خطی بار λ است. نشان دهید که میدان الکتریکی $\vec{E}_p$ در نقطهٔ P با میله زاویهٔ ۴۵° می‌سازد و این نتیجه مستقل از فاصلهٔ R است. (*راهنمایی*: جداگانه مؤلفهٔ $\vec{E}_p$ موازی با میله و مؤلفهٔ عمود بر میله را بیابید.)



شکل ۱۸-۵۲ مسئلهٔ ۳۳

حل:



عنصر بار $dq = \lambda dx$ به فاصله r از P است و بزرگی میدان در نقطه P از رابطه زیر بدست می‌آید:

$$dE = \frac{۱}{۴\pi\varepsilon_۰} \frac{\lambda dx}{r^۲}$$

که مولفه‌های x و y آن به ترتیب برابر $dEx = dE\sin\theta$ به سمت چپ و $dEy = dE\cos\theta$ رو به پایین است.

$$Ex = \frac{۱}{۴\pi\varepsilon_۰} \int_۰^\infty \frac{\lambda dx}{R^۲+x^۲} \frac{x}{\sqrt{R^۲+x^۲}}$$

$$= \frac{\lambda}{۴\pi\varepsilon_۰} \int_۰^\infty \frac{x\,dx}{(R^۲+x^۲)^{۳/۲}} = \frac{-\lambda}{۴\pi\varepsilon_۰} \frac{۱}{\sqrt{R^۲+x^۲}} \Bigg|_۰^\infty$$

$$= \frac{\lambda}{۴\pi\varepsilon_۰ R}$$

$$E_y = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int_0^\infty \frac{\lambda\, dx}{R^2+x^2}\,\frac{R}{\sqrt{R^2+x^2}}$$
$$= \frac{\lambda R}{4\pi\varepsilon_0}\int_0^\infty \frac{dx}{(R^2+x^2)^{3/2}}$$

با تغییر متغیر $x = R\tan\theta$ داریم $R^2+x^2 = R^2\sec^2\theta$ و $dx = R\sec^2\theta\, d\theta$.

$$E_y = \frac{\lambda R}{4\pi\varepsilon_0}\int_0^{\pi/2} \frac{R\sec^2\theta}{R^3\sec^3\theta}\, d\theta = \frac{\lambda}{4\pi\varepsilon_0 R}\int_0^{\pi/2}\cos\theta\, d\theta$$
$$= \frac{\lambda}{4\pi\varepsilon_0 R}\sin\theta \Big|_0^{\pi/2} = \frac{\lambda}{4\pi\varepsilon_0 R}$$

با توجه به اینکه مولفه‌های افقی و قائم میدان بی‌توجه به مقدار R همواره با هم برابرند. نتیجه می‌گیریم که $\vec{E}$ برای تمامی مقادیر R با میله زاویه ۴۵° می‌سازد.

بخش ۱۸-۷ میدان الکتریکی ناشی از یک قرص باردار

●۳۴- قرصی به شعاع ۲/۵cm دارای چگالی سطحی بار $5/3\mu C/m^2$ روی وجه بالایی خود است. بزرگی میدان الکتریکی ایجاد شده توسط قرص در نقطه‌ای روی محور مرکزی و به فاصلهٔ $z=12cm$ از آن، چگونه است؟

حل: میدان الکتریکی قرص باردار به شعاع R با چگالی سطحی σ از رابطه زیر بدست می‌آید.

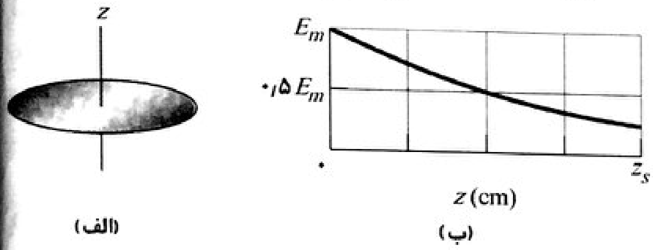
$$E = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0}\left(1-\frac{Z}{\sqrt{Z^2+R^2}}\right)$$
$$= \frac{5/3\times10^{-6}\ C/m^2}{2\times 8/85\times10^{-12}\ C^2/N\cdot m^2}\left[1-\frac{12\cos}{\sqrt{(12\,cm)^2+(2/5\,cm)^2}}\right]$$
$$= 6/3\times10^{3}\ N/C$$

●۳۵- در چه فاصله‌ای روی محور عمود در مرکز یک قرص پلاستیکی باردار یکنواخت به شعاع ۰/۶۰۰m ، بزرگی میدان الکتریکی برابر با نصف بزرگی این میدان در مرکز سطح قرص است؟ SSM WWW

حل: از مساله قبل می‌دانیم که میدان در مرکز قرص با صفر قرار دادن Z در رابطه $E = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0}\left(1-\frac{Z}{\sqrt{Z^2+R^2}}\right)$ و برابر با $E_0 = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0}$ بدست می‌آید.

$$\frac{E}{E_0} = \frac{1}{2} \rightarrow \frac{\sigma}{2\varepsilon_0}\left(1-\frac{Z}{Z^2+R^2}\right) = \frac{1}{2}\,\frac{\sigma}{2\varepsilon_0} \rightarrow$$
$$\frac{Z}{\sqrt{Z^2+R^2}} = \frac{1}{2} \rightarrow Z^2 = \frac{1}{4}(Z^2+R^2) \rightarrow Z = R/\sqrt{3} \rightarrow$$
$$Z = 0/346m$$

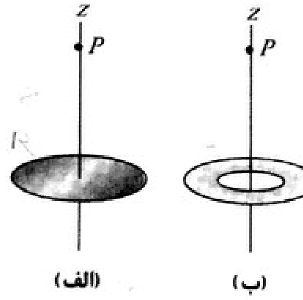
●●۳۶- شکل ۱۸-۵۳ الف، قرصی دایره‌ای با بار یکنواخت را نشان می‌دهد. مبداء محور مرکزی z که عمود بر صفحهٔ قرص است، روی آن قرار دارد. شکل ۱۸-۵۳ ب، بزرگی میدان الکتریکی را روی آن محور برحسب بزرگی بیشینهٔ E_m روی سطح قرص نشان می‌دهد. مقیاس محور z با $z_s = 8/0cm$ مشخص شده است؟ شعاع قرص چقدر است؟



شکل ۱۸-۵۳ مسئلهٔ ۳۶

حل: از مسائل قبل داریم $\frac{E}{E_m} = 1-\frac{Z}{\sqrt{Z^2+R^2}}$ با توجه به شکل مسأله مقدار E در $Z = 4\,cm$ برابر با $\frac{1}{2}E_m$ است، پس با توجه به مسأله قبل داریم: $R = Z\sqrt{Z} = 6/9$

●●●۳۷- فرض کنید شما قرار است وسیله‌ای را طراحی کنید که در آن یک قرص باردار یکنواخت به شعاع R، میدانی الکتریکی ایجاد کند. بزرگی این میدان در امتداد محور عمود در مرکز، در نقطهٔ P به فاصلهٔ $2/00R$ از قرص (شکل ۱۸-۵۴ الف) بیشترین اهمیت را دارد. برآورد هزینه‌ها شما را بر آن می‌دارد که قرص را با حلقه‌ای با همان شعاع خارجی R ولی با شعاع داخلی $R/2/00$ (شکل ۱۸-۵۴ ب) جایگزین کنید. فرض کنید حلقه همان چگالی سطحی بار قرص اولیه را دارد. با این حلقه، بزرگی میدان الکتریکی در نقطهٔ P با چه درصدی کاهش می‌یابد؟



شکل ۱۸-۵۴ مسئلهٔ ۳۷

حل: با توجه به شکل مسأله درمی‌یابیم که میدان در شکل ب به اندازه میدان یک قرص دایره‌ای با شعاع $R/2$ از میدان در شکل الف کوچکتر است. یعنی

$$E_b = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0}\left(1-\frac{2R}{\sqrt{(2R)^2+R^2}}\right)-\frac{\sigma}{2\varepsilon_0}\left(1-\frac{2R}{\sqrt{(2R)^2+\left(\frac{R}{2}\right)^2}}\right)$$

که جمله اول سمت راست برابر با E_a می‌باشد.

$$\frac{E_a - E_b}{E_a} = \frac{1-\frac{۲}{\sqrt{۴+\frac{۱}{۴}}}}{1-\frac{۲}{\sqrt{۴+۱}}} = ۰/۲۸۳ = ۲۸/۳\%$$

••۳۸- یک قرص پلاستیکی دایره‌ای به شعاع $R=۲/۰۰\text{cm}$ دارای بار $Q=+(۲/۰۰\times ۱۰^{۶})e$ است که به طور یکنواخت روی یک سطح آن توزیع شده است. حلقه‌ای دایره‌ای به پهنای $۳۰\mu m$ هم‌مرکز با قرص و با شعاع $r=۰/۵۰\text{cm}$ روی آن سطح قرار گرفته است. برحسب کولن، چه باری در پهنای حلقه قرار دارد؟

حل:

$$\left.\begin{array}{l} dq = \sigma\, ds \\ S = \pi r^{۲} \to ds = ۲\pi r\, dr \end{array}\right\} \Rightarrow$$

$$dq = \left(\frac{Q}{\pi R^{۲}}\right)۲\pi r\, dr$$

با قرار دادن $r = ۵\times ۱۰^{-۳}\ \text{m}$ و $dr = ۳۰\times ۱۰^{-۶}\ \text{m}$ داریم:

$$dq = ۲/۴\times ۱۰^{-۱۶}\ C$$

بخش ۱۸-۸ بار نقطه‌ای در میدان الکتریکی

•۳۹- الکترونی از حالت سکون در یک میدان الکتریکی یکنواخت به بزرگی $۲/۰۰\times ۱۰^{۴}\ \text{N/C}$ رها می‌شود. شتاب الکترون را محاسبه کنید. (گرانش را نادیده بگیرید.) **SSM**

حل:

$$a = \frac{F}{m} = \frac{eE}{me} = \frac{(۱/۶\times ۱۰^{-۱۹}\ C)(۲/۰۰\times ۱۰^{۴}\ \text{N/C})}{۹/۱۱\times ۱۰^{-۳۱}}$$

$$= ۳/۵۱\times ۱۰^{۱۵}\ \text{m/s}^{۲}$$

•۴۰- الکترونی توسط یک میدان الکتریکی رو به شرق، شتاب $۱/۸۰\times ۱۰^{۹}\text{m/s}^{۲}$ می‌گیرد. (الف) بزرگی و (ب) جهت میدان الکتریکی را تعیین کنید.

حل: (الف)

$$E = \frac{F}{q} = \frac{ma}{m_e} = \frac{(۹/۱۱\times ۱۰^{-۳۱}\ \text{kg})(۱/۸\times ۱۰^{۹}\ \text{m/s}^{۲})}{۱/۶\times ۱۰^{-۱۹}}$$

$$= ۰/۰۱۰۲\ \text{N/C}$$

(ب) جهت میدان به سمت غرب می‌باشد.

•۴۱- الکترونی روی محور یک دوقطبی الکتریکی در فاصلهٔ ۲۵nm از مرکز دوقطبی قرار دارد. در صورتی که گشتاور دو قطبی $۳/۶\times ۱۰^{-۲۹}\ \text{C.m}$ باشد، بزرگی نیروی الکترواستاتیکی وارد بر الکترون چقدر است؟ فرض کنید که ۲۵nm از فاصلهٔ بارهای دوقطبی خیلی بیشتر است.

حل: میدان دوقطبی الکتریکی در نقطه‌ای به فاصله z از محور آن با فرض $z >> d$ از رابطه زیر بدست می‌آید.

$$E = \frac{۱}{۲\pi\varepsilon_{\circ}}\frac{p}{z^{۳}} = \frac{۲}{۴\pi\varepsilon_{\circ}}\frac{p}{z^{۳}} = (۲)(۹\times ۱۰^{۹})\frac{۳/۶\times ۱۰^{-۲۹}}{(۲۵\times ۱۰^{-۹})^{۳}} \Rightarrow$$

$$E = ۴/۱۴۷\times ۱۰^{۴}\ \text{N/C}$$

$$F = qE = eE = (۱/۶\times ۱۰^{-۱۹})(۴/۱۴۷\times ۱۰^{۴})$$

$$= ۶/۶۳۵\times ۱۰^{-۱۵}\ \text{N}$$

•۴۲- ذرهٔ آلفا (هستهٔ اتم هلیوم) دارای جرمی برابر با $۶/۶۴\times ۱۰^{-۲۷}\text{kg}$ و بار $+۲e$ است. (الف) بزرگی و (ب) جهت میدان الکتریکی که با نیروی گرانشی وارد بر ذره موازنه کند، چیست؟

حل: (الف)

$$qE = mg \Rightarrow E = \frac{mg}{۲e} = \frac{(۶/۶۴\times ۱۰^{-۲۷})(۹/۸)}{(۲)(۱/۶\times ۱۰^{-۱۹})} \Rightarrow$$

$$E = ۲/۰۳\times ۱۰^{-۷}\ \text{N/C}$$

(ب) چون ذره α بار مثبت دارد میدان الکتریکی باید قائم روبه بالا باشد تا بتواند اثر نیروی وزن را خنثی کند.

•۴۳- یک سامانهٔ ابر باردار در هوای نزدیک سطح زمین، میدان الکتریکی ایجاد می‌کند. وقتی ذره‌ای دارای بار $-۲/۰\times ۱۰^{-۹}\ \text{C}$ در این میدان قرار گیرد، نیروی الکترواستاتیکی رو به پایینی به بزرگی $۳/۰\times ۱۰^{-۶}\ \text{N}$ برآن وارد می‌شود. (الف) بزرگی میدان الکتریکی چقدر است؟ (ب) بزرگی و (پ) جهت نیروی الکترواستاتیکی $\vec{F}_{el}$ وارد بر پروتونی که در این میدان قرار گیرد، چگونه است؟ (ت) بزرگی نیروی گرانشی $\vec{F}_g$ وارد بر پروتون چقدر است؟ (ث) نسبت F_{el}/F_g در این حالت چیست؟ **SSM**

حل: (الف) $F = qE \Rightarrow E = \dfrac{F}{q} = \dfrac{۳\times ۱۰^{-۶}}{۲\times ۱۰^{-۹}} = ۱۵۰۰\ \text{N/C}$

چون بار ذره منفی است و نیرو رو به پایین به آن وارد می‌شود میدان به سمت بالاست.

(ب) $F_{el} = qE = (۱/۶\times ۱۰^{-۱۹})(۱۵۰۰) = ۲/۴\times ۱۰^{-۱۶}\ \text{N}$

(پ) چون بار پروتون مثبت و میدان به سمت بالاست نیروی وارد بر آن نیز به سمت بالاست.

(ت) $F_g = mg = (۱/۶۷\times ۱۰^{-۲۷})(۹/۸) = ۱/۶۴\times ۱۰^{-۲۶}\ \text{N}$

(ث) $\dfrac{F_{el}}{F_g} = \dfrac{۲/۴\times ۱۰^{-۱۶}}{۱/۶۷\times ۱۰^{-۲۶}} = ۱/۴۶\times ۱۰^{+۱۰}$

•۴۴- هوای مرطوب در میدان الکتریکی $۳/۰\times ۱۰^{۶}\text{N/C}$ دچار فروریزش الکتریکی می‌شود (مولکولهایش یونیده می‌شوند.) در این میدان، بزرگی نیروی الکتروستاتیکی وارد بر (الف) الکترون و (ب) یونی با کمبود یک الکترون، چقدر است؟

حل: (الف)

$$F = qE = (۱/۶\times ۱۰^{-۱۹})(۳\times ۱۰^{۶}) = ۴/۸\times ۱۰^{-۱۳}\ \text{N}$$

(ب) برابر با همان نیروی بالاست چون این نیرو به جرم بستگی ندارد بلکه به مقدار بار بستگی دارد و این یون هم یک بار $+e$ دارد.

•۴۵- باریکه‌هایی از پروتونهای پرسرعت را می‌توان در«تفنگها» با استفاده از میدانهای الکتریکی که پروتونی را شتاب می‌دهند، ایجادکرد.(الف)اگر میدان الکتریکی تفنگ برابر 2.00×10^{4} N/C باشد، شتابی که یک پروتون خواهد داشت چقدر است؟ (ب) اگر این میدان، به پروتون در مسافت ۱/۰۰cm شتاب دهد، تندی حاصل در پروتون چقدر خواهد بود؟ **SSM**

حل: (الف)

$$F = eE = ma \Rightarrow a = \frac{eE}{m} = \frac{(1.6\times10^{-19})(2\times10^{4})}{(1.67\times10^{-27})} \Rightarrow$$

$$a = 1.92\times10^{12}\ \text{m/s}^2$$

(ب) $$V^2 - V_\circ^2 = 2ax \Rightarrow V^2 - 0 = (2)(1.92\times10^{12})(0.01) \Rightarrow$$

$$V^2 = 3.84\times10^{10} \Rightarrow V = 1.96\times10^{5}\ \text{m/s}$$

•۴۶-الکترونی با تندی 5.00×10^{8} cm/s وارد میدانی الکتریکی به بزرگی 1.00×10^{3} N/C می‌شود و در طول خط میدان در جهتی پیش می‌رود که حرکتش را کند می‌کند. (الف) این الکترون پیش از توقف لحظه‌ای چه مسافتی را می‌پیماید؟ و (ب) زمان سپری شده چقدر است؟ (پ) اگر طول ناحیه‌ای که میدان الکتریکی را در بردارد برابر ۸/۰۰mm باشد (که برای توقف الکترون در داخل آن بسیار کوچک است)، چه کسری از انرژی جنبشی اولیهٔ الکترون در این ناحیه از دست می‌رود؟ GO

حل: (الف) $$W = Fx = (eE)x = K \quad , \quad K = \frac{1}{2}mV_\circ^2 \Rightarrow$$

$$eE_x = \frac{1}{2}mv_\circ^2 = x = \frac{mv_\circ^2}{2eE} = \frac{(9.1\times10^{-31})(5\times10^{6})^2}{(2)(1.6\times10^{-19})(1\times10^{3})} \Rightarrow$$

$$x = 0.0711\ \text{m}$$

(ب) $$x = \frac{v+v_\circ}{2}t \Rightarrow t = \frac{2x}{v+v_\circ} = \frac{(2)(0.0711)}{5\times10^{6}+0}$$

$$= 2.84\times10^{-8}\ \text{s}$$

(پ) $$(eE)x = \Delta K \Rightarrow \Delta K = (1.6\times10^{-19})(1\times10^{3})(8\times10^{-3})$$

$$= 1.28\times10^{-18}\ \text{J}$$

$$\frac{\Delta K}{K_\circ}\times100 = \frac{1.28\times10^{-18}}{\left(\frac{1}{2}\right)(9.1\times10^{-31})(5\times10^{6})^2}\times100 = 11.25\%$$

•۴۷- در آزمایش میلیکان، وقتی میدان الکتریکی رو به پایین واردبر قطرهٔ روغنی به‌شعاع 1.64μm و چگالی ۰/۸۵۱ g/cm³ برابر با 1.92×10^{5} N/C باشد، قطره در اتاقک C معلق می‌ماند (شکل ۱۸-۱۴). بار روی قطره را برحسب e بیابید.

حل: $$F = qE = mg = \rho Vg = \rho\left(\frac{4}{3}\pi R^3\right)g \Rightarrow$$

$$qE = \rho\left(\frac{4}{3}\pi R^3\right)g \Rightarrow q = \frac{\frac{4}{3}\pi R^3 g\rho}{E} \Rightarrow$$

$$q = \frac{\left(\frac{4}{3}\right)(\pi)(1.64\times10^{-6})^3(9.8)(851)}{1.92\times10^{5}} = 8.02\times10^{-19}\ \text{C}$$

$$q = 5e$$

••۴۸- در لحظهٔ معینی، مؤلفه‌های سرعت یک الکترون در حال حرکت میان دو صفحهٔ باردار عبارت‌اند از $v_x = 1.5\times10^{5}$ m/s و $v_y = 3.0\times10^{3}$ m/s. فرض کنید که میدان الکتریکی میان صفحه‌ها با $\vec{E} = (120\ \text{N/C})\hat{j}$ داده شود. برحسب نمادگذاری بردارهای یکه (الف) شتاب الکترون در میدان و (ب) سرعت الکترون،وقتی مختصهٔ x آن به اندازهٔ ۲/۰cm تغییر کند، چیست؟

حل: (الف)

$$F = ma = qE \Rightarrow a = \frac{qE}{m} = \frac{(1.6\times10^{-19})(120)}{(9.1\times10^{-31})} \Rightarrow$$

$$a = 2.11\times10^{13}\ \text{m/s}$$

چون بار الکترون منفی است نیروی وارد بر آن و در نتیجه شتاب آن در خلاف جهت میدان E است.

$$a = -2.11\times10^{13}\ \hat{j}$$

(ب) در امتداد محور x بر الکترون نیرویی وارد نمی‌شود، بنابراین مولفه سرعت در راستای محور x ثابت است.

$$x = v_{x_\circ}t \Rightarrow t = \frac{x}{v_{x_\circ}} = \frac{0.02}{1.5\times10^{5}} = 1.33\times10^{-7}\ \text{s}$$

$$v_y = at + v_{y_\circ}$$

$$\Rightarrow v_y = (-2.11\times10^{13})(1.33\times10^{-7}) + (3\times10^{3})$$

$$v_y = -2.8\times10^{6}\ \text{m/s} \Rightarrow \vec{v} = 1.5\times10^{5}\ \hat{i} - 2.8\times10^{6}\ \hat{j}$$

$$v = \sqrt{v_x^2 + v_y^2} = \sqrt{(1.5\times10^{5})^2 + (-2.8\times10^{6})^2}$$

$$= 2.8\times10^{6}\ \text{m/s}$$

••۴۹- در ناحیه‌ای میان دو صفحهٔ باردار با علامت مخالف، یک میدان الکتریکی یکنواخت برقرار است. الکترونی از حالت سکون از سطح صفحهٔ باردار منفی رها می‌شود و با سطح صفحهٔ مقابل که به فاصلهٔ ۲/۰cm از آن است پس از مدت زمان 1.5×10^{-8} s برخورد می‌کند. (الف) تندی الکترون هنگام برخورد با صفحهٔ دوم چقدر است؟ (ب) بزرگی میدان الکتریکی $\vec{E}$ چیست؟ **ILW**

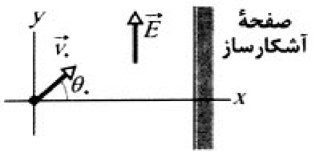
حل: (الف)

$$x = \frac{1}{2}at^2 \Rightarrow a = \frac{2x}{t^2} = \frac{(2)(0.02)}{(1.5\times10^{-8})^2} = 1.78\times10^{14}\ \text{m/s}^2$$

$$v = at + v_0 \Rightarrow v = (۱/۷۸\times۱۰^{۱۴})(۱/۵\times۱۰^{-۸}) + ۰$$
$$= ۲/۶۷\times۱۰^{۶}\ \text{m/s}$$

ب) $$F = ma = qE \Rightarrow E = \frac{ma}{q} = \frac{(۹/۱\times۱۰^{-۳۱})(۱/۷۸\times۱۰^{۱۴})}{(۱/۶\times۱۰^{-۱۹})}$$
$$= ۱/۰۱\times۱۰^{۳}\ \text{N/C}$$

••۵۰-در شکل ۱۸-۵۵، الکترونی با تندی اولیهٔ $v_0 = ۲/۰۰\times۱۰^{۶}$ m/s، در زاویهٔ $\theta_0 = ۴۰/۰^\circ$ نسبت به محور x شلیک می‌شود و در میدان الکتریکی یکنواخت $\vec{E} = (۵/۰۰\ \text{N/C})\hat{j}$ حرکت می‌کند. صفحه‌ای برای آشکار ساختن الکترونها، موازی محور y در فاصلهٔ $x = ۳/۰۰$m قرار داده شده است. وقتی الکترون به این صفحه برخورد کند، سرعت آن برحسب نمادگذاری بردار یکه چیست؟



شکل ۱۸-۵۵ مسئلهٔ ۵۰

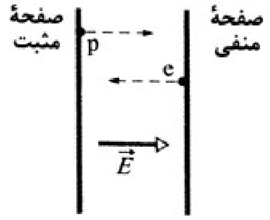
حل: نیرو در راستای محور y به الکترون وارد می‌شود. بنابراین مولفه سرعت در امتداد محور x ثابت می‌ماند.

$$v_x = v_{x_0} = V_0 \cos\theta_0 = (۲\times۱۰^{۶})(\cos ۴۰) = ۱/۵۳\times۱۰^{۶}\ \text{m/s}$$
$$v_{y_0} = v_0 \sin\theta_0 = (۲\times۱۰^{۶})(\sin ۴۰) = ۱/۲۹\times۱۰^{۶}\ \text{m/s}$$
$$x = v_{x_0} t \Rightarrow t = \frac{x}{V_{x_0}} = \frac{۳}{(۱/۵۳\times۱۰^{۶})} = ۱/۹۶\times۱۰^{-۶}\ \text{s}$$
$$ma = qE$$
$$v_y = a_y t + v_{y_0} = \frac{-qE}{m}t + v_{y_0} \Rightarrow$$

جهت نیروی وارد بر الکترون در خلاف جهت محور y است.

$$v_y = -\frac{(۱/۶\times۱۰^{-۱۹})(۵)(۱/۹۶\times۱۰^{-۶})}{(۹/۱\times۱۰^{-۳۱})} + (۱/۲۹\times۱۰^{۶})$$
$$= -۴/۳۳\times۱۰^{۵}\ \text{m/s}$$
$$\vec{v} = (۱/۵۳\times۱۰^{۶}\ \hat{i} - ۴/۳۳\times۱۰^{۵}\ \hat{j})\ \text{m/s}$$

••۵۱- میان دو صفحهٔ مسی موازی بزرگ که به فاصلهٔ ۵/۰cm از هم قراردارند، میدان الکتریکی یکنواختی، به ترتیبی که در شکل ۱۸-۵۶ نشان داده شده، برقرار است. الکترونی، درست در همان لحظه‌ای که یک پروتون از صفحهٔ مثبت رها می‌شود، از صفحهٔ منفی رها می‌گردد. با چشمپوشی از نیرویی که دو ذره بر یکدیگر وارد می‌کنند، فاصلهٔ آنها را از صفحهٔ مثبت، وقتی از کنار هم می‌گذرند، بیابید. (آیا از اینکه برای حل این مسئله نیازی به دانستن میدان الکتریکی ندارید، شگفت زده می‌شوید؟) GO

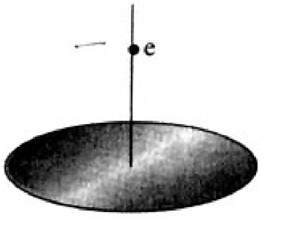


شکل ۱۸-۵۶ مسئلهٔ ۵۱

حل: فرض می‌کنیم نقطه A جایی باشد که الکترون و پروتون به هم می‌رسند.

$$F_p = F_e = qE = eE$$
$$F = ma \Rightarrow a_p = \frac{F_p}{m_p} = \frac{eE}{m_p}\ ,\quad a_e = \frac{F_e}{m_e} = \frac{eE}{m_e}$$
$$x_p = \frac{۱}{۲}a_p t^{۲}\ ,\quad x_e = \frac{۱}{۲}a_e t^{۲} \Rightarrow$$
$$\frac{x_p}{x_e} = \frac{a_p}{a_e} \Rightarrow \frac{x_p}{۰/۰۵ - x_p} = \frac{\frac{eE}{m_p}}{\frac{eE}{m_e}} = \frac{m_e}{m_p} = \frac{۹/۱\times۱۰^{-۳۱}}{۱/۶۷\times۱۰^{-۲۷}} \Rightarrow$$
$$(۱/۶۷\times۱۰^{-۲۷})x_p = (۰/۰۵)(۹/۱\times۱۰^{-۳۱}) - (۹/۱\times۱۰^{-۳۱})x_p \Rightarrow$$
$$x_p = x_A = ۲/۷۲\times۱۰^{-۵}\ \text{m}$$

•••۵۲- در شکل ۱۸-۵۷، الکترونی (e) از حالت سکون روی محور مرکزی قرص باردار یکنواختی به شعاع R رها می‌شود. چگالی سطحی بار روی قرص برابر $+۴/۰۰\ \mu\text{C/m}^{۲}$ است. بزرگی شتاب اولیهٔ الکترون در صورتی که از فاصلهٔ (الف) R، (ب) $R/۱۰۰$، و (پ) $R/۱۰۰۰$ از مرکز قرص رها شود، چقدر است؟ (ت) چرا هنگامی که نقطهٔ رهاشدن را به قرص نزدیکتر می‌کنیم، بزرگی شتاب فقط اندکی افزایش می‌یابد؟



شکل ۱۸-۵۷ مسئلهٔ ۵۲

حل: میدان یک قرص به شعاع R که بار q روی سطح آن بطور یکنواخت توزیع شده است از رابطه زیر بدست می‌آید:

$$E = \frac{\sigma}{۲\varepsilon_0}\left[۱ - \frac{z}{\sqrt{z^{۲} + R^{۲}}}\right]$$
$$ma = qE \Rightarrow a = \frac{eE}{m} = \frac{e}{m}\times\frac{\sigma}{۲\varepsilon_0}\left[۱ - \frac{z}{\sqrt{z^{۲} + R^{۲}}}\right] \Rightarrow$$
$$a = \frac{(۱/۶\times۱۰^{-۱۹})(۴\times۱۰^{-۶})}{(۲)(۹/۱\times۱۰^{-۳۱})(۸/۸۵\times۱۰^{-۱۲})}\times\left[۱ - \frac{z}{\sqrt{z^{۲} + R^{۲}}}\right] \Rightarrow$$

$$a=۳/۹۷\times۱۰^{۱۶}\left[۱-\frac{z}{\sqrt{z^{۲}+R^{۲}}}\right]$$

(الف) $z=R\Rightarrow a=(۳/۹۷\times۱۰^{۱۶})\left[۱-\frac{z}{\sqrt{R^{۲}+R^{۲}}}\right]$

$$=(۳/۹۷\times۱۰^{۱۶})\left[۱-\frac{۱}{\sqrt{۲}}\right]\Rightarrow a=۱/۱۶\times۱۰^{۱۶}\ m/s^{۲}$$

(ب) $z=\frac{R}{۱۰۰}\Rightarrow a=(۳/۹۷\times۱۰^{۱۶})\left[۱-\frac{\frac{R}{۱۰۰}}{\sqrt{(۰/۰۱R)^{۲}+R^{۲}}}\right]$

$$\Rightarrow a=(۳/۹۷\times۱۰^{۱۶})\left(۱-\frac{۰/۰۱}{\sqrt{۱/۰۰۰۱}}\right)=۳/۹۳\times۱۰^{۱۶}\ m/s^{۲}$$

(پ) $z=\frac{R}{۱۰۰۰}\Rightarrow a=(۳/۹۷\times۱۰^{۱۶})\left[۱-\frac{۰/۰۰۱R}{\sqrt{(۰/۰۰۱R)^{۲}+R^{۲}}}\right]$

$$\Rightarrow a=(۳/۹۷\times۱۰^{۱۶})\left(۱-\frac{۰/۰۰۱}{\sqrt{۱/۰۰۰۰۰۱}}\right)=۳/۹۷\times۱۰^{۱۶}\ m/s^{۲}$$

(ت) با کوچک شدن z شتاب فقط اندکی افزایش می‌یابد چون جمله منفی داخل کروشه فقط کمی کوچکتر می‌شود.

●●۵۳ – قطعه‌ای به جرم ۱۰/۰g و بار $+۸/۰۰\times۱۰^{-۵}C$ در میدان الکتریکی $\vec{E}=(۳۰۰۰\hat{i}-۶۰۰\hat{j})$ N/C قرار گرفته است. (الف) بزرگی و (ب) جهت (نسبت به جهت مثبت محور x) نیروی الکتروستاتیکی وارد بر قطعه چیست؟ اگر قطعه از حالت سکون در مبدأ و در زمان $t=۰$ رها شود، مؤلفه‌های (پ) x و (ت) y آن در $t=۳/۰۰s$ چیست؟

حل: (الف)

$$F=qE=(۸\times۱۰^{-۵})\sqrt{(۳۰۰۰)^{۲}+(-۶۰۰)^{۲}}=۰/۲۴۵\ N$$

$$\tan\theta=\frac{E_y}{E_x}=\frac{-۶۰۰}{۳۰۰۰}=-۰/۲\Rightarrow\theta=-۱۱/۳۱^{\circ}$$

(ب) $F_x=ma_x\Rightarrow a_x=\frac{F_x}{m}=\frac{qE_x}{m}=\frac{(۸\times۱۰^{-۵})(۳۰۰۰)}{(۰/۰۱)}\Rightarrow$

$$a_x=۲۴\ m/s^{۲}$$

$$x=\frac{۱}{۲}a_xt^{۲}=\left(\frac{۱}{۲}\right)(۲۴)(۳)^{۲}=۱۰۸\ m$$

(پ) $F_y=ma_y\Rightarrow a_y=\frac{F_y}{m}=\frac{qE_y}{m}=\frac{(۸\times۱۰^{-۵})(-۶۰۰)}{(۰/۰۱)}\Rightarrow$

$$a_y=-۴/۸m/s^{۲}$$

(ت) $y=\frac{۱}{۲}a_yt^{۲}=\left(\frac{۱}{۲}\right)(-۴/۸)(۳)^{۲}=-۲۱/۶\ m$

●●۵۴- الکترونی وارد ناحیهٔ میدان الکتریکی یکنواختی که دارای بزرگی $E=۵۰N/C$ است، می‌شود. سرعت اولیهٔ الکترون ۴۰km/s و در همان جهت میدان الکتریکی است. (الف) تندی الکترون ۱/۵ns پس از ورود به این ناحیه چقدر است؟ (ب) در طی این ۱/۵ns، الکترون چه مسافتی را می‌پیماید؟

حل: (الف) $ma=qE\Rightarrow a=\frac{eE}{m}=\frac{(۱/۶\times۱۰^{-۱۹})(۵۰)}{(۹/۱\times۱۰^{-۳۱})}$

$$=۸/۷۹\times۱۰^{۱۲}\ m/s^{۲}$$

$$V=at+V_{\circ}=(-۸/۷۹\times۱۰^{۱۲})(۱/۵\times۱۰^{-۹})+۴۰\times۱۰^{۳}$$

$$=۲/۶۸\times۱۰^{۴}\ m/s$$

چون بار الکترون منفی است نیروی وارد بر آن در خلاف جهت میدان است و حرکت آن کندشونده است بنابراین شتاب آن منفی است.

(ب) $x=\frac{۱}{۲}at^{۲}+V_{\circ}t=\left(\frac{۱}{۲}\right)(-۸/۷۹\times۱۰^{۱۲})(۱/۵\times۱۰^{-۹})^{۲}$

$$+(۴۰\times۱۰^{۳})(۱/۵\times۱۰^{-۹})\Rightarrow$$

$$x=۵/۰۱\times۱۰^{-۵}\ m$$

●●۵۵- فرض کنید که زنبور عسل کره‌ای به قطر ۱/۰۰۰cm با بار ۴۵/۰pC+ است که روی سطح آن به طور یکنواخت پخش شده است. هم‌چنین فرض کنید که دانهٔ گرده کره‌ای شکل به قطر ۴۰/۰μm است که به علت بار زنبور، ۱/۰۰pC- بار در طرف نزدیک کره و بار ۱/۰۰pC+ در طرف دورتر آن القا می‌شود. (الف) بزرگی نیروی الکتروستاتیکی وارد بر دانه از طرف زنبور چقدر است؟ سپس فرض کنید که زنبور دانه را تا فاصلهٔ ۱/۰۰۰mm از نوک کلالهٔ گل ببرد و بار نوک ۴۵/۰pC- باشد. (ب) بزرگی نیروی الکتروستاتیک خالص وارد بر دانه از طرف کلاله چقدر است؟ (پ) آیا دانه روی زنبور می‌ماند یا به طرف کلاله حرکت می‌کند؟

حل: (الف)

$$E=\frac{kq}{r^{۲}}=\frac{(۹\times۱۰^{۹})(۴۵\times۱۰^{-۱۲})}{(۰/۰۱)^{۲}}=۴/۰۵\times۱۰^{۳}\ N/C$$

$$F=Eq=(۴/۰۵\times۱۰^{۳})(۱\times۱۰^{-۱۲})=۴/۰۵\times۱۰^{-۹}\ N$$

(ب) $E=\frac{kq}{r^{۲}}=\frac{(۹\times۱۰^{۹})(۴۵\times۱۰^{-۱۲})}{(۰/۰۰۱)^{۲}}=۴/۰۵\times۱۰^{۵}\ N/C$

$$F=Eq=(۴/۰۵\times۱۰^{۵})(۱\times۱۰^{-۱۲})=۴/۰۵\times۱۰^{-۷}\ N$$

(پ) نیروی وارد شده از طرف کلاله به دانه گرده بزرگتر از نیروی وارده از طرف زنبور است بنابراین دانه به طرف کلاله حرکت می‌کند.

بخش ۱۸-۹ دو قطبی در میدان الکتریکی

●۵۶- یک دوقطبی الکتریکی از بارهای $+۲e$ و $-۲e$ تشکیل شده است که به فاصلهٔ ۰/۷۸nm از هم قرار دارند. این دوقطبی در میدانی الکتریکی به شدت $۳/۴\times۱۰^{۶}$ N/C واقع است. بزرگی گشتاور وارد بر دوقطبی را وقتی گشتاور دوقطبی

(الف) موازی با، (ب) عمود بر ، و (پ) پاد موازی با میدان الکتریکی است پیدا کنید.

حل: $p = qd = (2)(1/6\times10^{-19})(0/78\times10^{-9})$

$= 2/496\times10^{-28}\ \mathrm{C\cdot m}$

(الف) $\tau = pE\sin\theta \ ,\quad \theta = 0 \Rightarrow \tau = 0$

(ب) $\theta = 90° \Rightarrow \tau = (2/496\times10^{-28})(3/4\times10^{6})(1)$

$= 8/486\times10^{-22}\ \mathrm{N\cdot m}$

(پ) $\theta = 180° \Rightarrow \tau = 0$

۵۷•- یک دوقطبی الکتریکی از بارهایی به بزرگی ۱/۵۰nC که ۶/۲۰μm از هم فاصله دارند تشکیل شده است و در یک میدان الکتریکی به شدت ۱۱۰۰N/C قرار دارد. (الف) بزرگی گشتاور دوقطبی الکتریکی و (ب) اختلاف بین انرژیهای پتانسیل مربوط به سمتگیریهای موازی و پادموازی دوقطبی با میدان $\vec{E}$ چقدر است؟ **SSM**

حل: (الف)

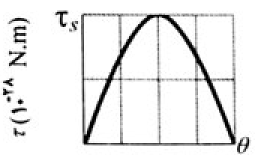
$p = qd = (1/5\times10^{-9})(6/2\times10^{-6}) = 9/3\times10^{-15}\ \mathrm{c\cdot m}$

(ب) $U = -\vec{p}\cdot\vec{E}$

$\Delta U = U_{180} - U_{0} = (-pE\cos180) - (-pE\cos0) \Rightarrow$

$\Delta U = 2pE = (2)(9/3\times10^{-15})(1100) = 2/046\times10^{-11}\ \mathrm{J}$

۵۸••- یک دوقطبی الکتریکی معین در میدان الکتریکی یکنواخت $\vec{E}$ به بزرگی ۴۰N/C قرار دارد. شکل ۱۸-۵۸، بزرگی گشتاور τ وارد بر این دو قطبی را برحسب زاویهٔ θ میان میدان $\vec{E}$ و گشتاور دو قطبی $\vec{p}$ نشان می‌دهد. مقیاس محور عمودی با $\tau_s = 100\times10^{-28}$ N.m مشخص شده است بزرگی $\vec{p}$ چقدر است؟



شکل ۱۸-۵۸ مسئلهٔ ۵۸

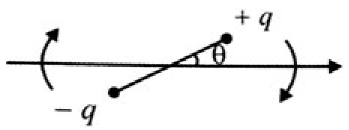
حل: زمانی τ بیشینه است که $\theta = 90°$ باشد.

$\tau = pE\sin\theta \Rightarrow$

$\tau_{max} = pE \Rightarrow p = \dfrac{\tau_{max}}{E} = \dfrac{100\times10^{-28}}{40} = 2/5\times10^{-28}\ \mathrm{C\cdot m}$

۵۹••- برای بسامد نوسانهای با دامنهٔ کوچک یک دوقطبی الکتریکی، با گشتاور دوقطبی $\vec{p}$ و لختی دورانی I، حول مکان تعادل آن در یک میدان الکتریکی یکنواخت به بزرگی E، عبارتی پیدا کنید.

حل:



$\tau = pE\sin\theta$

جهت گشتاور به گونه‌ای است که می‌خواهد دوقطبی را به حالت تعادل در $\theta = 0$ بازگرداند. برای زوایای کوچک θ داریم: $\sin\theta \cong \theta \Rightarrow$

$\tau \cong -pE\theta \ ,\quad \tau = I\alpha = I\dfrac{d^2\theta}{dt^2} \Rightarrow$

علامت منفی برای τ نشان می‌دهد که جهت گشتاور همواره به طرف تعادل است مانند آونگ ساده.

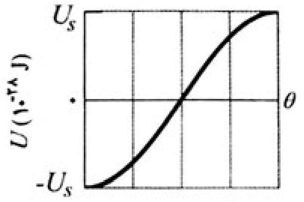
$$I\frac{d^2\theta}{dt^2} = -pE\theta \Rightarrow$$

$$I\frac{d^2\theta}{dt^2} + pE\theta = 0 \Rightarrow \frac{d^2\theta}{dt^2} + \frac{p}{I}E\theta = 0 \Rightarrow$$

$$\frac{d^2\theta}{dt^2} + \omega^2\theta = 0 \Rightarrow \omega = \sqrt{\frac{pE}{I}}$$

$$\omega = 2\pi f \Rightarrow f = \frac{\omega}{2\pi} = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{pE}{I}}$$

۶۰••- یک دوقطبی الکتریکی معین در میدان الکتریکی یکنواخت $\vec{E}$ به بزرگی ۲۰N/C قرار دارد. شکل ۱۸-۳۰، انرژی پتانسیل U دوقطبی را برحسب زاویهٔ θ بین $\vec{E}$ و گشتاور دوقطبی $\vec{p}$ به دست می‌دهد. مقیاس محور عمودی با $U_s = 100\times10^{-28}$ J مشخص شده است. بزرگی $\vec{p}$ چقدر است؟



شکل ۱۸-۳۰ مسئلهٔ ۶۰

حل:

$$U = -\vec{p}\cdot\vec{E} = -pE\cos\theta \Rightarrow U_m = pE \Rightarrow p = \frac{U_m}{E} \Rightarrow$$

$$p = \frac{100\times10^{-28}}{20} = 5\times10^{-28}\ \mathrm{C\cdot m}$$

۶۱••- برای آنکه یک دوقطبی الکتریکی به اندازهٔ °۱۸۰ در یک میدان الکتریکی یکنواخت به بزرگی E=۴۶/۰N/C بچرخد، چه مقدار کار لازم است در صورتی که $p = 3/02\times10^{-25}\ \mathrm{C\cdot m}$ و زاویهٔ اولیه °۶۴ باشد؟

حل:

$$W=U_{۶۴+۱۸۰}-U_{۶۴}=-pE\cos(۲۴۴)-(-pE\cos۶۴)$$

$$=۲pE\cos۶۴=(۲)(۳/۰۲\times۱۰^{-۲۵})(۴۶)\cos۶۴$$

$$=۱/۲۲\times۱۰^{-۲۳}\ \text{J}$$

مسئله‌های اضافی

۶۲- میلیکان در یکی از آزمایشهای خود، بارهای اندازه‌گیری شدهٔ آمده در جدول را در زمانهای مختلف روی یک قطرهٔ تنها مشاهده کرد

$۱۹/۷۱\times۱۰^{-۱۹}$C	$۱۳/۱۳\times۱۰^{-۱۹}$C	$۶/۵۶۳\times۱۰^{-۱۹}$C
$۲۲/۸۹\times۱۰^{-۱۹}$C	$۱۶/۴۸\times۱۰^{-۱۹}$C	$۸/۲۰۴\times۱۰^{-۱۹}$C
$۲۶/۱۳\times۱۰^{-۱۹}$C	$۱۸/۰۸\times۱۰^{-۱۹}$C	$۱۱/۵۰\times۱۰^{-۱۹}$C

براساس این داده‌ها، مقدار بار بنیادی e چقدر است؟

حل: ابتدا یک مقدار تقریبی برای e با بدست آوردن اختلاف بین مقدارهای داده شده می‌یابیم. کمترین اختلاف میان مقادیر داده‌های پنجم و ششم است.

$$۱۸/۰۸\times۱۰^{-۱۹}-۱۶/۴۸\times۱۰^{-۱۹}=۱/۶\times۱۰^{-۱۹}\ \text{C}$$

که آن را e_T تقریبی می‌نامیم.

ثابتهای n را با استفاده از این مقدار تقریبی بدست می‌آوریم.

داده ۱: $\dfrac{۶/۵۶۳\times۱۰^{-۱۹}}{e_T}=۴/۱ \Rightarrow n_۱=۴$

داده ۲: $\dfrac{۸/۲۰۴\times۱۰^{-۱۹}}{e_T}=۵/۱۳ \Rightarrow n_۲=۵$

داده ۳: $\dfrac{۱۱/۵\times۱۰^{-۱۹}}{e_T}=۷/۱۹ \Rightarrow n_۳=۷$

داده ۴: $\dfrac{۱۳/۱۳\times۱۰^{-۱۹}}{e_T}=۸/۲۱ \Rightarrow n_۴=۸$

داده ۵: $\dfrac{۱۶/۴۸\times۱۰^{-۱۹}}{e_T}=۱۰/۳ \Rightarrow n_۵=۱۰$

داده ۶: $\dfrac{۱۸/۰۸\times۱۰^{-۱۹}}{e_T}=۱۱/۳ \Rightarrow n_۶=۱۱$

داده ۷: $\dfrac{۱۹/۷۱\times۱۰^{-۱۹}}{e_T}=۱۲/۳۲ \Rightarrow n_۷=۱۲$

داده ۸: $\dfrac{۲۲/۸۹\times۱۰^{-۱۹}}{e_T}=۱۴/۳۱ \Rightarrow n_۸=۱۴$

داده ۹: $\dfrac{۲۶/۱۳\times۱۰^{-۱۹}}{e_T}=۱۶/۳۳ \Rightarrow n_۹=۱۶$

سپس یک مجموعه جدید از داده‌ها را با تقسیم مقادیر داده شده بر مقادیر دقیق مربوط به آنها (یعنی n_i به ازای $i=۱,۲,۳,...$) بنا می‌کنیم.

$$e_۱,e_۲,e_۳,...=\frac{۶/۵۶۳\times۱۰^{-۱۹}}{n_۱},\frac{۸/۲۰۴\times۱۰^{-۱۹}}{n_۲},\frac{۱۱/۵\times۱۰^{-۱۹}}{n_۳},...$$

که مقادیر زیر را بدست می‌دهد:

$$(۱/۶۴۰\times۱۰^{-۱۹},۱/۶۴۰۸\times۱۰^{-۱۹},۱/۶۴۲۸۶\times۱۰^{-۱۹},...)$$

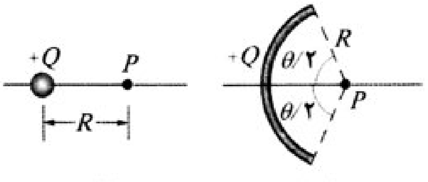
و آن را به عنوان مجموعه داده‌های جدید درنظر می‌گیریم.

حال با گرفتن میانگین و انحراف معیار به مقدار زیر می‌رسیم:

$$e=e_{\text{ave}}\pm\Delta e=(۱/۶۴۱\pm۰/۰۰۴)\times۱۰^{-۱۹}\ \text{C}$$

حد پایین این رابطه به مقدار $۱/۶۳۷\times۱۰^{-۱۹}$ (C) می‌انجامد که هنوز در حدود ٪۲ بیشتر از مقدار پذیرفته شده برای e است.

✓ **۶۳-** در شکل ۱۸-۶۰ الف، ذره‌ای با بار $+Q$ میدانی الکتریکی به بزرگی $E_{\text{ذره}}$ در نقطهٔ P در فاصلهٔ R از ذره ایجاد می‌کند. در شکل ۱۸-۶۰ ب، همان مقدار بار به طور یکنواخت روی کمانی دایره‌ای به شعاع R و زاویهٔ θ توزیع شده است. بار روی کمان، میدانی الکتریکی به بزرگی $E_{\text{کمان}}$ در مرکز خمیدگی P آن ایجاد می‌کند. به ازای چه مقداری از θ، $E_{\text{کمان}}=۰/۵۰۰\,E_{\text{ذره}}$ است؟ (*راهنمایی:* شما احتمالاً به یک حل ترسیمی روی می‌آورید.)



(الف) (ب)

شکل ۱۸-۶۰ مسئلهٔ ۶۳

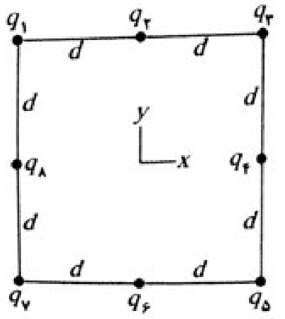
حل:

$$E_{\text{ذره}}=\frac{kQ}{R^۲}\quad,\quad E_{\text{کمان}}=\frac{Q}{۲\pi\varepsilon_۰R^۲}\frac{\sin\frac{\theta}{۲}}{\theta}=\frac{۲kQ}{R^۲\theta}\sin\frac{\theta}{۲}$$

$$\frac{۲kQ}{R^۲\theta}\sin\frac{\theta}{۲}=(۰/۵)\left(\frac{kQ}{R^۲}\right)\Rightarrow\frac{۲}{\theta}\sin\frac{\theta}{۲}=\frac{۱}{۲}\Rightarrow$$

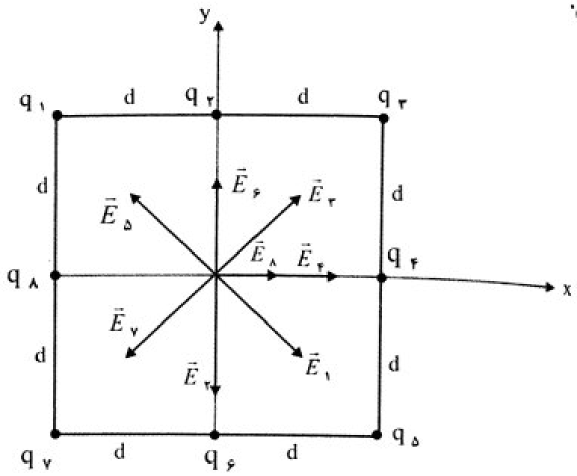
$$\sin\frac{\theta}{۲}=\frac{\theta}{۴}\quad\Rightarrow\ \theta ۳/۸۱\text{rad}\ \Rightarrow\ \theta=۲۱۸/۴^\circ$$

۶۴- در شکل ۱۸-۶۱، هشت ذره مربعی را تشکیل داده‌اند که در آن $d=۲/۰$ cm است. بارها عبارت‌اند از: $q_۱=+۳e$، $q_۲=+e$، $q_۳=-۵e$، $q_۴=-۲e$، $q_۵=+۳e$، $q_۶=+e$، $q_۷=-۵e$ و $q_۸=+e$. برحسب نمادگذاری بردار یکه، میدان الکتریکی خالص ناشی از ذره‌ها در مرکز مربع چیست؟



شکل ۱۸-۶۱ مسئلهٔ ۶۴

حل:



$E_1 - E_5 = \frac{k(3e)}{(\sqrt{2}d)^2}$, $E_2 = E_6 = \frac{ke}{d^2}$,

$E_3 - E_7 = \frac{k(5e)}{(\sqrt{2}d)^2}$, $E_4 = \frac{k(2e)}{d^2}$, $E_8 = \frac{ke}{d^2}$

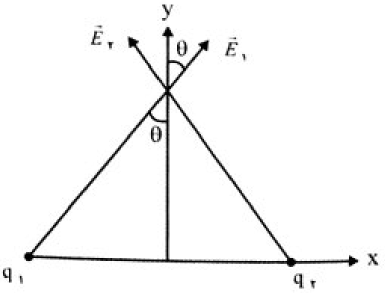
میدان ناشی از همه‌ی بارها یکدیگر را خنثی می‌کنند،به جز دوبار q_4 و q_8.

$$E_{total} = E_4 + E_8 = \frac{2ke}{d^2} + \frac{ke}{d^2} = \frac{3ke}{d^2} \Rightarrow$$

$$\vec{E}_{total} = \frac{(3)(9\times10^{9})(1.6\times10^{-19})}{(0.02)^2}\hat{i} = 1.08\times10^{-5}\,\hat{i}\ \text{N/C}$$

۶۵- دو ذره، هر یک با باری به بزرگی ۱۲ nC در دو گوشهٔ مثلث متساوی الاضلاعی به ضلع ۲/۰m قرار دارند. مطلوب است بزرگی میدان الکتریکی در صورتی که (الف) هر دو بار مثبت باشند و (ب) یکی مثبت و دیگری منفی باشد.

حل: (الف)



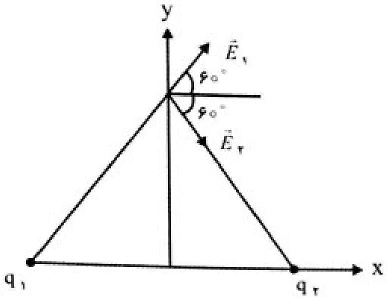
به دلیل تقارن، میدان فقط در راستای محور y است و مؤلفه‌ها در راستای محور x اثر یکدیگر را خنثی می‌کنند.

$$E_{total} = 2E_y = 2E_1\cos\theta = 2\frac{kq}{r^2}\cos\theta$$

$$= \frac{(2)(9\times10^{9})(12\times10^{-9})}{4}\times\cos 30 \Rightarrow$$

$$E_{total} = 46.77\ \text{N/C}$$

(ب) به دلیل تقارن میدان فقط در راستای محور x است و مولفه‌ها در راستای محور y اثر یکدیگر را خنثی می‌کنند.



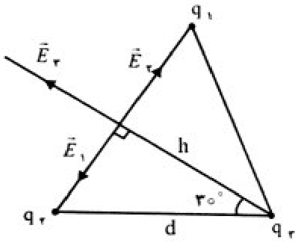
$$E_{total} = 2E_x = 2E_1\cos\theta = \frac{2kq}{r^2}\cos\theta$$

$$= \frac{(2)(9\times10^{9})(12\times10^{-9})}{4}\times\cos 60 \Rightarrow$$

$$E_{total} = 27\ \text{N/C}$$

۶۶- سه ذره، هر یک با بار مثبت Q، تشکیل مثلث متساوی الاضلاعی به ضلع d را می‌دهند. بزرگی میدان الکتریکی ناشی از ذره‌ها در وسط هر ضلع چقدر است؟

حل:



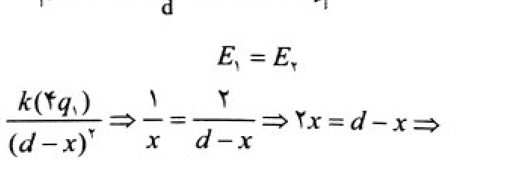
$\vec{E}_1$ و $\vec{E}_2$ اثر یکدیگر را خنثی می‌کنند.

$$h = d\cos 30 = \frac{\sqrt{3}}{2}d \ ,\quad E = \frac{kQ}{h^2} = \frac{Q}{(4\pi\varepsilon_0)\left(\frac{3}{4}d^2\right)}$$

$$= \frac{Q}{3\pi\varepsilon_0 d^2}$$

۶۷- ذره‌ای با بار $-q_1$ در مبداء محور x قرار دارد. (الف) ذره‌ای با بار $-4q_1$ در چه مکانی از محور باید قرار گیرد تا میدان الکتریکی خالص در $x=2.0\text{mm}$ واقع بر آن محور برابر صفر باشد؟ اگر ذره‌ای با بار $+4q_1$ در آن مکان قرار گیرد، جهت میدان الکتریکی خالص (نسبت به جهت محور x) چه خواهد بود؟

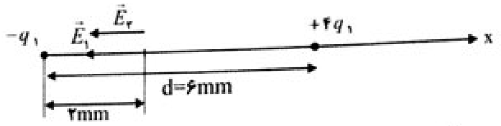
حل: (الف) چون بار هر دو ذره منفی نقطه موردنظر بین دوبار قرار دارد.



$$E_1 = E_2$$

$$\frac{kq_1}{x^2} = \frac{k(4q_1)}{(d-x)^2} \Rightarrow \frac{1}{x} = \frac{2}{d-x} \Rightarrow 2x = d - x \Rightarrow$$

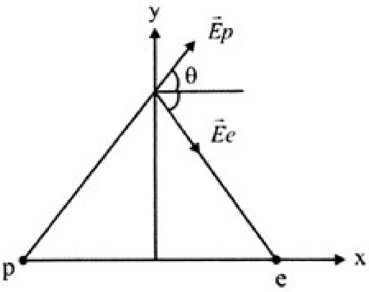
(ب) $3x = d \Rightarrow d = 6\ \text{mm}$



در این حالت که ذره دوم بار مثبت دارد بردارهای میدان الکتریکی ایجاد شده توسط هر دوبار در $x = 2\text{mm}$، در جهت $-x$ قرار دارند. بنابراین جهت میدان الکتریکی خالص در خلاف جهت محور x است.

۶۸- یک پروتون و یک الکترون دو گوشهٔ یک مثلث متساوی‌الاضلاع به ضلع $2/0\times10^{-6}\text{m}$ را تشکیل داده‌اند. بزرگی میدان الکتریکی خالص ناشی از این دو ذره در گوشهٔ سوم چقدر است؟

حل:

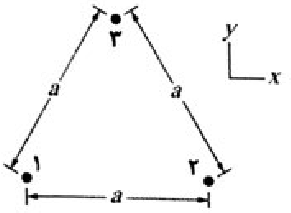


$$E_p = E_e = \frac{ke}{r^2} \Rightarrow$$

$$E = 2E_p\cos\theta = \frac{2ke}{r^2}\cos\theta \Rightarrow$$

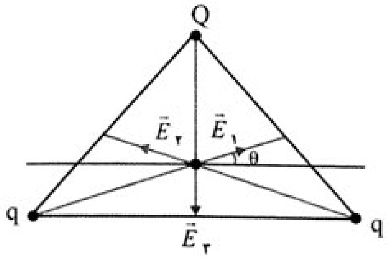
$$E = \frac{(2)(9\times10^9)(1/6\times10^{-19})}{(2\times10^{-6})^2}\cos 60 = 360\ \text{N/C}$$

۶۹- در شکل ۱۸-۶۲، ذرهٔ ۱ (با بار $+1/00\mu C$)، ذرهٔ ۲ (با بار $+1/00\mu C$)، و ذرهٔ ۳ (با بار Q) یک مثلث متساوی‌الاضلاع به ضلع a را تشکیل می‌دهند. به ازای چه مقداری از Q (هم از لحاظ علامت و هم از لحاظ بزرگی) میدان الکتریکی ناشی از این ذره‌ها، در مرکز مثلث برابر صفر است؟



شکل ۱۸-۶۲ مسئله‌های ۶۹ و ۸۲

حل:



بنابر تقارن برای اینکه میدان الکتریکی در مرکز مثلث صفر باشد باید بار Q مثبت باشد.

$$E_1 = E_2 = \frac{kq}{r^2}$$

$$E_x = 0 \Rightarrow E_1\cos\theta = E_2\cos\theta$$

$$E_y = 0 \Rightarrow E_1\sin\theta + E_2\sin\theta = E_3 \Rightarrow E_3 = 2E_1\sin\theta$$

$$\Rightarrow \frac{kQ}{r^2} = 2\frac{kq}{r^2}\sin 30 \Rightarrow Q = 2q\sin 30 \Rightarrow Q = q = 1\,\mu C$$

۷۰- (الف) قرص شکل ۱۸-۱۳ چه بار کلی (اضافی) q باید داشته باشد تا میدان الکتریکی E روی سطح قرص در مرکز آن دارای بزرگی $3/0\times10^6$ N/C باشد، میدانی که باعث فروریزش الکتریکی هوا و ایجاد جرقه‌ها می‌شود؟ شعاع قرص را $2/5\text{cm}$ در نظر بگیرید و از مورد مربوط به هوا در جدول ۱۸-۱ استفاده کنید. (ب) فرض کنید هر اتم سطحی دارای سطح مقطع مؤثر $0/015\text{nm}^2$ باشد. برای ایجاد سطح قرص به چند اتم نیاز است؟ (پ) بار محاسبه شده در (الف) ناشی از آن اتمهای سطحی است که یک الکترون اضافی دارند. چه کسری از این اتمها باید این چنین باردار شده باشند؟

حل: (الف)

$$E = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0}\left(1 - \frac{z}{\sqrt{z^2 + R^2}}\right)$$

میدان قرصی به شعاع R که بار q بطور یکنواخت روی آن توزیع شده است در نقطه‌ای روی محور آن از رابطه بالا بدست می‌آید.

$$z = 0 \Rightarrow E = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0}$$

$$\Rightarrow \sigma = 2\varepsilon_0 E = (2)(8/85\times10^{-12})(3\times10^6)$$

$$\Rightarrow \sigma = 5/31\times10^{-5}\ C/m^2 \quad , \quad \sigma = \frac{q}{s}$$

$$\Rightarrow \sigma = \frac{q}{\pi R^2} \Rightarrow q = \pi R^2\sigma = \pi(2/5\times10^{-2})^2(5/31\times10^{-5})$$

$$= 1/04\times10^{-7}\ \text{C}$$

(ب)

$$N = \frac{s}{s_{\text{اتم}}} = \frac{\pi R^2}{s_{\text{اتم}}} = \frac{\pi(2/5\times10^{-2})^2}{(0/015\times10^{-18})} = 1/31\times10^{17}\ (\text{Atom})$$

(پ) تعداد اتم‌هایی که یک: الکترون اضافی دارند:

$$N' = \frac{q}{e} = \frac{(1/04\times10^{-7})}{(1/6\times10^{-19})} = 6/5\times10^{11}$$

$$\frac{N'}{N}=\frac{6.5\times10^{11}}{(1.31\times10^{17})}=4.96\times10^{-6}$$

کسری از اتم‌های سطحی که یک الکترون اضافی دارند بدست آمد.

۷۱- یک قطرهٔ آب کروی به قطر $1.20\,\mu m$ بر اثر میدان الکتریکی جوی رو به پایین به بزرگی $E=462\,N/C$ ، در هوای آرام معلق مانده است. (الف) بزرگی نیروی گرانشی وارد بر قطره چقدر است؟ قطره چه تعداد الکترون اضافی دارد؟

حل: (الف)

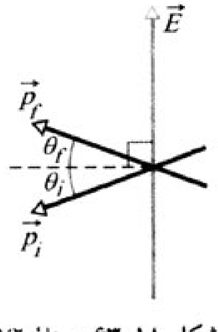
$$mg=\rho\times\frac{4}{3}\pi R^3\times g=(1000)\left(\frac{4}{3}\right)\pi(0.6\times10^{-6})^3(9.8)\Rightarrow$$

$$w=mg=8.87\times10^{-15}\ N$$

(ب) $$mg=qE\Rightarrow q=\frac{mg}{E}=\frac{8.87\times10^{-15}}{462}=1.92\times10^{-17}\ C$$

تعداد الکترونهای اضافی قطره: $$N=\frac{q}{e}=\frac{1.92\times10^{-17}}{1.6\times10^{-19}}=120$$

۷۲- در شکل ۱۸-۶۳، یک دوقطبی الکتریکی از سمتگیری اولیهٔ i $(\theta_i=20.0^\circ)$ تا سمتگیری نهایی f $(\theta_f=20.0^\circ)$ در میدان الکتریکی یکنواخت خارجی $\vec{E}$ جابه‌جا می‌شود. گشتاور دوقطبی الکتریکی $1.60\times10^{-27}\ C.m$ ، و بزرگی میدان $3.00\times10^{6}\ N/C$ است. تغییر در انرژی پتانسیل دوقطبی چقدر است؟



شکل ۱۸-۶۳ مسئلهٔ ۷۲

حل:

$$V=-\vec{p}\cdot\vec{E}=-pE\cos\theta\ \Rightarrow$$

$$\Delta V=-pE\cos\theta_f-(-pE\cos\theta_i)=-pE(\cos\theta_f-\cos\theta_i)\Rightarrow$$

$$\Delta V=-(1.6\times10^{-27})(3\times10^{6})(\cos(90-20)-\cos(90+20))\Rightarrow$$

$$\Delta V=-(1.6\times10^{-27})(3\times10^{6})(2\sin20)=-3.28\times10^{-21}\ J$$

۷۳- بار $20\,nC$ به طور یکنواخت در امتداد میلهٔ راستی به طول $4.0\,m$ که به شکل کمانی دایره‌ای به شعاع $2.0\,m$ خم شده، توزیع شده است. بزرگی میدان الکتریکی در مرکز انحنای کمان چقدر است؟

حل: میدان یک کمان به دلیل تقارن در امتداد محور آن می‌باشد و از رابطه زیر بدست می‌آید:

$$E=\frac{q}{2\pi\varepsilon_0R^2}\frac{\sin\frac{\varphi}{2}}{\varphi}=\frac{2kq}{R^2}\frac{\sin\frac{\varphi}{2}}{\varphi}$$

$$l=R\theta\Rightarrow\theta=\frac{l}{R}=\frac{4}{2}=2(rad)\Rightarrow\theta=114.6^\circ$$

$$E=\frac{(2)(9\times10^{9})(20\times10^{-9})}{(2)^2}\ \frac{\sin\left(\frac{114.6}{2}\right)}{2}=37.87\ N/C$$

۷۴- (الف) بزرگی شتاب یک الکترون در میدان الکتریکی یکنواختی به بزرگی $1.40\times10^{6}\ N/C$ چقدر است؟ (ب) با شروع از حالت سکون، چقدر طول می‌کشد تا تندی الکترون به $\frac{1}{10}$ تندی نور برسد؟ (پ) در این بازهٔ زمانی، الکترون چقدر حرکت کرده است؟

حل: (الف) $$eE=ma\Rightarrow a=\frac{eE}{m}=\frac{(1.6\times10^{-19})(1.4\times10^{6})}{(9.1\times10^{-31})}$$

$$=2.46\times10^{17}\ m/s^2$$

(ب) $$V=at+V_0=at+0\Rightarrow t=\frac{V}{a}=\frac{(0.1)(3\times10^{8})}{2.46\times10^{17}}\Rightarrow$$

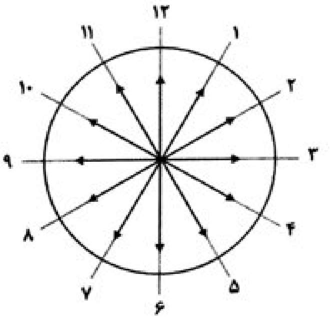
$$t=1.22\times10^{-10}\ s$$

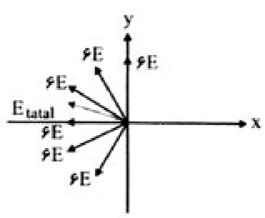
(پ) $$x=\frac{1}{2}at^2=\left(\frac{1}{2}\right)(2.46\times10^{17})(1.22\times10^{-10})^2$$

$$=1.83\times10^{-3}\ m$$

۷۵- یک صفحهٔ ساعت دارای بارهای نقطه‌ای منفی $-q$ ، $-2q$ ، $-3q$ ،...، $-12q$ است که در مکانهای مربوط به عددها قراردارند. عقربه‌های ساعت، میدان الکتریکی خالص ناشی از بارهای نقطه‌ای را برهم نمی‌زنند. در چه زمانی عقربهٔ ساعت شمار در همان جهت بردار میدان الکتریکی در مرکز صفحهٔ ساعت است؟

حل:





$$E_x=-6E-2(6E)\cos30-2(6E)\cos60=-22.39E$$

$$E_y=6E+6E\sin60+6E\sin30+0-6E\sin30-6E\sin60=6E$$

$$tg\varphi=\frac{E_y}{E_x}=\frac{6E}{-22.39E}=-4.68\times10^{-3}\Rightarrow\varphi=165^\circ$$

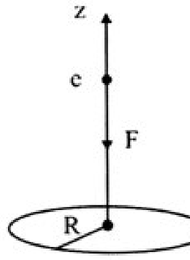
با توجه به اینکه زاویه بین هر دو شماره متوالی ۳۰° است عقربه ساعت شمار در وسط اعداد ۹ و ۱۰ قرار دارد. یعنی در ساعت $۹:۳۰'$ عقربه ساعت شمار هم جهت با میدان خواهد بود.

۷۶- الکترونی در امتداد محور عمودی مرکزی یک حلقهٔ باردار به شعاع R در شکل ۱۸-۱۰ با $z \ll R$ مقید شده است. نشان دهید که نیروی الکتروستاتیکی وارد بر الکترون می‌تواند باعث نوسان آن در مرکز حلقه با بسامد زاویه‌ای زیر شود

$$\omega = \sqrt{\frac{eq}{۴\pi\varepsilon_\circ mR^۳}}$$

که در آن q بار حلقه و m جرم الکترون است.

حل:



میدان ناشی از یک حلقه به شعاع R که بار q بطور یکنواخت روی آن توزیع شده است از رابطه زیر بدست می‌آید:

$$E = \frac{qz}{۴\pi\varepsilon_\circ (z^۲ + R^۲)^{۳/۲}}$$

$$z << R \Rightarrow E = \frac{qz}{۴\pi\varepsilon_\circ R^۳} \Rightarrow$$

$$F = qE = -eE = \frac{-eqz}{۴\pi\varepsilon_\circ R^۳} \Rightarrow m\frac{d^۲z}{dz^۲} + \frac{eq}{۴\pi\varepsilon_\circ R^۳}z = \circ \Rightarrow$$

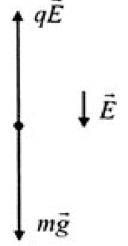
$$m\frac{d^2z}{dt^۲} + kz = \circ \quad , \quad k = \frac{eq}{۴\pi\varepsilon_\circ R^۳}$$

$$\frac{d^۲z}{dt^۲} + \frac{k}{m}z = \circ \quad \Rightarrow \quad \frac{d^۲z}{dt^۲} + \omega^۲ z = \circ \quad \Rightarrow$$

$$\omega = \sqrt{\frac{k}{m}} = \sqrt{\frac{eq}{۴\pi\varepsilon_\circ mR^۳}}$$

۷۷- در جو نزدیک سطح زمین، بزرگی متوسط میدان الکتریکی $\vec{E}$ حدود $۱۵۰\,\text{N/C}$ رو به پایین است. می‌خواهیم یک کرهٔ گوگردی به وزن $۴/۴\text{N}$ را با باردار کردن آن، در این میدان «شناور» کنیم. (الف) از چه باری (هم از لحاظ علامت و هم از لحاظ بزرگی) باید استفاده شود؟ (ب) چرا این آزمایش نشدنی است؟

حل: (الف) $mg = qE \Rightarrow q = \frac{mg}{E} = \frac{۴/۴}{۱۵۰} = ۰/۰۲۹\text{C}$



چون میدان روبه پایین است باید بار کره منفی باشد تا نیروی وارد بر آن روبه بالا باشد.

(ب) $\rho = ۲۱۵۰\left(\frac{\text{kg}}{\text{m}^۳}\right) \quad , \quad m = \rho\left(\frac{۴}{۳}\pi R^۳\right) \Rightarrow$

$$R^۳ = \frac{\frac{mg}{g}}{\frac{۴}{۳}\pi f} = \left(\frac{۳}{۴}\right)\left(\frac{\frac{۴/۴}{۹/۸}}{\pi \times ۲۱۵۰}\right) = ۴/۹۸\times۱۰^{-۵} \Rightarrow$$

$R = ۰/۰۳۷\text{m}$

بنابراین میدان در سطح کره از رابطه زیر بدست می‌آید:

$$E = \frac{kq}{R^۲} = \frac{(۹\times۱۰^۹)(۰/۰۲۹)}{(۰/۰۳۷)^۲} = ۱/۹۱\times۱۰^{۱۱}\ \text{N/C}$$

این میدان بسیار بزرگتر از میدان شکست در هوا می‌باشد.

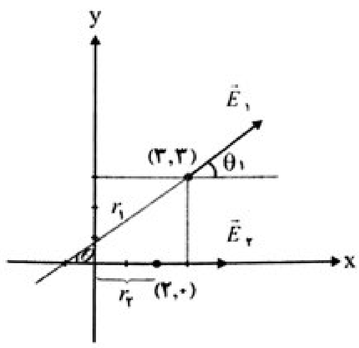
●۷۸- گشتاور دوقطبی الکتریکی یک الکترون و یک پروتون را که به فاصلهٔ $۴/۳۰\text{nm}$ از هم قرار دارند محاسبه کنید. **SSM**

حل:

$$p = qd = (۱/۶\times۱۰^{-۱۹})(۴/۳\times۱۰^{-۹}) = ۶/۸۸\times۱۰^{-۲۸}\ \text{C}\cdot\text{m}$$

۷۹- میدان الکتریکی در صفحهٔ xy ناشی از یک ذرهٔ باردار مثبت، در نقطهٔ $(۳/۰, ۳/۰)\text{cm}$ برابر با $۷/۲(۴/۰\hat{i} + ۳/۰\hat{j})\,\text{N/C}$ و در نقطهٔ $(۲/۰, ۰)\text{cm}$ برابر $۱۰۰\hat{i}\,\text{N/C}$ است. (الف) مؤلفهٔ x و (ب) مؤلفهٔ y ذره چیست؟ (پ) بار ذره چقدر است؟

حل:



(الف) و (ب)

$$E_{۱x} = E_۱\cos\theta_۱ = \frac{kQ}{r_۱^۲}\,\frac{۳-x}{r_۱} = \frac{kQ(۳-x)}{\left[(۳-x)^۲ + (۳-y)^۲\right]^{۳/۲}} = ۲۸/۸ \qquad (۱)$$

$$E_{۱y} = E_۱\sin\theta_۱ = \frac{kQ}{r_۱^۲}\,\frac{۳-y}{r_۱} = \frac{kQ(۳-y)}{\left[(۳-x)^۲ + (۳-y)^۲\right]^{۳/۲}} = ۲۱/۶ \qquad (۲)$$

(۳) $$E_{2x} = E_2 \cos\theta_2 = \frac{kQ(2-x)}{\left[(2-x)^2 + (0-y)^2\right]^{3/2}} = 100$$

(۴) $$E_{2y} = E_2 \sin\theta_2 = \frac{kQ(0-y)}{\left[(2-x)^2 + (0-y)^2\right]^{3/2}} = 0 \Rightarrow y = 0$$

دو رابطه (۱) و (۲) را به هم تقسیم می‌کنیم:

$$\frac{3-x}{3-y} = \frac{28/8}{21/6} \Rightarrow 21/6(3-x) = 3\times 28/8 \Rightarrow x = -1\text{cm}$$

(پ) $$(1) \Rightarrow \frac{(9\times10^{9})(4\times10^{-2})Q}{\left[(0/04)^2 + (0/03)^2\right]^{3/2}} = 28/8$$

$$\Rightarrow Q = 1\times10^{-11}\ \text{C}$$

۸۰- روی یک میلهٔ دایره‌ای به شعاع انحنای R=۹/۰۰cm که در زاویهٔ θ=۲/۴۰rad محدود است، بار مثبت Q=۶/۲۵pC به طور یکنواخت توزیع شده است. بزرگی میدان الکتریکی که Q در مرکز انحنا ایجاد می‌کند چقدر است؟

حل: در مساله ۲۵ میدان الکتریکی کمان را بدست آوردیم.

$$E = \frac{q}{2\pi\varepsilon_0 R^2\theta}\sin\frac{\theta}{2} = \frac{2kq}{R^2\theta}\sin\frac{\theta}{2}$$

$$E = \frac{(2)(9\times10^{9})(6/25\times10^{-12})}{(0/09)^2\times 2/4}\sin\left(\frac{137/51}{2}\right)$$

$$= 5/39\ \text{N/C}$$

۸۱- یک دوقطبی الکتریکی با گشتاور دوقطبی

$$\vec{p} = (3/00\hat{i} + 4/00\hat{j})(1/24\times10^{-30}\ \text{C.m})$$

در میدان الکتریکی $\vec{E} = (4000\ \text{N/C})\hat{i}$ قرار دارد. (الف) انرژی پتانسیل دوقطبی الکتریکی چیست؟ (ب) گشتاور وارد بر آن چیست؟ (پ) اگر یک عامل خارجی، دوقطبی را تا گشتاور دوقطبی الکتریکی زیر بچرخاند

$$\vec{p} = (-4/00\hat{i} + 3/00\hat{j})(1/24\times10^{-30}\ \text{C.m})$$

چقدر کار توسط آن عامل خارجی صورت گرفته است؟

حل: (الف)

$$U = -\vec{p}\cdot\vec{E} = -(1/24\times10^{-30})(3\hat{i} + 4\hat{j})\cdot(4000\hat{i}) \Rightarrow$$

$$U = -1/488\times10^{-26}\ \text{J}$$

(ب) $$\vec{\tau} = \vec{p}\times\vec{E} = (1/24\times10^{-30})\begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ 3 & 4 & 0 \\ 4000 & 0 & 0 \end{vmatrix} \Rightarrow$$

$$\tau = -1/984\times10^{-26}\ \text{J}$$

(پ)

$$U_f = -\vec{p}_f\cdot\vec{E} = -(1/24\times10^{-30})(-4\hat{j} + 3\hat{j})\cdot(4000\hat{i}) \Rightarrow$$

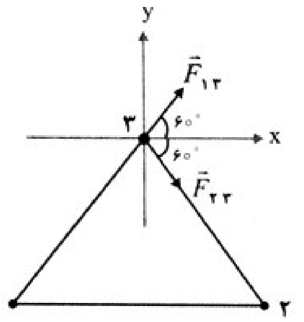
$$U_f = 1/984\times10^{-26}\ \text{J}$$

$$W = \Delta U = U_f - U_i = 1/984\times10^{-26} - (-1/488\times10^{-26}) \Rightarrow$$

$$W = 3/472\times10^{-26}\ \text{J}$$

۸۲- در شکل ۱۸-۶۱، ذرهٔ ۱ (با بار ۲/۰۰pC+)، ذرهٔ ۲ (با بار ۲/۰۰pC−)، و ذرهٔ ۳ (با بار ۵/۰۰pC+) تشکیل مثلث متساوی الاضلاعی به ضلع a=۹/۵۰cm را می‌دهند. (الف) نسبت به جهت مثبت محور x، جهت نیروی $\vec{F}_3$ وارد بر ذرهٔ ۳ ناشی از دو ذرهٔ دیگر را با رسم خطهای میدان الکتریکی آن دو ذره، تعیین کنید. (ب) بزرگی نیروی $\vec{F}_3$ را محاسبه کنید.

حل: (الف)



(ب)

$$F_{13} = F_{23} = \frac{kq_1q_3}{a^2} = \frac{(9\times10^{9})(2\times10^{-12})(5\times10^{-12})}{(9/5\times10^{-2})^2}$$

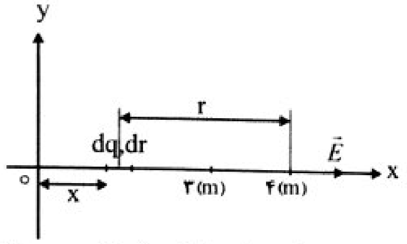
$$= 9/97\times10^{-12}\ \text{N}$$

$$F_3 = 2F_{13}\cos60 = (2)(9/97\times10^{-12})\left(\frac{1}{2}\right)$$

$$= 9/97\times10^{-12}\ \text{N}$$

۸۳- بار (با چگالی خطی یکنواخت ۹/۰ nC/m) روی تاری که بر محور x از x=۰ تا x=۳/۰m امتداد یافته است، قرار دارد. بزرگی میدان الکتریکی را در x=۴/۰m روی محور x تعیین کنید.

حل:



تار را به تکه‌های کوچک dr با بار dq تقسیم می‌کنیم.

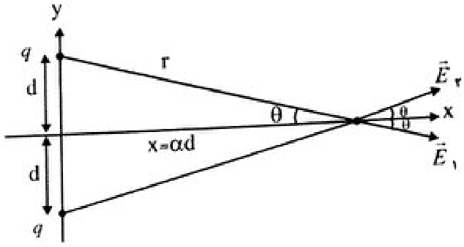
$$dE = \frac{kdq}{r^2} = \frac{k\lambda dr}{r^2}$$

$$E = \int dE = k\lambda\int_1^4 \frac{dr}{r^2} = k\lambda\left(\frac{-1}{r}\right)_1^4 = k\lambda\left(\frac{-1}{4} - (-1)\right) \Rightarrow$$

$$E = \frac{3}{4}k\lambda = \left(\frac{3}{4}\right)(9\times10^{9})(9\times10^{-9}) = 60/75\ \text{N/C}$$

۸۴- دو ذره، هر یک با بار مثبت q، روی محور y یکی در $y=d$ و دیگری در $y=-d$ قرار دارند. (الف) عبارتی بنویسید که بزرگی E میدان الکتریکی خالص را در نقطه‌هایی روی محور x که با $x=\alpha d$ داده می‌شوند، به دست دهد. (ب) برای گسترهٔ $۰<\alpha<۴$ ، E را برحسب α رسم کنید. از روی این نمودار، مقدارهایی از α را تعیین کنید که (پ) مقدار بیشینهٔ E و (ت) مقدار نیم بیشینهٔ E را به دست دهند.

حل:



(الف) به دلیل تقارن میدان نهایی فقط در جهت محور xها می‌باشد.

$$E_۱ = E_۲ = \frac{kq}{r^۲} \ , \ E_{total} = ۲E_۱\cos\theta = \frac{۲kq}{r^۲}\frac{x}{r} = \frac{۲kqQ}{r^۳} \Rightarrow$$

$$E_{total} = \frac{۲kq\alpha d}{\left[(\alpha d)^۲ + d^۲\right]^{۳/۲}} = \frac{۲kq\alpha d}{d^۳(۱+\alpha^۲)^{۳/۲}} = \frac{۲kq\alpha}{d^۲(۱+\alpha^۲)^{۳/۲}}$$

(ب) و (پ)

$$E = \frac{۲kq}{d^۲}\left[\alpha(۱+\alpha^۲)^{-۳/۲}\right] \Rightarrow$$

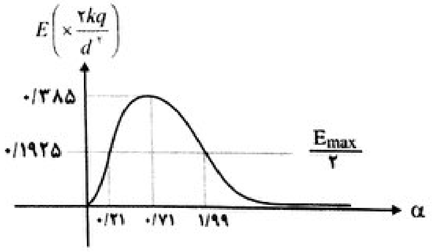
$$\frac{dE}{d\alpha} = \frac{۲kq}{d^۲}\left[(۱+\alpha^۲)^{-۳/۲} + \alpha\left(-\frac{۳}{۲}\right)(۲\alpha)(۱+\alpha^۲)^{-۵/۲}\right] \Rightarrow$$

$$\frac{dE}{d\alpha} = \frac{۲kq}{d^۲}\left(\frac{۱+\alpha^۲-۳\alpha^۲}{(۱+\alpha^۲)^{۵/۲}}\right) = ۰ \Rightarrow$$

$$۱+\alpha^۲-۳\alpha^۲ = ۰ \Rightarrow ۱ = ۲\alpha^۲ \Rightarrow \alpha = \frac{۱}{\sqrt{۲}} = ۰/۷۱$$

$$E_{max} = \frac{۲kq}{d^۲}\frac{(۰/۷۱)}{\left[۱+(۰/۷۱)^۲\right]^{۳/۲}} = ۰/۳۸۵\frac{۲kq}{d^۲}$$

α	۰	۰/۷۱	۱	۲	۳	۴
$E\left(\times\frac{۲kq}{d^۲}\right)$	۰	۰/۳۸۵	۰/۳۵	۰/۱۷۹	۰/۰۹۵	۰/۰۵۷



(ت)

$$E = \frac{E_{max}}{۲} \Rightarrow \frac{۲kq\alpha}{d^۲(۱+\alpha^۲)^{۳/۲}} = \left(\frac{۱}{۲}\right)(۰/۳۸۵)\left(\frac{۲kq}{d^۲}\right)$$

$$\Rightarrow \frac{\alpha}{(۱+\alpha^۲)^{۳/۲}} = ۰/۱۹۲۵ \Rightarrow \frac{\alpha^۲}{۱+\alpha^۶+۳\alpha^۴+۳\alpha^۲} = ۰/۰۳۷$$

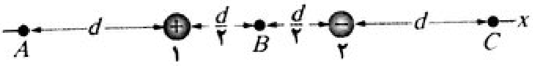
$$\Rightarrow ۰/۰۳۷\alpha^۶ + ۳\times ۰/۰۳۷\alpha^۴ + (۳\times ۰/۰۳۷-۱)\alpha^۲ + ۰/۰۳۷ = ۰$$

$$\Rightarrow \alpha^۶ + ۳\alpha^۴ - ۲۴/۰۲۷\alpha^۲ + ۱ = ۰$$

دو جواب قابل قبول برای این معادله که در فاصله $۰<\alpha<۴$ قرار دارند، جوابهای زیر می‌باشند:

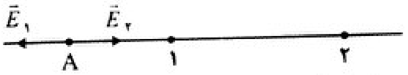
$$\alpha = ۰/۲۱ \ , \ \alpha = ۱/۹۹$$

۸۵- در شکل ۱۸-۶۴، ذرهٔ ۱ با بار $q_۱=۱/۰۰\text{pC}$ و ذرهٔ ۲ با بار $q_۲=۲/۰۰\text{pC}$ در فاصلهٔ $d=۵/۰۰\text{cm}$ از یکدیگر، ثابت شده‌اند. میدان الکتریکی خالص در نقطه‌های (الف) A، (ب) B و (پ) C برحسب نمادگذاری بردار یکه چگونه است؟ (ت) خطهای میدان الکتریکی را رسم کنید؟



شکل ۱۸-۶۴ مسئلهٔ ۸۵

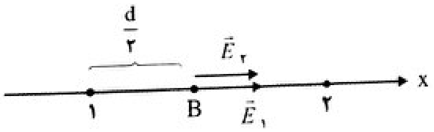
حل: (الف)



$$E_A = -E_۱ + E_۲ = -\frac{kq_۱}{d^۲} + \frac{kq_۲}{(۲d)^۲} = \frac{-kq}{d^۲} + \frac{k(۲q)}{۴d^۲}$$

$$E_A = -\frac{kq}{۲d^۲} = -\frac{(۹\times۱۰^۹)(۱\times۱۰^{-۱۲})}{۲(۰/۰۵)^۲} \Rightarrow \vec{E}_A = -۱/۸\hat{i} \ \text{N/C}$$

(ب)



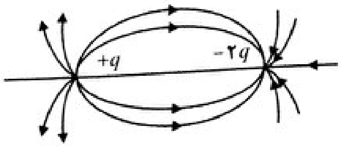
$$E_B = E_۱ + E_۲ = \frac{kq}{\left(\frac{d}{۲}\right)^۲} + \frac{k(۲q)}{\left(\frac{d}{۲}\right)^۲} = \frac{۳kq}{\frac{d^۲}{۴}} = \frac{۱۲kq}{d^۲} \Rightarrow$$

$$E_B = \frac{(۱۲)(۹\times۱۰^۹)(۱\times۱۰^{-۱۲})}{(۰/۰۵)^۲} \Rightarrow \vec{E}_B = ۴۳/۲\hat{i} \ \text{N/C}$$

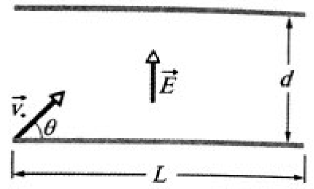
(ب)

$$E_C = E_۱ - E_۲ = \frac{kq}{(۲d)^۲} - \frac{k(۲q)}{d^۲} = \frac{-۷}{۴}\frac{kq}{d^۲} \Rightarrow$$

$$E_C = \left(\frac{-۷}{۴}\right)\left(\frac{(۹\times۱۰^۹)(۱\times۱۰^{-۱۲})}{(۰/۰۵)^۲}\right) \Rightarrow \vec{E}_C = -۶/۳\hat{i} \ \text{N/C}$$



۸۶- در شکل ۱۸-۶۴، میدان الکتریکی رو به بالای یکنواخت $\vec{E}$ به بزرگی $۲/۰۰\times۱۰^{۳}$ N/C با باردارکردن دو صفحهٔ افقی، پایینی به طور مثبت و بالایی به طور منفی، بین آنها ایجاد شده است. طول صفحه‌ها $L=۱۰/۰$cm و فاصلهٔ آنها $d=۲/۰۰$cm است. سپس الکترونی از لبهٔ چپ صفحهٔ پایینی، میان دو صفحه پرتاب می‌شود. سرعت اولیه $\vec{v}_۰$ الکترون که با صفحهٔ پایینی زاویهٔ $\theta=۴۵/۰^{\circ}$ می‌سازد دارای بزرگی $۶/۰۰\times۱۰^{۶}$ m/s است. (الف) آیا الکترون به یکی از صفحه‌ها برخورد می‌کند؟ (ب) اگر بلی، با کدامیک از صفحه‌ها و در چه فاصلهٔ افقی از لبهٔ چپ؟



شکل ۱۸-۶۵ مسئلهٔ ۸۶

حل: (الف)

$$F=ma=eE\Rightarrow$$

$$a=\frac{eE}{m}=\frac{(۱/۶\times۱۰^{-۱۹})(۲\times۱۰^{۳})}{(۹/۱\times۱۰^{-۳۱})}\Rightarrow$$

$$a=۳/۵۲\times۱۰^{۱۴}\ (m/s^{۲})$$

حرکت الکترون مانند حرکت پرتابه خواهد بود بنابراین نقطه اوج آن از رابطه زیر بدست می‌آید:

$$y=\frac{V_۰^{۲}\sin^{۲}\theta_۰}{۲a}=\frac{(۶\times۱۰^{۶})^{۲}(\sin۴۵)^{۲}}{(۲)(۳/۵۲\times۱۰^{۱۴})}=۰/۰۲۵۶\ m$$

$$=۲/۵۶\,cm$$

(ب) پس الکترون با صفحه بالایی برخورد می‌کند. $y > d$

برای یافتن محل برخورد معادله مسیر پرتابه را می‌نویسیم:

$$y=\frac{-ax^{۲}}{۲V_۰^{۲}\cos^{۲}\theta_۰}+x\tan\theta_۰\Rightarrow$$

$$۰/۰۲۵۶=-\frac{(۳/۵۲\times۱۰^{۱۴})x^{۲}}{(۲)(۶\times۱۰^{۶})^{۲}(\cos۴۵)^{۲}}+x\tan۴۵$$

$$۹/۷۸x^{۲}-x+۰/۰۲۵۶=۰\Rightarrow x=۰/۰۲۷۱\ m$$

$$=۲/۷۱\ cm<L$$

۸۷- با داده‌های مسئلهٔ ۶۲، فرض کنید که بار q روی قطره با $q=ne$ داده شده است که در آن n یک عدد درست و e بار بنیادی است. (الف) n را برای هر مقدار دادهٔ q بیابید. (ب) یک برازش *بازگشتی خطی* از مقدارهای q برحسب مقدارهای n انجام دهید و سپس با استفاده از آن برازش، e را پیدا کنید.

حل: در مساله ۶۲ نیز از همین روش استفاده کردیم.
اختلاف بین مقادیر بارهای مختلف روی قطره را بدست می‌آوریم.

$۱/۶۴\times۱۰^{-۱۹}$ C , $۳/۳۵\times۱۰^{-۱۹}$ C , $۳/۸۸\times۱۰^{-۱۹}$ C
$۴/۹۳\times۱۰^{-۱۹}$ C , $۴/۹۵\times۱۰^{-۱۹}$ C , $۶/۴۲\times۱۰^{-۱۹}$ C
$۳/۲۹۶\times۱۰^{-۱۹}$ C , $۱/۶\times۱۰^{-۱۹}$ C , $۳/۲۴\times۱۰^{-۱۹}$ C

کمترین بار یعنی $۱/۶\times۱۰^{-۱۹}$ C را به عنوان بار پایه درنظر می‌گیریم.
مقدار n برای هر یک از بارها به ترتیب به صورت زیر خواهد بود (که در آن به دلیل خطای اندازه‌گیری در محاسبه بار، مقدار اعشار برای n حذف شده است):

۱ ۲ ۲
۳ ۳ ۴
۲ ۱ ۲

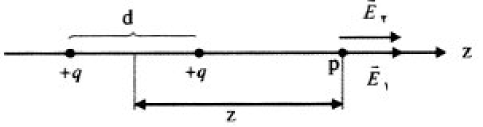
با روش (حداقل میانگین مربع) خطی به مقدار زیر برای بار e می‌رسیم:

$$e=۱/۶\times۱۰^{-۱۹}\ C$$

۸۸- در شکل ۱۸-۸، هر دو بار را مثبت در نظر بگیرید. با فرض آنکه $z \gg d$ باشد، نشان دهید که در این صورت E درنقطهٔ P در آن شکل با رابطهٔ زیر داده می‌شود

$$E=\frac{۱}{۴\pi\varepsilon_۰}\frac{۲q}{z^{۲}}$$

حل:



$$E_p=E_۱+E_۲=\frac{kq}{\left(z+\frac{d}{۲}\right)^{۲}}+\frac{kq}{\left(z-\frac{d}{۲}\right)^{۲}}\Rightarrow$$

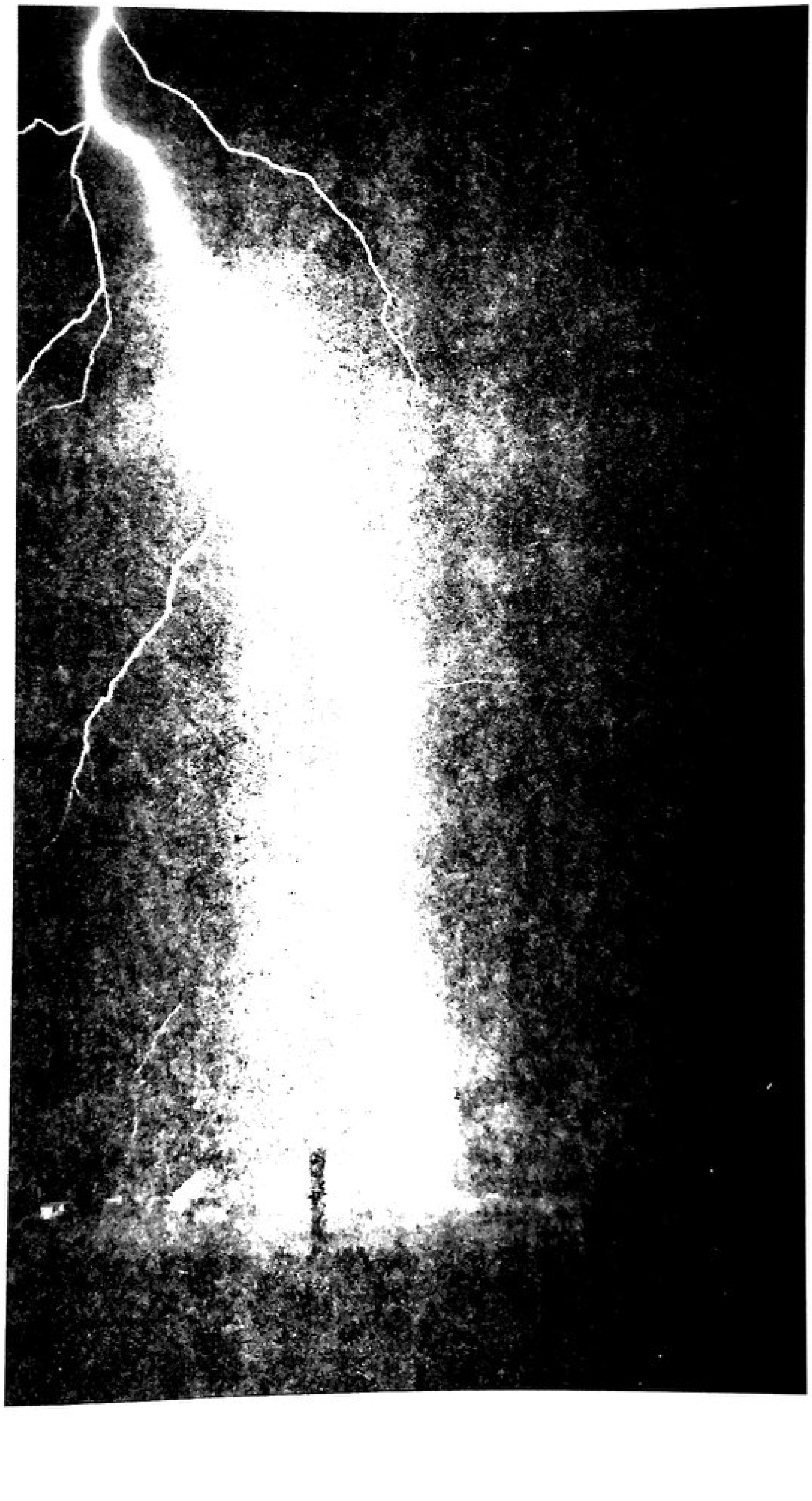
$$E_p=kq\left[\frac{z^{۲}+\frac{d^{۲}}{۴}-zd+z^{۲}+\frac{d^{۲}}{۴}+zd}{\left(z+\frac{d}{۲}\right)^{۲}\left(z-\frac{d}{۲}\right)^{۲}}\right]\Rightarrow$$

$$E_p=۲kq\left(\frac{z^{۲}+\frac{d^{۲}}{۴}}{\left(z^{۲}-\frac{d^{۲}}{۴}\right)^{۲}}\right)$$

$$z>>d\Rightarrow E_p=۲kq\frac{z^{۲}}{z^{۴}}\Rightarrow E_p=\frac{۱}{۴\pi\varepsilon_۰}\frac{۲q}{z^{۲}}$$

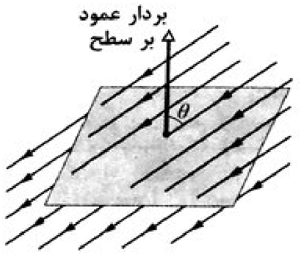
۱۹

قانون گاؤس



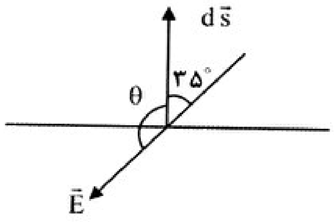
بخش ۱۹-۳ شار میدان الکتریکی

●۱- طول هر ضلع مربع نشان داده شده در شکل ۱۹-۲۶ برابر ۳/۲ mm است. این مربع در میدان الکتریکی یکنواختی با بزرگی $E=۱۸۰۰$ N/C قرار دارد. خطهای این میدان با بردار عمود بر سطح، همان گونه که در شکل نشان داده شده است، زاویه $\theta=۳۵^\circ$ می‌سازند. جهت بردار عمود بر سطح، با فرض آنکه این سطح روی یک وجه جعبه‌ای باشد، «رو به بیرون» است. شار الکتریکی عبوری از این سطح را محاسبه کنید. SSM



شکل ۱۹-۲۶ مسئلهٔ ۱

حل:



$$\Phi=\int \vec{E}\cdot\vec{ds}=\int E\cos(۱۴۵)ds \Rightarrow$$

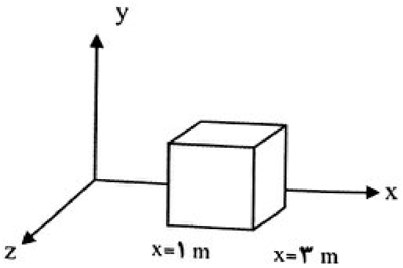
$$\Phi=E\cos(۱۴۵)\int ds=E\cos(۱۴۵)S \Rightarrow$$

$$\Phi=(۱۸۰۰)(\cos۱۴۵)(۳/۲\times۱۰^{-۳})^۲=۰/۰۱۵$$

$$=-۱/۵\times۱۰^{-۲}\ \frac{N\cdot m^۲}{C}$$

●●۲- یک میدان الکتریکی که با $\vec{E}=۴/۰\hat{i}-۳/۰(y^۲+۲/۰)\hat{j}$ داده شده است، از مکعب گاؤسی شکل ۱۹-۵ به ضلع ۲/۰m می‌گذرد. (E برحسب نیوتون بر کولن و x برحسب متر است.) شار الکتریکی عبوری از (الف) وجه بالایی، (ب) وجه پایینی، (پ) وجه سمت چپ، و (ت) وجه عقبی چقدر است؟ (ث) شار الکتریکی خالص عبوری از مکعب چقدر است؟

حل:



ضلع مکعب $a=۳-۱=۲$m

(الف) $\vec{ds}=ds\hat{j}\ ,\ y=۲(m)\ ,\ \vec{E}=۴\hat{i}-۳(۴+۲)\hat{j}\Rightarrow$

$$\vec{E}=۴\hat{i}-۱۸\hat{j}\ ,\ \Phi=\int\vec{E}.\vec{ds}=\int(۴\hat{i}-۱۸\hat{j})\cdot(ds\hat{j})\Rightarrow$$

$$\Phi=-۱۸s=-۱۸(۲)^۲=-۷۲\frac{N\cdot m^۲}{C}$$

(ب)

$$\vec{ds}=-ds\hat{j}\ ,\ y=۰\ ,\ \vec{E}=۴\hat{i}-۶\hat{j}$$

$$\Phi=\int\vec{E}\cdot\vec{ds}=\int(۴\hat{i}-۶\hat{j})\cdot(-ds\hat{j})=۶s=۶(۲)^۲=۲۴\frac{N\cdot m^۲}{C}$$

(پ)

$$\vec{ds}=-ds\hat{i}\ ,\ \Phi=\int\vec{E}\cdot\vec{ds}=\int[۴\hat{i}-۳(y^۲+۲)\hat{j}]\cdot(-ds\hat{i})\Rightarrow$$

$$\Phi=-۴s=-۴(۲)^۲=-۱۶\frac{N\cdot m^۲}{C}$$

(ت)

$$\vec{ds}=-ds\hat{k}\ ,\ \Phi=\int\vec{E}\cdot\vec{ds}=\int[۴\hat{i}-۳(y^۲+۲)\hat{j}]\cdot(-ds\hat{k})=۰$$

چون $\vec{E}$ هیچ مؤلفه‌ای در راستای $\hat{k}$ ندارد شار عبوری از این سطح صفر است.

(ث)

شار عبوری از وجه سمت راست و جلویی را نیز محاسبه می‌کنیم.

وجه جلویی:

$$\vec{ds}=ds\hat{k}\ ,\ \Phi=\int\vec{E}.\vec{ds}=\int[۴\hat{i}-۳(y^۲+۲)\hat{j}]\cdot(ds\hat{k})=۰$$

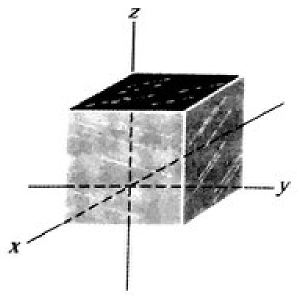
وجه سمت راستی:

$$\vec{ds}=ds\hat{i}\ ,\ \Phi=\int\vec{E}\cdot\vec{ds}=\int[۴\hat{i}-۳(y^۲+۲)\hat{j}]\cdot(ds\hat{i})\Rightarrow$$

$$\Phi=۴s=۴(۲)^۲=۱۶\frac{N\cdot m^۲}{C}$$

$$\Phi_{total}=-۷۲+۲۴-۱۶+۰+۰+۱۶=-۴۸\ \frac{N\cdot m^۲}{C}$$

●●۳- طول هر ضلع مکعب شکل ۱۹-۲۷ برابر ۱/۴۰ m است و این مکعب همان گونه که نشان داده شده است در میدان الکتریکی یکنواختی قرار گرفته است. مطلوب است تعیین شار میدان الکتریکی عبوری از وجه سمت راست، در صورتی که میدان الکتریکی برحسب نیوتون بر کولن با (الف) $۶/۰۰\ \hat{i}$، (ب) $-۲/۰۰\ \hat{j}$، و (پ) $-۳/۰۰\hat{i}+۴/۰۰\hat{k}$ داده شده باشد. (ت) شار کل عبوری از مکعب برای هر یک از این میدانها چقدر است؟



شکل ۱۹-۲۷ مسئله‌های ۳، ۴، و ۱۱

حل:

$\vec{ds} = ds\hat{j}$

(الف)

$\Phi = \int \vec{E}.\vec{ds} \Rightarrow$

$\Phi = \int (۶\hat{i}).(ds\hat{j}) = ۰$

(ب) $\Phi = \int \vec{E}\cdot\vec{ds} = \int(-۲\hat{j})\cdot(ds\hat{j}) = -۲s = -۲(۱/۴)^۲ \Rightarrow$

$\Phi = -۳/۹۲ \ \frac{N\cdot m^۲}{C}$

(پ) $\Phi = \int \vec{E}\cdot\vec{ds} = \int(-۳\hat{i} + ۴\hat{k})\cdot(ds\hat{j}) = ۰$

(ت) $\varepsilon_۰ \Phi_{total} = q \quad , \quad q = ۰ \Rightarrow \Phi_{total} = ۰$

در هر سه حالت، شار کل صفر است زیرا میدان یکنواخت است و باری درون سطح بسته وجود ندارد.

بخش ۱۹-۴ قانون گاؤس

●۴- در هر نقطه‌ای روی سطح مکعب نشان داده شده در شکل ۱۹-۲۷، میدان الکتریکی موازی محور z است. طول هر ضلع مکعب $۳/۰ \ m$ است. در وجه بالایی مکعب $\vec{E} = -۳۴\hat{k}$ N/C، و در وجه پایینی $\vec{E} = +۲۰\hat{k}$ N/C است. بار خالص محصور شده در داخل این مکعب را تعیین کنید.

حل: چون میدان موازی محور z است شاری که از سطح جانبی مکعب می‌گذرد صفر است و شار فقط از سطح بالایی و پایینی مکعب می‌گذرد.

شاری که از سطح بالایی می‌گذرد برابر است با:

$$\Phi = \int \vec{E}\cdot\vec{ds} = \int(-۳۴\hat{k}).(ds\hat{k}) = (-۳۴)(۹) = -۳۰۶ \ V\cdot m$$

شاری که سطح پایینی می‌گذرد برابر است با:

$$\Phi = \int \vec{E}\cdot\vec{ds} = \int(-۲۰\hat{k})\cdot(-ds\hat{k}) = (-۲۰)(-۹) = ۱۸۰ \ V\cdot m$$

$$\Phi_{total} = -۳۰۶ - ۱۸۰ = -۴۸۶ \ V\cdot m$$

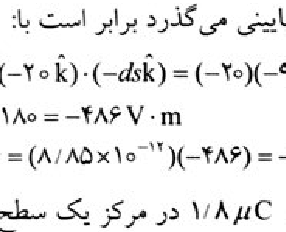
$$\varepsilon_۰\Phi_{total} = q \Rightarrow q = (۸/۸۵\times۱۰^{-۱۲})(-۴۸۶) = -۴/۳\times۱۰^{-۹} \ C$$

●۵- بار نقطه‌ای $۱/۸\mu C$ در مرکز یک سطح گاؤسی مکعبی به ضلع ۵۵cm قرار دارد. شار الکتریکی خالص عبوری از این سطح چقدر است؟

حل: چون مکعب یک سطح بسته است:

$$\varepsilon_۰\Phi = q \Rightarrow \phi = \frac{q}{\varepsilon_۰} = \frac{۱/۸\times۱۰^{-۶}}{۸/۸۵\times۱۰^{-۱۲}} = ۲/۰۳\times۱۰^{۵} \ V\cdot m$$

●۶- در شکل ۱۹-۲۸، یک تور پروانه‌گیری در میدان الکتریکی یکنواختی به بزرگی $E = ۳/۰$mN/C قرار دارد. قاب تور، دایره‌ای به شعاع $a = ۱۱$cm و عمود بر این میدان الکتریکی قرار گرفته است. تور دارای بار خالصی نیست. شار الکتریکی عبوری از تور را پیدا کنید.



شکل ۱۹-۲۸ مسئلهٔ ۶

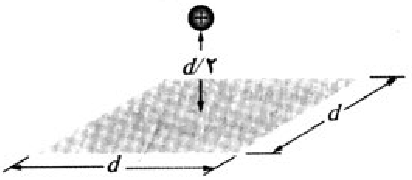
حل: دهانه و بدنه تور تشکیل یک سطح بسته می‌دهند که هیچ چشمهٔ باری داخل آن محصور نشده است. بنابراین شار عبوری از سطح بسته تور برابر صفر است.

$$\Phi_{total} = \oint \vec{E}\cdot\vec{ds} = \int_I \vec{E}\cdot\vec{ds} + \int_{II} \vec{E}\cdot\vec{ds} = ۰$$

$$\Phi_I = \int_I \vec{E}\cdot\vec{ds} = ES = (۳\times۱۰^{-۳})(\pi)(۰/۱۱)^۲ = ۱/۱۴\times۱۰^{-۴} \ V\cdot m$$

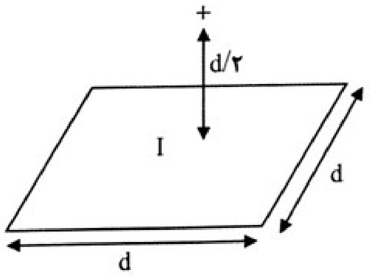
$$\Phi_{II} = -\Phi_I = -۱/۱۴\times۱۰^{-۴} \ V\cdot m$$

●۷- در شکل ۱۹-۲۹، یک پروتون به طور مستقیم به فاصلهٔ $d/۲$ بالای مرکز مربعی به ضلع d قرار دارد. بزرگی شار الکتریکی عبوری از مربع چقدر است؟ (*راهنمایی:* فرض کنید این مربع، یک وجه از مکعبی به ضلع d است.)



شکل ۱۹-۲۹ مسئلهٔ ۷

حل:

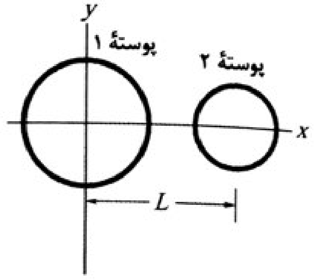


مربع را قسمتی از سطح مکعبی به ضلع d در نظر می‌گیریم که پروتون در مرکز آن قرار دارد. از هر وجه مکعب شار یکسان می‌گذرد.

$$\varepsilon_۰\Phi_{total} = q \Rightarrow \Phi_{total} = \frac{q}{\varepsilon_۰} = \frac{۱/۶\times۱۰^{-۱۹}}{۸/۸۵\times۱۰^{-۱۲}} = ۱/۸۱\times۱۰^{-۸} \ V\cdot m$$

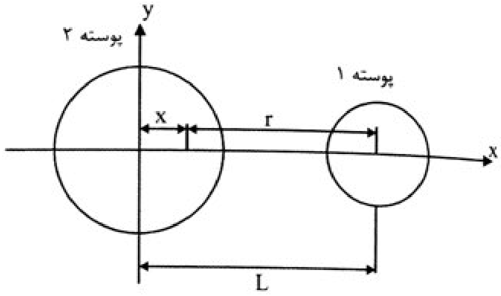
$$\Phi_۱ = \frac{\Phi_{total}}{۶} = \frac{۱/۸۱\times۱۰^{-۸}}{۶} = ۳/۰۱\times۱۰^{-۹} \ V\cdot m$$

●●۸- شکل ۱۹-۳۰ دو پوستهٔ کروی نارسانا را نشان می‌دهد که در مکان خود ثابت شده‌اند. پوستهٔ ۱ دارای چگالی بار سطحی یکنواخت $+۶/۰ \ \mu C/m^۲$ روی سطح خارجی خود و شعاع $۳/۰$ cm است؛ پوستهٔ ۲ دارای چگالی بار سطحی یکنواخت $+۴/۰ \ \mu C/m^۲$ روی سطح خارجی خود و شعاع $۲/۰$ cm است؛ مرکز پوسته‌ها به فاصلهٔ $L = ۱۰$ cm از هم قرار گرفته‌اند. میدان الکتریکی خالص در $x = ۲/۰$ cm، برحسب نماد گذاری بردار یکه چیست؟



شکل ۱۹-۳۰ مسئلهٔ ۸

حل:



نقطه $x=۲cm$ درون پوسته ۱ قرار دارد و بنابراین میدان ناشی از آن در نقطه موردنظر صفر است. این نقطه خارج پوسته ۲ قرار دارد. بنابراین میدان ناشی از پوسته ۲ را در نقطه موردنظر به دست می‌آوریم.

$$E_۲=\frac{q}{۴\pi\varepsilon_۰ r^۲}=\frac{\sigma ۴\pi R_۲^۲}{۴\pi\varepsilon_۰ r^۲}=\frac{\sigma R_۲^۲}{\varepsilon_۰ r^۲}$$

$$E_۲=\frac{(۴\times۱۰^{-۶})(۰/۰۲)^۲}{(۸/۸۵\times۱۰^{-۱۲})(۰/۰۸)^۲}=۲/۸۲\times۱۰^۴\ \frac{N}{C}$$

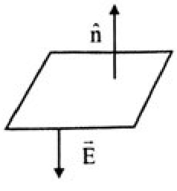
$$E=-۲/۸۲\times۱۰^۴\ \hat{i}\ \frac{N}{C}$$

●●۹- به طور تجربی معلوم شده است که میدان الکتریکی در ناحیهٔ معینی از جو زمین به طور قائم رو به پایین است. بزرگی میدان الکتریکی در ارتفاع ۳۰۰ m برابر با ۶۰/۰ N/C، و در ارتفاع ۲۰۰m برابر با ۱۰۰ N/C است. مقدار بار خالص محصور شده در مکعبی به ضلع ۱۰۰ m که وجوه افقی آن در ارتفاعهای ۲۰۰ و ۳۰۰ متر قرار دارند، چقدر است؟ **SSM**

حل: چون میدان قائم و به طرف پایین است شار فقط از سطح بالایی و پایینی این مکعب می‌گذرد.

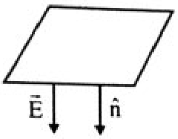
برای سطح بالایی:

$$\Phi_۱=-Es=-(۶۰)(۱۰^۴)=-۶\times۱۰^۵\ (V\cdot m)$$



برای سطح پایینی:

$$\Phi_۲=Es=(۱۰۰)(۱۰^۴)=۱۰^۶\ V\cdot m$$



$$\Phi_{total}=-۶\times۱۰^۵+۱۰^۶=۴\times۱۰^۵\ V\cdot m$$

$$\varepsilon_۰\Phi_{total}=q\Rightarrow q=(۸/۸۵\times۱۰^{-۱۲})(۴\times۱۰^۵)=۳/۵۴\times۱۰^{-۶}\ C$$

●●۱۰- وقتی شیر دوش حمام دربسته‌ای را باز می‌کنیم، ترشح آب از وان خالی می‌تواند هوای داخل حمام را با یونهای باردار شدهٔ منفی پر کند و یک میدان الکتریکی به بزرگی ۱۰۰۰ N/C درهوابه‌وجودآورد. حمامی را به ابعاد ۲/۵ m×۳/۰m×۲/۰ m در نظر بگیرید. میدان الکتریکی را در امتداد سقف، کف و چهار دیواره ، یکنواخت و عمود بر این سطحها و بزرگی آن را ۶۰۰ N/C بگیرید. همچنین فرض کنید که این سطحها یک سطح گاؤسی بسته را به دور هوای حمام تشکیل می‌دهند. (الف) چگالی بار حجمی ρ و (ب) تعداد بارهای بنیادی اضافی e بر متر مکعب را در هوای حمام محاسبه کنید.

حل: ابتدا از قانون گاوس بار درون فضای حمام را به دست می‌آوریم.

(الف)

$$S=۲S_۱+۲S_۲+۲S_۳=۲[(۲/۵)(۲)+(۲/۵)(۳)+(۲)(۳)]=۳۷\ m^۲$$

در تمام سطوح $\vec{E}$ عمود بر آنهاست، پس:

$$\Phi=ES=(۶۰۰)(۳۷)=۲/۲۲\times۱۰^۴\ V\cdot m$$

$$\varepsilon_۰\Phi=q\Rightarrow(۸/۸۵\times۱۰^{-۱۲})(۲/۲۲\times۱۰^۴)=۱/۹۶\times۱۰^{-۷}\ C$$

بارهای محصور شده، یون‌های منفی در نظر گرفته شده‌اند.

$$\rho=\frac{q}{V}=\frac{-۱/۹۶\times۱۰^{-۷}}{(۲/۵)(۲)(۳)}=-۱/۳۱\times۱۰^{-۸}\ \frac{C}{m^۳}$$

(ب)

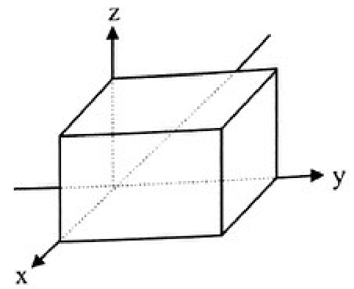
$$q=Ne\Rightarrow N=\frac{q}{e}=\frac{۱/۳۱\times۱۰^{-۸}}{۱/۶\times۱۰^{-۱۹}}=۸/۱۸\times۱۰^{۱۰}$$

●●۱۱- شکل ۱۹-۲۷ یک سطح گاؤسی به شکل مکعب و به طول ضلع ۱/۴۰ m را نشان می‌دهد. اگر $\vec{E}(=۳/۰۰\ y\hat{j})$ N/C باشدکه در آن y برحسب متر است، (الف) شار خالص Φ عبوری از این سطح و (ب) بار خالص q_{enc} محصور شده توسط این سطح چقدر است؟ اگر

$$\vec{E}=[-۴/۰۰\hat{i}+(۶/۰۰+۳/۰۰y)\hat{j}]\ N/C$$

باشد، (پ) Φ و (ت) q_{enc} چقدر است؟ **ILW**

حل:



(الف) چون میدان الکتریکی در جهت محور y است شار فقط از دو سطح سمت راست و چپ می‌گذرد.

سطح سمت چپ: $y=0 \Rightarrow \vec{E}=0 \Rightarrow \Phi_1=0$

سطح سمت راست:

$$y=1.4\ \text{m} \Rightarrow \vec{E}=(3)(1.4)\hat{j}=4.2\hat{j}\,\frac{N}{C}$$

$$\Phi_2=Es=(4.2)(1.4)^2=8.232\ V\cdot m$$

$$\Rightarrow \phi_{total}=8.232\ V\cdot m$$

(ب) $q=\varepsilon_0\Phi_{total}=(8.85\times10^{-12})(8.232)=7.28\times10^{-11}\ C$

(پ) شاری که از سطح بالایی و پایینی می‌گذرد صفر است.

$$\vec{E}=[-4\hat{i}+(6+3y)\hat{j}]\,\frac{N}{c}$$

سطح سمت چپ: $y=0 \Rightarrow \vec{E}=(-4\hat{i}+6\hat{j})\,\frac{N}{c}$

$$\Phi_1=\int \vec{E}\cdot\vec{ds}=\int(-4\hat{i}+6\hat{j})\cdot(-ds\,\hat{j})=-6s=(-6)(1.4)^2$$
$$=-11.76\ V\cdot m$$

سطح سمت راست: $y=1.4\ \text{m} \Rightarrow \vec{E}=(-4\hat{i}+10.2\hat{j})\,\frac{N}{c}$

$$\Phi_2=(-4\hat{i}+10.2\hat{j})\cdot(1.4)^2\hat{j}=19.992\ V\cdot m$$

سطح پشت:

$$\Phi_3=[-4\hat{i}+(6+3y)\hat{j}]\cdot(1.4)^2(-\hat{i})=7.84\ V\cdot m$$

سطح جلویی:

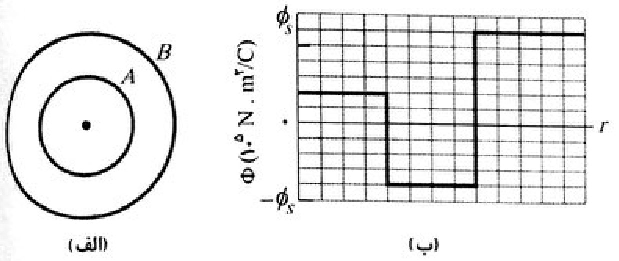
$$\Phi_4=[-4\hat{i}+(6+3y)\hat{j}]\cdot(1.4)^2\hat{i}=-7.84\ V\cdot m$$

$$\Phi_{total}=-11.76+19.992+7.84-7.84=8.232\ V\cdot m$$

(ت)

$$q=\varepsilon_0\Phi_{total}=(8.85\times10^{-12})(8.232)=7.28\times10^{-11}\ C$$

●●۱۲- *شار و پوسته‌های نارسانا.* یک ذرهٔ باردار در مرکز دو پوستهٔ کروی هم‌مرکز که بسیار نازک و از جنس ماده‌ای نارسانا هستند، معلق شده است. شکل ۱۹-۳۱ الف سطح مقطع آنها را نشان می‌دهد. شکل ۱۹-۳۱ ب شار خالص Φ عبوری از یک کرهٔ گاؤسی به مرکز ذرهٔ باردار را برحسب تابعی از شعاع r کره به دست می‌دهد. مقیاس محور عمودی با $\phi_s=5.0\times10^5\ N.m^2/C$ مشخص شده است. (الف) بار ذرهٔ مرکزی چقدر است؟ بارخالص (ب) پوستهٔ A و (پ) پوستهٔ B چقدر است؟



شکل ۱۹-۳۱ مسئلهٔ ۱۲

حل: (الف)

$$r<r_A\quad \Phi_1=2\times10^5\,\frac{N\cdot m^2}{C}\Rightarrow$$

$$q_1=\varepsilon_0\Phi_1=(8.85\times10^{-12})(2\times10^5)\Rightarrow q_1=1.77\times10^{-6}\ C$$

(ب) $r_A<r<r_B\quad,\quad \Phi_2=-4\times10^5\,\frac{N\cdot m^2}{C}\Rightarrow q_2=\varepsilon_0\phi_2\Rightarrow$

$$q_2=(8.85\times10^{-12})(-4\times10^5)=-3.54\times10^{-6}\ C$$

$$q_A=q_2-q_1=-3.54\times10^{-6}-1.77\times10^{-6}=-5.31\times10^{-6}\ C$$

راه دوم: $\varepsilon_0\Phi_2=q_1+q_A\Rightarrow q_A=\varepsilon_0\Phi_2-q_1\Rightarrow$

$$q_A=(8.85\times10^{-12})(-4\times10^5)-(1.77\times10^{-6})$$
$$=-5.31\times10^{-6}\ C$$

(پ)

$$r>r_B\quad \varepsilon_0\Phi_3=q_1+q_A+q_B\Rightarrow q_B=\varepsilon_0\Phi_3-q_1-q_A\Rightarrow$$

$$q_B=(8.85\times10^{-12})(6\times10^5)-(1.77\times10^{-6})-(-5.31\times10^{-6})$$

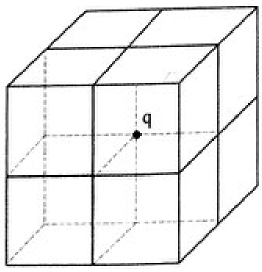
$$=8.85\times10^{-6}\ C$$

●●۱۳- ذره‌ای به بار $+q$ در یکی از گوشه‌های یک مکعب گاؤسی قرار گرفته است. برحسب مضربی از q/ε_0، مطلوب است شار عبوری از (الف) هر وجه مکعب که آن گوشه را می‌سازد و (ب) هر یک از وجوه دیگر مکعب.

حل: هفت مکعب دیگر به ضلع a کنار این مکعب به گونه‌ای قرار می‌دهیم که مکعبی به ضلع $2a$ به وجود آید به طوری که بار q در مرکز آن قرار گیرد.

شار عبوری از مکعب جدید برابر $\Phi_E=\dfrac{q}{\varepsilon_0}$ است.

(الف) از روی شکل پیداست شاری که از سطوح مجاور بار می‌گذرد صفر است.



(ب) هر وجه مکعب جدید از ۴ سطح مربعی تشکیل شده است و بنابراین شار عبوری از هر سطح مربعی برابر با $\Phi=\dfrac{\Phi E}{6\times4}=\dfrac{q}{24\varepsilon_0}$ می‌شود. این همان شار عبوری از سه

وجه‌ای از مکعب اصلی است که با q تلاقی ندارند. بنابراین شار عبوری از آن سه وجه‌ای که با q تلاقی دارد برابر با صفر است.

راه دوم: شاری که از مکعب اصلی می‌گذرد $\frac{1}{8}$ مکعب جدید است. شاری که از سه وجه دیگر می‌گذرد به دلیل تقارن یک سوم شار کل است.

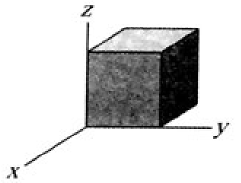
$$\Phi = \frac{\Phi E}{8} = \frac{q}{8\varepsilon_0}$$

$$\Phi' = \frac{1}{3}\frac{q}{8\varepsilon_0} = \frac{q}{24\varepsilon_0}$$

۱۴●●- شکل ۱۹-۳۲ سطح گاوسی بسته‌ای به شکل مکعب با طول ضلع ۲/۰۰ m را نشان می‌دهد. این مکعب در ناحیه‌ای که میدان الکتریکی در آنجا با

$$\vec{E} = (3.00\,x + 4.00)\hat{i} + 6.00\hat{j} + 7.00\hat{k}\ \text{N/C}$$

داده می‌شود، قرار دارد که در آن x برحسب متر است. چه بار خالصی توسط مکعب در بر گرفته شده است؟



شکل ۱۹-۳۲ مسئلهٔ ۱۴

حل: جمله‌های ثابت سهمی در شار میدان الکتریکی ندارند (معادله‌های ۱۹-۴ و ۱۹-۷ را ببینید).
شاری که از هر وجه مکعب می‌گذرد به دست می‌آوریم.
سطح سمت چپ:

$$\Phi_1 = \int \vec{E}.\vec{ds} = \int [(3x+4)\hat{i} + 6\hat{j} + 7\hat{k}]\cdot(-ds\hat{j}) \Rightarrow$$

$$\Phi_1 = -6s = -6(2)^2 = -24\ \frac{\text{N}\cdot\text{m}^2}{\text{C}}$$

سطح سمت راست:

$$\Phi_2 = \int [(3x+4)\hat{i} + 6\hat{j} + 7\hat{k}]\cdot(ds\hat{j}) = 6(2)^2 = 24\ \frac{\text{N}\cdot\text{m}^2}{\text{C}}$$

سطح بالایی:

$$\Phi_3 = \int [(3x+4)\hat{i} + 6\hat{j} + 7\hat{k}].(ds\hat{k}) = 7(2)^2 = 28\ \frac{\text{N}\cdot\text{m}^2}{\text{C}}$$

سطح پایینی:

$$\Phi_4 = \int [(3x+4)\hat{i} + 6\hat{j} + 7\hat{k}].(ds\hat{k}) = -7(2)^2 = 28\ \frac{\text{N}\cdot\text{m}^2}{\text{C}}$$

سطح جلویی:

$$x = 0 \Rightarrow \Phi_5 = \int [4\hat{i} + 6\hat{j} + 7\hat{k}]\cdot(ds\hat{i}) = 4(2)^2 = 16\ \frac{\text{N}\cdot\text{m}^2}{\text{C}}$$

سطح پشتی:

$$x = -2m \Rightarrow \Phi_6 = \int [-2\hat{i} + 6\hat{j} + 7\hat{k}]\cdot(-ds\hat{i}) = 2(2)^2 = 8\ \frac{\text{N}\cdot\text{m}^2}{\text{C}}$$

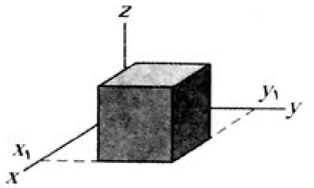
$$\Phi_{\text{total}} = -24 + 24 + 28 - 28 + 16 + 8 = 24\ \frac{\text{N}\cdot\text{m}^2}{\text{C}}$$

$$q = \varepsilon_0 \Phi_{\text{total}} = (8.85\times10^{-12})(24) = 2.124\times10^{-10}\ \text{C}$$

۱۵●●●- شکل ۱۹-۳۳ سطح گاوسی بسته‌ای به شکل مکعب با طول ضلع ۲/۰۰m را نشان می‌دهد که یکی از گوشه‌های آن در $x_1 = 5.00\text{m}$ ، $y_1 = 4.00\text{m}$ قرار دارد. این مکعب در ناحیه‌ای که میدان الکتریکی در آنجا با

$$\vec{E} = -3.00\hat{i} - 4.00y^2\hat{j} + 3.00\hat{k}\ \text{N/C}$$

داده می‌شود، قرار دارد که در آن y برحسب متر است. چه بار خالصی توسط مکعب در برگرفته شده است؟



شکل ۱۹-۳۳ مسئلهٔ ۱۵

حل: شاری که از هر وجه این مکعب می‌گذرد به دست می‌آوریم.

سطح سمت راست: $y = 4\text{m} \quad , \quad \hat{n} = \hat{j}$

$$\Phi_1 = (-3\hat{i} - 64\hat{j} + 3\hat{k})\cdot(4\hat{j}) = -256\ \frac{\text{N}\cdot\text{m}^2}{\text{C}}$$

سطح سمت چپ:

$y = 2\text{m} \quad , \quad \hat{n} = -\hat{j}$

$$\Phi_2 = (-3\hat{i} - 16\hat{j} + 3\hat{k})\cdot(-4\hat{j}) = 64\ \frac{\text{N}\cdot\text{m}^2}{\text{C}}$$

سطح بالایی:

$$\Phi_3 = (3)(4) = 12\ \frac{\text{N}\cdot\text{m}^2}{\text{C}}$$

سطح پایینی:

$$\Phi_4 = (3)(-4) = -12\ \frac{\text{N}\cdot\text{m}^2}{\text{C}}$$

سطح پشتی:

$$\Phi_5 = (-3)(-4) = 12\ \frac{\text{N}\cdot\text{m}^2}{\text{C}}$$

سطح جلویی:

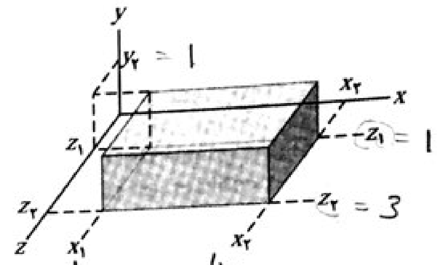
$$\Phi_6 = (-3)(4) = -12\ \frac{\text{N}\cdot\text{m}^2}{\text{C}}$$

$$\Phi_{\text{total}} = -256 + 64 + 12 - 12 + 12 - 12 = -192\ \frac{\text{N}\cdot\text{m}^2}{\text{C}}$$

$$q = \varepsilon_0 \Phi_{\text{total}} = (8.85\times10^{-12})(-192) = -1.7\times10^{-9}\ \text{C}$$

۱۶●●●- سطح گاوسی جعبه مانند شکل ۱۹-۳۴ بار خالص $+24.0\ \varepsilon_0 C$ را در بر دارد و در میدان الکتریکی یک الکترون که با $\vec{E} = [(10.0 + 2.00x)\hat{i} - 3.00\hat{j} + bz\hat{k}]\text{N/C}$ داده می‌شود قرار دارد، x و z برحسب متر و b یک ثابت است. وجه پایینی در صفحهٔ xz و وجه بالایی در صفحهٔ افقی است و از

$y_۲ = ۱/۰۰\ \text{m}$ می‌گذرد. به ازای $x_۱ = ۱/۰۰\ \text{m}$ ، $x_۲ = ۴/۰۰\ \text{m}$ ، $z_۱ = ۱/۰۰\ \text{m}$ ، و $z_۲ = ۳/۰۰\ \text{m}$ ، b چقدر است؟



شکل ۱۹-۳۴ مسئلهٔ ۱۶

حل: ابتدا شار میدان الکتریکی را که از صفحات سطح گاوس می‌گذرد به دست می‌آوریم.

سطح سمت چپ:

$$x_۱ = ۱\ \text{m}$$

$$\Phi_۱ = \int (۱۲\hat{i} - ۳\hat{j} + bz\hat{k}) \cdot (-ds\,\hat{i}) = (-۱۲)(z_۲ - z_۱)(y_۲ - y_۱) \Rightarrow$$

$$\Phi_۱ = (-۱۲)(۳-۱)(۱-۰) = (-۱۲)(۲)(۱) = -۲۴\ \frac{\text{N}\cdot\text{m}^۲}{\text{C}}$$

سطح سمت راست:

$$x_۲ = ۴\text{m}$$

$$\Phi_۲ = \int (۱۸\hat{i} - ۳\hat{j} + bz\hat{k}) \cdot (ds\hat{i}) = ۱۸\,(y_۲ - y_۱)(z_۲ - z_۱) \Rightarrow$$

$$\Phi_۲ = (۱۸)(۱)(۲) = ۳۶\ \frac{\text{N}\cdot\text{m}^۲}{\text{C}}$$

سطح پایینی:

$$\Phi_۳ = [(۱۰ + ۲x)\hat{i} - ۳\hat{j} + bg\hat{k}] \cdot (-s\,\hat{j}) = ۳(x_۲ - x_۱)(z_۲ - z_۱) \Rightarrow$$

$$\Phi_۳ = (۳)(۴-۱)(۳-۱) = (۳)(۳)(۲) = ۱۸\ \frac{\text{N}\cdot\text{m}^۲}{\text{C}}$$

سطح بالایی:

$$\Phi_۴ = [(۱۰ + ۲x)\hat{i} - ۳\hat{j} + bz\hat{k}] \cdot (s\hat{j}) = -۳(x_۲ - x_۱)(z_۲ - z_۱) \Rightarrow$$

$$\Phi_۴ = (-۳)(۳)(۲) = -۱۸\ \frac{\text{N}\cdot\text{m}^۲}{\text{C}}$$

سطح پشتی:

$$z_۱ = ۱\ \text{m}$$

$$\Phi_۵ = [(۱۰ + ۲x)\hat{i} - ۳\hat{j} + b\hat{k}] \cdot (-s\hat{k}) = -b(x_۲ - x_۱)(y_۲ - y_۱) \Rightarrow$$

$$\Phi_۵ = -b(۳)(۱) = -۳b\ \frac{\text{N}\cdot\text{m}^۲}{\text{C}}$$

سطح جلویی:

$$z_۲ = ۳\text{m}$$

$$\Phi_۶ = [(۱۰ + ۲x)\hat{i} - ۳\hat{j} + ۳b\hat{k}].(s\hat{k}) = ۳b(x_۲ - x_۱)(y_۲ - y_۱) \Rightarrow$$

$$\Phi_۶ = ۳b(۳)(۱) = ۹\,b\ \frac{\text{N}\cdot\text{m}^۲}{\text{C}}$$

$$\Phi_{\text{total}} = -۲۴ + ۳۶ + ۱۸ - ۱۸ - ۳b + ۹b = ۱۲ + ۶b\ \frac{\text{N}\cdot\text{m}^۲}{\text{C}}$$

از طرفی:

$$\varepsilon_۰ \Phi_{\text{total}} = q \Rightarrow \Phi_{\text{total}} = \frac{q}{\varepsilon_۰} = \frac{۲۴\varepsilon_۰}{\varepsilon_۰} = ۲۴\ \frac{\text{N}\cdot\text{m}^۲}{\text{C}}$$

$$۱۲ + ۶b = ۲۴ \Rightarrow b = ۲\ \frac{\text{N}}{\text{cm}}$$

●**۱۷-** فضاپیماهایی که از کمربندهای تابشی زمین می‌گذرند ممکن است با تعداد قابل توجهی از الکترونها برخورد کنند. زیاد شدن بار ایجاد شده بر اثر این برخوردها می‌تواند به اجزای الکترونیکی فضا پیما آسیب برساند و عملکردهای آن را مختل کند. فرض کنید یک ماهوارهٔ فلزی کروی به قطر $۱/۳\ \text{m}$ در یک چرخش مداری، بار $۲/۴\,\mu\text{C}$ را به دست آورد. (الف) چگالی بار سطحی حاصل را به دست آورید. (ب) بزرگی میدان الکتریکی حاصل از این بار سطحی را درست بیرون سطح ماهواره محاسبه کنید.

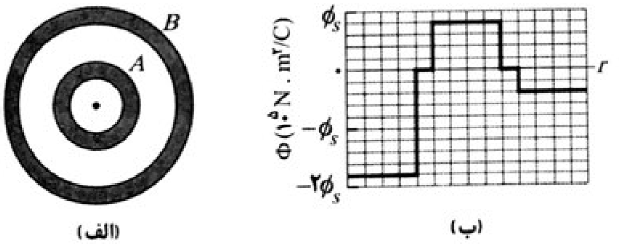
حل: (الف)

$$\sigma = \frac{q}{A} = \frac{q}{۴\pi R^۲} = \frac{۲/۴ \times ۱۰^{-۶}}{۴\pi (۰/۶۵)^۲} = ۴/۵۲ \times ۱۰^{-۷}\ \frac{\text{C}}{\text{m}^۲}$$

(ب)

$$E = \frac{\sigma}{\varepsilon_۰} = \frac{۴/۵۲ \times ۱۰^{-۷}}{۸/۸۵ \times ۱۰^{-۱۲}} = ۵/۱۱ \times ۱۰^۴\ \frac{\text{N}}{\text{C}}$$

●**۱۸-** *شار و پوسته‌های رسانا.* ذرهٔ بارداری در مرکز دو پوستهٔ کروی رسانای هم‌مرکز قرار داده شده است. شکل ۱۹-۳۵ الف سطح مقطع آنها را نشان می‌دهد. شکل ۱۹-۳۵ ب شار خالص Φ عبوری از یک سطح گاوسی به مرکز ذرهٔ باردار را برحسب تابعی از شعاع r کره به دست می‌دهد. مقیاس محور قائم با $\Phi_s = ۵/۰ \times ۱۰^۵\ \text{N.m}^۲/\text{C}$ مشخص شده است. (الف) بار ذرهٔ مرکزی و بارهای خالص (ب) پوستهٔ A و (پ) پوستهٔ B چقدر است؟ GO



شکل ۱۹-۳۵ مسئلهٔ ۱۸

حل: (الف)

$$r < r_A \quad , \quad \varepsilon_۰ \Phi_۱ = q_۱ \Rightarrow q_۱ = (۸/۸۵ \times ۱۰^{-۱۲})(-۹ \times ۱۰^۵) \Rightarrow$$

$$q_۱ = -۷/۹۶۵ \times ۱۰^{-۶}\ \text{C}$$

(ب)

$$r_A < r < r_B \quad , \quad \varepsilon_۰ \Phi_۲ = q_۱ + q_A \Rightarrow q_A = \varepsilon_۰ \Phi_۲ - q_۱ \Rightarrow$$

$$q_A = (۸/۸۵ \times ۱۰^{-۱۲})(۴ \times ۱۰^۵) + ۷/۹۶۵ \times ۱۰^{-۶}$$

$$= ۱/۱۵ \times ۱۰^{-۵}\ \text{C}$$

(پ)

$$r > r_B \quad , \quad \varepsilon_۰ \Phi_۳ = q_۱ + q_A + q_B \Rightarrow q_B = \varepsilon_۰ \Phi_۳ - q_۱ - q_A \Rightarrow$$

$$q_B = (۸/۸۵ \times ۱۰^{-۱۲})(-۲ \times ۱۰^۵) + ۷/۹۶۵ \times ۱۰^{-۶} - ۱/۱۵ \times ۱۰^{-۵}$$

$$= -۵/۳۰۵ \times ۱۰^{-۶}\ \text{C}$$

● **۱۹**- یک کرهٔ رسانای باردار یکنواخت به قطر $۱/۲\ \mathrm{m}$ دارای چگالی بار سطحی $۸/۱\ \mu\mathrm{C/m^۲}$ است. (الف) بار خالص روی کره را پیدا کنید. (ب) شار الکتریکی کلی که از سطح این کره خارج می‌شود، چقدر است؟ **SSM**

حل: (الف)

$$q=\sigma A=\sigma ۴\pi R^۲=(۸/۱\times ۱۰^{-۶})(۴\pi)(۰/۶)^۲$$
$$=۳/۶۶\times ۱۰^{-۵}\ \mathrm{C}$$

(ب)

$$\varepsilon_\circ \Phi=q\Rightarrow \Phi=\frac{q}{\varepsilon_\circ}=\frac{۳/۶۶\times ۱۰^{-۵}}{۸/۸۵\times ۱۰^{-۱۲}}=۴/۱۴\times ۱۰^{۶}\ \frac{\mathrm{N\cdot m^۲}}{\mathrm{C}}$$

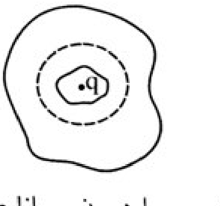
● **۲۰**- میدان الکتریکی بالای سطح غلتک باردار دستگاه فتوکپی دارای بزرگی E برابر با $۲/۳\times ۱۰^{۵}\ \mathrm{N/C}$ است. چگالی بار سطحی روی غلتک، با فرض آنکه غلتک رسانا باشد، چقدر است؟

حل: میدان روی سطح و در مجاورت سطح رسانا برابر است با:

$$E=\frac{\sigma}{\varepsilon_\circ}\Rightarrow$$
$$\sigma=E\varepsilon_\circ=(۲/۳\times ۱۰^{۵})(۸/۸۵\times ۱۰^{-۱۲})=۲/۰۴\times ۱۰^{-۶}\ \frac{\mathrm{C}}{\mathrm{m^۲}}$$

●● **۲۱**- یک رسانای منزوی با شکلی دلخواه دارای بار خالص $+۱۰\times ۱۰^{-۶}\ \mathrm{C}$ است. داخل رسانا، کاواکی است که در داخل آن بار نقطه‌ای $q=+۳/۰\times ۱۰^{-۶}\ \mathrm{C}$ قرار دارد. بار (الف) روی دیوارهٔ کاواک و (ب) روی سطح خارجی رسانا چقدر است؟

حل:



الف) یک سطح گاوسی را درون رسانا طوری در نظر می‌گیریم که حفره درون آن قرار گیرد. چون درون رسانا میدان صفر است، شاری که از سطح گاوسی می‌گذرد نیز صفر است.
چون بار محصور شده در سطح گاوس $۳\times ۱۰^{-۶}\ \mathrm{C}$ است بنابراین باید باری معادل با $-۳\times ۱۰^{-۶}\ \mathrm{C}$ در دیواره حفره توزیع شود تا بار خالص داخل سطح گاوسی صفر و در نتیجه میدان الکتریکی داخل دیواره نیز صفر شود.

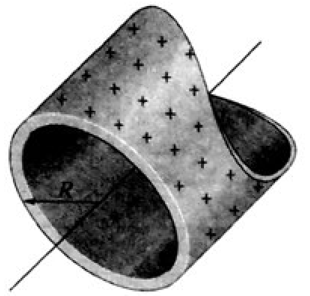
$$\varepsilon_\circ \Phi=q+q'\Rightarrow \Phi=\frac{q+q'}{\varepsilon_\circ}=\circ\Rightarrow q'=-q=-۳\times ۱۰^{-۶}\ \mathrm{C}$$

(ب) باید پایستگی بار برقرار بماند. امکان ندارد بار $q'=-۳\times ۱۰^{-۶}\ \mathrm{C}$ بی‌آنکه با باری معادل خود خنثی شود، ظاهر شود. برای آنکه پایستگی بار برقرار بماند باید بار $-q'$ روی دیواره رسانا توزیع شود و چون روی دیواره رسانا بار Q قرار دارد، بار خالص روی دیواره رسانا چنین می‌شود:

$$q=Q-q'=۱۰\times ۱۰^{-۶}+۳\times ۱۰^{-۶}=۱۳\times ۱۰^{-۶}\ \mathrm{C}$$

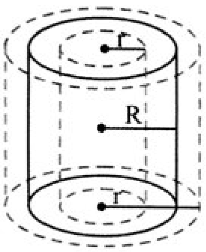
بخش ۱۹-۷ کاربرد قانون گاؤس: تقارن استوانه‌ای

● **۲۲**- شکل ۱۹-۳۶ مقطعی از یک لولهٔ فلزی نازک و بلند به شعاع $R=۳/۰۰\ \mathrm{cm}$ را نشان می‌دهد که دارای بار در یکای طول $\lambda=۲/۰۰\times ۱۰^{-۸}\ \mathrm{C/m}$ است. بزرگی E میدان الکتریکی در فاصلهٔ شعاعی (الف) $r=R/۲/۰۰$ و (ب) $r=۲/۰۰R$ چقدر است؟ (پ) تغییرات E را برحسب r در گسترهٔ $r=۰$ تا $۲/۰۰\ R$ رسم کنید.



شکل ۱۹-۳۶ مسئلهٔ ۲۲

حل:



(الف) سطح گاوسی را استوانه‌ای به شعاع $r<R$ در نظر می‌گیریم.

$$r=\frac{R}{۲}$$

چون هیچ باری درون سطح گاوسی قرار نمی‌گیرد بنابراین میدان صفر است.

$$E_{in}=\circ$$

(ب) سطح گاوسی را استوانه‌ای به شعاع $r>R$ در نظر می‌گیریم.

$$r=۲R$$

جهت میدان شعاعی است پس از دو قاعده سطح گاوسی استوانه‌ای شاری نمی‌گذرد.

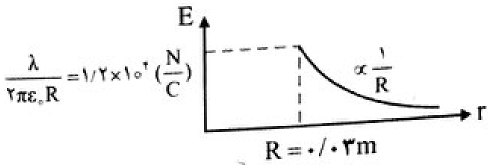
$$\oint_S \vec{E}\cdot\hat{n}ds=\frac{q}{\varepsilon_\circ}$$

$$E(۲\pi rL)=\frac{q}{\varepsilon_\circ}=\frac{\lambda L}{\varepsilon_\circ}\Rightarrow E_{out}=\frac{\lambda}{۲\pi\varepsilon_\circ r}\Rightarrow$$

$$E_{\mathrm{out}}=\frac{\lambda}{۲\pi\varepsilon_\circ(۲R)}=\frac{۲\times ۱۰^{-۸}}{۲(۸/۸۵\times ۱۰^{-۱۲})(۰/۰۶)}=۵/۹۹۴\times ۱۰^{۳}\ \frac{\mathrm{N}}{\mathrm{C}}$$

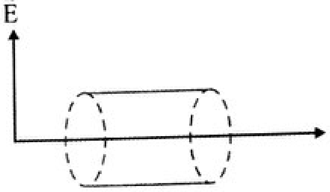
(پ)

$$E_{\mathrm{man}}=\frac{\lambda}{۲\pi\varepsilon_\circ R}=\frac{۲\times ۱۰^{-۸}}{۲\pi(۸/۸۵\times ۱۰^{-۱۲})(۰/۰۳)}=۱/۲\times ۱۰^{۴}\ \frac{\mathrm{N}}{\mathrm{C}}$$



●۲۳- یک خط بار نامتناهی، میدانی به بزرگی $4/5\times10^4$ N/C را در فاصلهٔ ۲/۰ m ایجاد می‌کند. چگالی بار خطی را محاسبه کنید. **SSM**

حل:



سطح گاوسی را استوانه‌ای در نظر می‌گیریم که خط بار محور آن باشد.

$$\oint_S \vec{E}\cdot\hat{n}ds = \frac{q}{\varepsilon_0}$$

میدان ناشی از خط بار شعاعی است بنابراین از دو قاعده استوانه شاری عبور نمی‌کند.

$$E(2\pi rL) = \frac{\lambda L}{\varepsilon_0} \Rightarrow E = \frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0 r} \Rightarrow$$

$$\lambda = 2\pi\varepsilon_0 rE = 2\pi(8/85\times10^{-12})(2)(4/5\times10^4) = 5\times10^{-6}\ \frac{C}{m}$$

●۲۴- الکترونی از حالت سکون، در فاصلهٔ عمودی ۹/۰ cm از یک خط بار روی یک میلهٔ نارسانای بسیار بلند، رها می‌شود. این بار به طور یکنواخت با بزرگی ۶/۰ μC بر متر توزیع شده است. بزرگی شتاب اولیهٔ الکترون چقدر است؟

حل:

$$E = \frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0 r} = \frac{6\times10^{-6}}{2\pi(8/85\times10^{-12})(0/09)} = 1/2\times10^6\ \frac{N}{C}$$

$$a = \frac{F}{m} = \frac{qE}{m} = \frac{(1/6\times10^{-19})(1/2\times10^6)}{(9/1\times10^{-31})} = 2/11\times10^{17}\ \frac{m}{s^2}$$

●۲۵- (الف) غلتک دستگاه فتوکپی دارای طول ۴۲cm و قطر ۱۲cm است. میدان الکتریکی در بالای سطح غلتک $2/3\times10^5$ N/C است. بار کل روی غلتک چقدر است؟ (ب) تولید کننده‌ای می‌خواهد یک نمونهٔ رومیزی از این دستگاه تولید کند. لازمهٔ این کار این است که طول غلتک به ۲۸cm و قطر آن به ۸/۰ cm کاهش یابد. میدان الکتریکی روی سطح این غلتک نباید تغییر کند. بار روی این غلتک جدید باید چقدر باشد؟

حل: (الف) سطح گاوسی را استوانه‌ای به درو غلتک در نظر می‌گیریم. میدان الکتریکی از این رابطه به دست می‌آید:

$$E = \frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0 r}$$

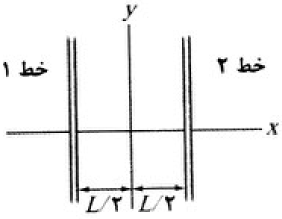
$$q = \lambda h \Rightarrow q = (2\pi\varepsilon_0 rE)h = \pi\varepsilon_0 DhE \Rightarrow$$

$$q = \pi(8/85\times10^{-12})(0/12)(0/42)(2/3\times10^5) = 3/22\times10^{-7}\ C$$

(ب)

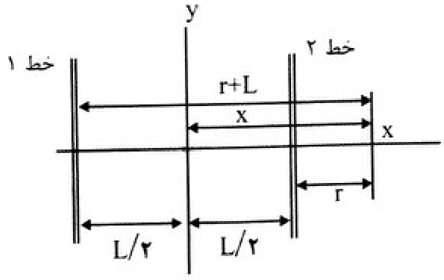
$$q' = \pi(8/85\times10^{-12})(0/08)(0/28)(2/3\times10^5) = 1/43\times10^{-7}\ C$$

●●۲۶- در شکل ۱۹-۳۷، مقطع کوتاهی از دو خط بار بسیار بلند موازی که در مکانهای خود، به فاصلهٔ $L = 8/0$ cm از یکدیگز ثابت شده‌اند، نشان داده شده است. چگالیهای بار خطی یکنواخت عبارت‌انداز ۶/۰ μC/m+ برای خط ۱ و ۲/۰ μC/m- برای خط ۲. میدان الکتریکی خالص ناشی از دو خط بار در کجای محور x نشان داده شده برابر با صفر است؟



شکل ۱۹-۳۷ مسئلهٔ ۲۶

حل:



نقطه‌ای روی محور x که در آنجا میدان الکتریکی برابر با صفر است، نمی‌تواند میان خطوط بار باشد، زیرا بار دو خط مخالف هم است. همچنین این نقطه در سمت چپ خط ۱ نیست زیرا بزرگی بار بر یکای طول خط ۲ است. بنابراین این نقطه در سمت راست خط ۲ واقع است.

$$E_{total} = E_1 + E_2 = \frac{\lambda_1}{2\pi\varepsilon_0(r+L)} + \frac{\lambda_2}{2\pi\varepsilon_0 r} = 0 \Rightarrow$$

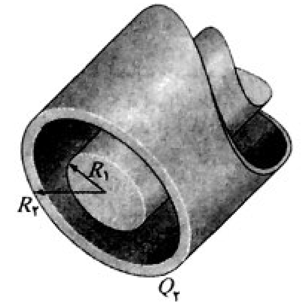
$$\frac{\lambda_1}{r+L} + \frac{\lambda_2}{r} = 0 \Rightarrow \frac{6\times10^{-6}}{r+0/08} + \frac{-2\times10^{-6}}{r} = 0 \Rightarrow$$

$$6r = 2r + 0/16 \Rightarrow 4r = 0/16 \Rightarrow r = 0/04\ m$$

$$x = r + \frac{L}{2} = 0/04 + 0/04 \Rightarrow x = 0/08\ m$$

●●۲۷- شکل ۱۹-۳۸ مقطعی از یک میلهٔ رسانا با شعاع $R_1 = 1/30$ mm و طول $L = 11/00$ m را در داخل یک پوستهٔ هم‌محور استوانه‌ای رسانا و نازک به شعاع $R_2 = 10/0 R_1$ و (همان) طول L نشان می‌دهد. بار خالص روی میله $Q_1 = +3/40\times10^{-12}$ C، و روی پوسته $Q_2 = -2/00\,Q_1$ است.

(الف) بزرگی E و (ب) جهت (به طور شعاعی رو به درون یا رو به بیرون) میدان الکتریکی در فاصلهٔ شعاعی $r = ۲/۰۰ R_۲$ چیست؟ (پ) E و (ت) جهت میدان در $r = ۵/۰۰ R_۱$ چیست؟ بار روی (ث) سطح داخلی و (ج) سطح خارجی پوسته چقدر است؟ SSM WWW



شکل ۱۹-۳۸ مسئلهٔ ۲۷

حل: سطح گاوسی را استوانه‌ای هم مرکز با استوانه‌ها و به طول L خارج از پوسته رسانا در نظر می‌گیریم. بار خالص درون سطح گاوسی برابر است با:

$$Q_۱ + Q_۲ = Q_۱ - ۲Q_۱ = -Q_۱$$
$$r = ۲R_۲ = ۲R_۱$$

(الف)

$$\oint \vec{E}\cdot\hat{n}ds = \frac{q}{\varepsilon_۰} \Rightarrow E۲\pi r\ell = \frac{-Q_۱}{\varepsilon_۰} \Rightarrow E = \frac{-Q_۱}{۲\pi\varepsilon_۰ r\ell} \Rightarrow$$

$$E = \frac{-۳/۴\times۱۰^{-۱۲}}{۲\pi(۸/۸۵\times۱۰^{-۱۲})(۲۰\times۱/۳\times۱۰^{-۳})(۱۱)} = -۰/۲۱۴\ \frac{N}{C}$$

(ب) علامت منفی نشان می‌دهد که جهت میدان شعاعی و به طرف داخل است. بار خالص محصور شده توسط سطح گاوسی برابر $Q_۱$ است.

(پ)

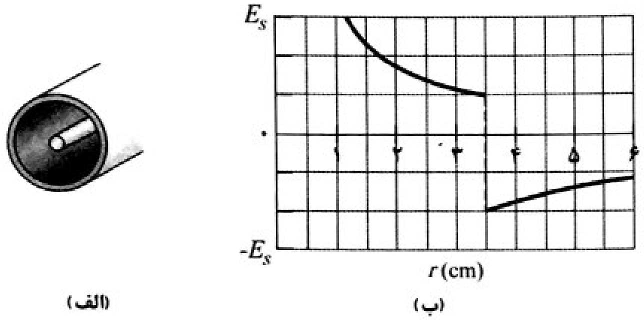
$$r = QR_۱$$

$$E = \frac{Q_۱}{۲\pi\varepsilon_۰ r\ell} = \frac{۳/۴\times۱۰^{-۱۲}}{۲\pi(۸/۸۵\times۱۰^{-۱۲})(۵\times۱/۳\times۱۰^{-۳})(۱۱)} = ۰/۸۵۵\ \frac{N}{C}$$

(ت) علامت مثبت نشان می‌دهد که جهت میدان شعاعی و به طرف بیرون است.

(ث و ج) میدان داخل پوستهٔ رسانا باید صفر باشد. بار خالص $Q_۱$ حاصل از میلهٔ استوانه‌ای در سطح داخلی پوستهٔ با $-Q_۱$ را القا می‌کند. برای اینکه پایستگی بار برقرار بماند باید بار $+Q_۱$ در سطح بیرونی پوسته القا شود، امابار $-۲Q_۱$ نیر روی سطح بیرونی پوسته از قبل وجود داشت. بنابراین بار خالص روی سطح بیرونی پوسته برابر با $-۲Q_۱ + Q_۱ = -Q_۱$ است. پس بار روی سطح داخلی پوسته و روی سطح بیرونی آن هر دو برابر با $-۳/۴\times۱۰^{-۱۲}C$ است.

●●۲۸- شکل ۱۹-۳۹ الف، استوانهٔ توپر باردار و باریکی را نشان می‌دهد که با یک پوستهٔ استوانه‌ای باردار بزرگتر، هم محور است. هر دو نارسانا و نازک‌اند و دارای چگالی بار سطحی یکنواخت روی سطح‌های خارجی خود هستند. شکل ۱۹-۳۹ ب مؤلفهٔ شعاعی E میدان الکتریکی را برحسب فاصلهٔ شعاعی r از محور مشترک نشان می‌دهد. مقیاس محور قائم با $E_s = ۳/۰\times۱۰^۳$ N/C مشخص شده است چگالی بار خطی پوسته چقدر است؟



شکل ۱۹-۳۹ مسئلهٔ ۲۸

حل: وقتی از داخل به فاصله $r = ۳/۵$ cm می‌رسیم داریم:

$$E = ۱\times۱۰^۳\ \frac{N}{C}$$

$$E = \frac{\lambda}{۲\pi\varepsilon_۰ r} \Rightarrow \lambda = ۲\pi\varepsilon_۰ rE = ۲\pi(۸/۸۵\times۱۰^{-۱۲})(۰/۰۳۵)(۱۰^۳) \Rightarrow$$

$$\lambda = ۱/۹۵\times۱۰^{-۹}\ \frac{C}{m}$$

وقتی از بیرون به فاصله $r = ۳/۵$ cm می‌رسیم، داریم:

$$E = -۲\times۱۰^۳\ \frac{N}{C}$$

$$E = \frac{\lambda+\lambda'}{۲\pi\varepsilon_۰ r} \Rightarrow \lambda+\lambda' = ۲\pi\varepsilon_۰ rE \Rightarrow \lambda' = ۲\pi\varepsilon_۰ rE - \lambda \Rightarrow$$

$$\lambda' = ۲\pi(۸/۸۵\times۱۰^{-۱۲})(۰/۰۳۵)(-۲\times۱۰^۳) - ۱/۹۵\times۱۰^{-۹}$$
$$= -۵/۸۴\times۱۰^{-۹}\ \frac{C}{m}$$

●●۲۹- دو پوستهٔ استوانه‌ای هم محور، نازک، باردار و بلند دارای شعاعهای ۳/۰ و ۶/۰ سانتی‌متر هستند. بار بر یکای طول روی پوستهٔ داخلی $۵/۰\times۱۰^{-۶}$ C/m و روی پوستهٔ خارجی $-۷/۰\times۱۰^{-۶}$ C/m است. (الف) بزرگی E و (ب) جهت (به طور شعاعی رو به درون یا رو به بیرون) میدان الکتریکی در فاصلهٔ شعاعی $r = ۴/۰$ cm چیست؟ (پ) E و (ت) جهت در $r = ۸/۰$ cm چیست؟ ILW

حل: (الف)

$$\oint_S \vec{E}\cdot\hat{n}ds = \frac{q_۱}{\varepsilon_۰} \Rightarrow$$

$$E۲\pi r_۱\ell = \frac{\lambda_۱\ell}{\varepsilon_۰} \Rightarrow E = \frac{\lambda_۱}{۲\pi\varepsilon_۰ r_۱} \Rightarrow$$

$$E = \frac{۵\times۱۰^{-۶}}{۲\pi(۸/۸۵\times۱۰^{-۱۲})(۰/۰۴)} = ۲/۲۵\times۱۰^۶\ \frac{N}{C}$$

(ب) میدان شعاعی و رو به بیرون است.

(پ)

$$E = \frac{\lambda_۱+\lambda_۲}{۲\pi\varepsilon_۰ r_۲} = \frac{۵\times۱۰^{-۶} - ۷\times۱۰^{-۶}}{۲\pi(۸/۸۵\times۱۰^{-۱۲})(۰/۰۸)} = -۴/۴۹\times۱۰^۵\ \frac{N}{C}$$

(ت) میدان شعاعی و رو به داخل است.

●●۳۰- باری با چگالی خطی یکنواخت ۲/۰ nC/m روی میلهٔ نارسانا، نازک و بلندی توزیع شده است. میله با پوستهٔ استوانه‌ای رسانای بلندی (به شعاع داخلی ۵/۰ cm و شعاع خارجی ۱۰ cm) هم‌محور است. بار خالص روی پوسته برابر صفر است. (الف) بزرگی میدان الکتریکی به فاصلهٔ ۱۵cm از محور پوسته چقدر است؟ چگالی بار سطحی روی (ب) سطح داخلی و (پ) سطح خارجی پوسته چقدر است؟

حل: (الف)

$$E=\frac{\lambda_۱+\lambda_۲}{۲\pi\varepsilon_\circ r}=\frac{۲\times۱۰^{-۹}+\circ}{۲\pi(۸/۸۵\times۱۰^{-۱۲})(\circ/۱۵)}=۲/۳۹\times۱۰^{۲}\,\frac{\mathrm{N}}{\mathrm{C}}$$

میدان الکتریکی در داخل رسانا باید صفر باشد ولی حضور خط بار، صفر شدن میدان در داخل پوسته رسانا را بر هم می‌زنند. پس باید باری به بزرگی بار خط بار، ولی با علامت مخالف روی سطح داخلی پوسته توزیع شود.
یک سطح گاوسی استوانه‌ای داخل پوسته در نظر می‌گیریم. a و b شعاع‌های داخلی و خارجی پوسته هستند.

$$\lambda'_۱=-۲\times۱۰^{-۹}\,\frac{\mathrm{C}}{\mathrm{m}}\Rightarrow\sigma_۱=\frac{q_۱}{۲\pi a\ell}=\frac{\lambda'_۱}{۲\pi a}\Rightarrow$$

$$\sigma_۱=\frac{-۲\times۱۰^{-۹}}{۲\pi(\circ/\circ۵)}=-۶/۳۷\times۱۰^{-۹}\,\frac{\mathrm{C}}{\mathrm{m}^۲}$$

(پ) طبق قانون پایستگی بار، بار جدید نمی‌تواند ایجاد شود، پس باید باری هم اندازه با پوسته داخلی و مخالف علامت آن برروی پوسته خارجی استوانه توزیع شود.

$$\lambda'_۲=۲\times۱۰^{-۹}\,\frac{\mathrm{C}}{\mathrm{m}}\Rightarrow\sigma_۲=\frac{q_۲}{۲\pi b\ell}=\frac{\lambda'_۲}{۲\pi b}\Rightarrow$$

$$\sigma_۲=\frac{۲\times۱۰^{-۹}}{۲\pi(\circ/۱)}=۳/۱۸\times۱۰^{-۹}\,\frac{\mathrm{C}}{\mathrm{m}^۲}$$

●●۳۱- سیم مستقیم و بلندی دارای باری منفی با چگالی بار خطی ۳/۶ nC/m است. این سیم، توسط یک پوستهٔ استوانه‌ای نارسانای نازک و هم‌محور به شعاع ۱/۵ cm در بر گرفته شده است. پوسته دارای بار مثبت با چگالی بار سطحی σ روی سطح خارجی خود است که باعث می شود میدان الکتریکی خارجی خالص برابر با صفر باشد. σ را محاسبه کنید.

حل:

$$\oint\vec{E}\cdot\hat{n}ds=\frac{q}{\varepsilon_\circ}=\circ\Rightarrow\lambda_۱+\lambda_۲=\circ\Rightarrow\lambda_۲=۳/۶\,\frac{\mathrm{nC}}{\mathrm{m}}$$

$$\sigma=\frac{q}{۲\pi a\ell}=\frac{\lambda_۲}{۲\pi a}=\frac{۳/۶\times۱۰^{-۹}}{۲\pi(\circ/\circ۱۵)}=۳/۸۲\times۱۰^{-۸}\,\frac{\mathrm{C}}{\mathrm{m}^۲}$$

●●●۳۲- استوانهٔ توپر، نارسانا و بلندی به شعاع ۴/۰cm دارای چگالی بار حجمی نایکنواخت ρ است. ρ تابعی از فاصلهٔ شعاعی r از محور استوانه است: $\rho=Ar^۲$. به‌ازای $A=۲/۵\ \mu\mathrm{C/m^3}$، بزرگی میدان الکتریکی در (الف) $r=۳/۰$ cm و (ب) $r=۵/۰$ cm چقدر است؟

حل: (الف)

$$\oint_S\vec{E}_۱\cdot\hat{n}ds=\frac{q}{\varepsilon_\circ}=\frac{\int\rho dV}{\varepsilon_\circ}$$

$$V=\pi r^۲\ell\Rightarrow dV=۲\pi r\ell dr\Rightarrow E_۱۲\pi r\ell=\frac{\int_\circ^r(Ar^۲)(۲\pi r\ell dr)}{\varepsilon_\circ}$$

$$=\frac{۲\pi A\ell}{\varepsilon_\circ}\int_\circ^r r^۳dr=\frac{۲\pi A\ell}{\varepsilon_\circ}\left(\frac{۱}{۴}r^۴\right)\Rightarrow E_۱=\frac{Ar^۳}{۴\varepsilon_\circ}\Rightarrow$$

$$E_۱=\frac{(۲/۵\times۱۰^{-۶})(\circ/\circ۳)^۳}{۴\times۸/۸۵\times۱۰^{-۱۲}}=۱/۹۱\,\frac{\mathrm{N}}{\mathrm{C}}$$

(ب)

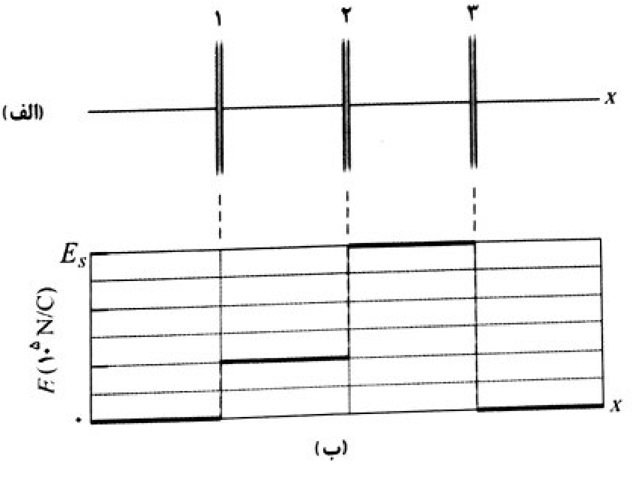
$$\oint_S\vec{E}_۲\cdot\hat{n}ds=\frac{q}{\varepsilon_\circ}=\frac{\int\rho dV}{\varepsilon_\circ}=\frac{\int_\circ^R(Ar^۲)(۲\pi r\ell)dr}{\varepsilon_\circ}$$

$$=\frac{۲\pi A\ell}{\varepsilon_\circ}\int_\circ^R r^۳dr\Rightarrow\frac{۲\pi A\ell}{\varepsilon_\circ}=\left(\frac{۱}{۴}R^۴\right)=E^۲۲\pi r\ell\Rightarrow$$

$$E_۲=\frac{AR^۴}{۴\varepsilon_\circ r}=\frac{(۲/۵\times۱۰^{-۶})(\circ/\circ۴)^۴}{۴(۸/۸۵\times۱۰^{-۱۲})(\circ/\circ۵)}=۳/۶۲\,\frac{\mathrm{N}}{\mathrm{C}}$$

بخش ۱۹-۸ کاربرد قانون گاؤس: تقارن صفحه‌ای

●۳۳- شکل ۱۹-۴۰ الف، سه برگهٔ پلاستیکی بزرگ و موازی را نشان می‌دهد که به طور یکنواخت باردار شده‌اند. شکل ۱۹-۴۰ ب، مؤلفهٔ میدان الکتریکی خالص در امتداد محور x از برگه‌ها را نشان می‌دهد. مقیاس محور قائم با $۶/۰\times۱۰^۵$ N/C مشخص شده است نسبت چگالی بار روی برگهٔ ۳ به مقدار آن روی برگهٔ ۲ چقدر است؟



شکل ۱۹-۴۰ مسئلهٔ ۳۳

حل: در ناحیه میان ورقه‌های ۱ و ۲، میدان الکتریکی خالص (برآیند) برابر $E_۱-E_۲+E_۳=۲\times۱۰^۵\,\frac{\mathrm{N}}{\mathrm{C}}$ است. در ناحیه میان ورقه‌های ۲ و ۳ میدان الکتریکی خالص، بزرگترین مقدار را دارد:

$$E_۱+E_۲+E_۳=۶\times۱۰^۵\,\frac{\mathrm{N}}{\mathrm{C}}$$

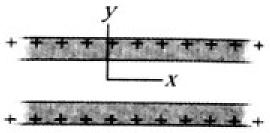
میدان الکتریکی خالص در ناحیه سمت راست ورقه ۳ صفر می‌شود و در آنجا $E_1 + E_2 = E_3$ است. این بدین معناست که σ_3 منفی و دارای بزرگترین چگالی سطحی است. این شرطها برای به دست آوردن میدان‌ها کفایت می‌کنند:

$$E_1 = 1\times10^5\ \frac{N}{C}\ ,\ E_2 = 2\times10^5\ \frac{N}{C}\ ,\ E_3 = -3\times10^5\ \frac{N}{C}$$

داریم $E = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0}$، بنابراین:

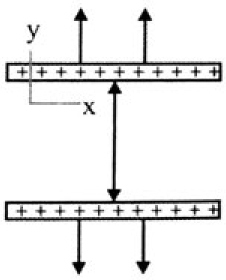
$$\frac{E_3}{E_2} = \frac{\sigma_3}{\sigma_2} = \frac{-3\times10^5}{2\times10^5} = -1/5$$

●۳۴- شکل ۱۹-۴۱ مقطع دو برگهٔ نارسانا، موازی و بزرگ را با توزیع یکسان بار مثبت با چگالی بار سطحی $\sigma = 1/77\times10^{-22}\ C/m^2$ نشان می‌دهد. برحسب نماد گذاری بردارهای یکه، $\vec{E}$ در نقطه‌های (الف) بالای برگه‌ها، (ب) میان آنها، و (پ) پایین آنها، چگونه است؟



شکل ۱۹-۴۱ مسئلهٔ ۳۴

حل: (الف)



$$\vec{E} = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0}\hat{j} + \frac{\sigma}{2\varepsilon_0}\hat{j} = \frac{\sigma}{\varepsilon_0}\hat{j}$$
$$= \frac{1/77\times10^{-22}}{8/85\times10^{-12}}\hat{j} = 2\times10^{-11}\ \frac{N}{C}\hat{j}$$

(ب)

$$\vec{E} = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0}\hat{j} - \frac{\sigma}{2\varepsilon_0}\hat{j} = 0$$

(پ)

$$\vec{E} = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0}\hat{j} - \frac{\sigma}{2\varepsilon_0}\hat{j} = \frac{\sigma}{\varepsilon_0}\hat{j} = -(2\times10^{-11})\hat{j}\frac{N}{C}$$

●۳۵- یک صفحهٔ فلزی مربعی شکل به طول ضلع $8/0$ cm و ضخامت ناچیز، دارای بار کل $6/0\times10^{-6}$ C است. (الف) با فرض آنکه بار به طور یکنواخت روی دو طرف این صفحه پخش شده باشد، بزرگی E میدان الکتریکی را درست خارج از مرکز صفحه (مثلاً در فاصلهٔ $0/50$ mm از مرکز صفحه) محاسبه کنید. (ب) با فرض آنکه صفحه یک بار نقطه‌ای باشد، E را در فاصلهٔ 30 m (که نسبت به اندازهٔ صفحه بزرگ است) محاسبه کنید. SSM WWW

حل: (الف) چون بار روی دو طرف صفحه توزیع شده است:

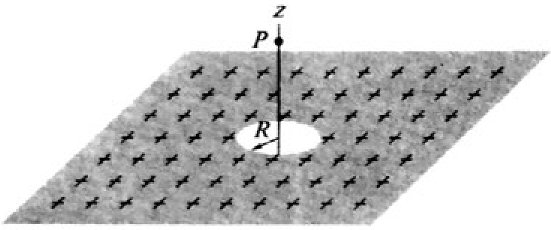
$$\sigma = \frac{q}{2A} = \frac{6\times10^{-6}}{2\times(0/08)^2} = 4/69\times10^{-4}\ \frac{C}{m^2}$$

$$E = \frac{\sigma}{\varepsilon_0} = \frac{4/69\times10^{-4}}{8/85\times10^{-12}} = 5/31\times10^{7}\ \frac{N}{C}$$

(ب)

$$E = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q}{r^2} = \frac{9\times10^9\times6\times10^{-6}}{(30)^2} = 60\ \frac{N}{C}$$

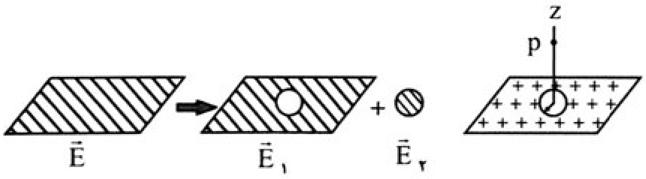
●۳۶- در شکل ۱۹-۴۲، یک حفرهٔ دایره‌ای کوچک به شعاع $R = 1/80$ cm در وسط یک سطح نارسانای تخت و نامتناهی که دارای چگالی بار یکنواخت $\sigma = 4/50\ pC/m^2$ است، کنده شده است. محور z که مبداء آن بر مرکز حفره قرار دارد، عمود



شکل ۱۹-۴۲ مسئلهٔ ۳۶

بر این سطح است. برحسب نماد گذاری بردارهای یکه، میدان الکتریکی در نقطهٔ P واقع در $z = 2/56$ cm چگونه است؟ (*راهنمایی:* معادلهٔ ۱۸-۲۶ را ببینید و از برهم‌نهی استفاده کنید.)

حل:



میدان یک صفحه بزرگ کامل را می‌توان ناشی از دو توزیع بار دانست، یکی از صفحه‌ای که سوراخی به شعاع R در میان آن است و دیگری قرصی به شعاع R که دارای همان چگالی سطحی است.

$\vec{E}_1$ میدانی است که می‌خواهیم به دست آوریم و $\vec{E}_2$ میدان ناشی از قرص باردار است. $\vec{E} = \vec{E}_1 + \vec{E}_2$

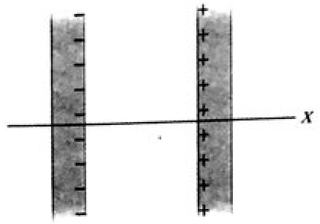
$$\vec{E}_2 = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0}\left[1 - \frac{z}{\sqrt{z^2+R^2}}\right]\hat{k} \Rightarrow$$

$$\frac{\sigma}{2\varepsilon_0}\hat{k} = E_1\hat{k} + \frac{\sigma}{2\varepsilon_0}\left[1 - \frac{z}{\sqrt{z^2+R^2}}\right]\hat{k} \Rightarrow \vec{E}_1 = \frac{\sigma z}{2\varepsilon_0\sqrt{z^2+R^2}}\hat{k}$$

$$= \frac{4/5\times10^{-12}\times2/56\times10^{-2}}{2\times8/85\times10^{-12}\times\sqrt{(2/56\times10^{-2})^2 + (1/8\times10^{-2})^2}}$$

$$= 0/208\,\hat{k}\ \frac{N}{C}$$

●۳۷- در شکل ۱۹-۴۳، دو صفحهٔ فلزی نازک و بلند، موازی و نزدیک یکدیگرند. در وجه‌های داخلی آنها، صفحه‌ها دارای چگالی بار سطحی اضافی به بزرگی $۷/۰۰\times۱۰^{-۲۲}\ C/m^۲$ و علامت مخالف‌اند. برحسب نماد گذاری بردارهای یکه، میدان الکتریکی در نقطه‌های (الف) سمت چپ صفحه‌ها، (ب) سمت راست صفحه‌ها، و (پ) میان آنها چگونه است؟



شکل ۱۹-۴۳ مسئلهٔ ۳۷

حل:

$$E_۱=E_۲=\frac{\sigma}{۲\varepsilon_\circ}=\frac{۷\times۱۰^{-۲۲}}{۲\times۸/۸۵\times۱۰^{-۱۲}}=۳/۹۵\times۱۰^{-۱۱}\ \frac{N}{C}$$

(الف)

سمت چپ دو صفحه

$$\vec{E}=E_۱\hat{i}+E_۲(-\hat{i})=\circ$$

(ب)

سمت راست دو صفحه

$$\vec{E}=E_۱(-\hat{i})+E_۲(\hat{i})=\circ$$

(ج)

بین دو صفحه

$$\vec{E}=E_۱(-\hat{i})+E_۲(-\hat{i})=-۲\times۳/۹۵\times۱۰^{-۱۱}\ \hat{i}$$
$$=-۷/۹\times۱۰^{-۱۱}\ \hat{i}\frac{N}{C}$$

●●۳۸- دو صفحهٔ فلزی بزرگ به مساحت $۱/۰\ m^۲$ موازی یکدیگرند. فاصلهٔ آنها از یکدیگر $۵/۰\ cm$، و روی سطحهای داخلی خود بارهای مساوی و مخالف دارند. اگر بزرگی E میدان الکتریکی در میان صفحه‌ها $۵۵\ N/C$ باشد، بزرگی بار روی هر یک از صفحه‌ها چقدر است؟ از اثر لبه‌ها چشم‌پوشی کنید.

حل:

$$E=\frac{\sigma}{\varepsilon_\circ}=\frac{q}{A\varepsilon_\circ}\Rightarrow q=A\varepsilon_\circ E=۱\times۸/۸۵\times۱۰^{-۱۲}\times۵۵$$
$$=۴/۸۷\times۱۰^{-۱۰}\ C$$

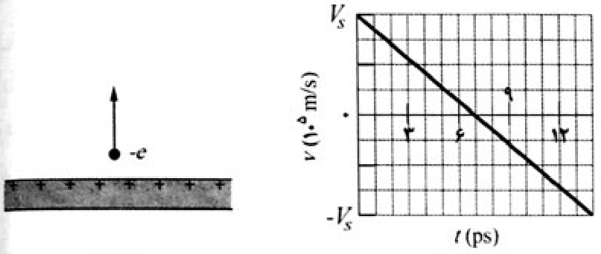
●●●۳۹- الکترونی به طور مستقیم به سوی مرکز یک صفحهٔ فلزی بزرگ که دارای چگالی بار سطحی $-۲/۰\times۱۰^{-۶}\ C/m^۲$ است، پرتاب می‌شود. اگر انرژی جنبشی اولیهٔ الکترون $۱/۶۰\times۱۰^{-۱۷}\ J$ باشد و الکترون درست در لحظهٔ رسیدن به صفحه (بر اثر دافعهٔ الکتروستاتیکی صفحه) متوقف شود، نقطهٔ پرتاب در چه فاصله‌ای از صفحه باید قرار داشته باشد؟ GO

حل: کار نیروی الکتریکی برابر تغییر انرژی جنبشی می‌باشد.

$$F=eE=e\frac{\sigma}{\varepsilon_\circ}\Rightarrow Fx=w=\Delta k\Rightarrow\frac{e\sigma}{\varepsilon_\circ}x=\Delta k\Rightarrow$$

$$x=\frac{\varepsilon_\circ\Delta k}{e\sigma}=\frac{۸/۸۵\times۱۰^{-۱۲}\times(-۱/۶\times۱۰^{-۱۷})}{۱/۶\times۱۰^{-۱۹}\times(-۲\times۱۰^{-۶})}=۴/۴۳\times۱۰^{-۴}\ m$$

●●●۴۰- در شکل ۱۹-۴۴ الف، الکترونی به طور مستقیم از یک ورقهٔ پلاستیکی باردار یکنواخت، با تندی $۲/۰\times۱۰^۵\ m/s$، رو به بیرون پرتاب شده است. این ورقه، نارسانا، تخت و بسیار بزرگ است. شکل ۱۹-۴۴ ب، مؤلفهٔ قائم v سرعت الکترون را برحسب زمان t تا هنگام برگشت الکترون به نقطهٔ پرتاب، به دست می‌دهد. چگالی بار سطحی ورقه چقدر است؟



(الف) (ب)

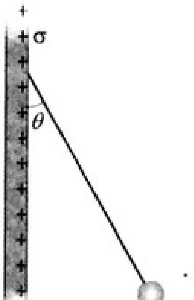
شکل ۱۹-۴۴ مسئلهٔ ۴۰

حل: شیب منحنی، شتاب حرکت الکترون را می‌دهد.

$$\sigma=\frac{\Delta v}{\Delta t}=\frac{۴\times۱۰^۵}{۱۴\times۱۰^{-۱۲}}=۲/۸۶\times۱۰^{۱۶}\ \frac{m}{s^۲}$$

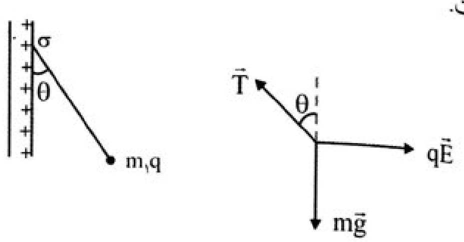
$$F=ma=eE\Rightarrow ma=e\frac{\sigma}{۲\varepsilon_\circ}\Rightarrow\sigma=\frac{۲\varepsilon_\circ ma}{e}$$
$$=\frac{۲\times۸/۸۵\times۱۰^{-۱۲}\times۹/۱\times۱۰^{-۳۱}\times۲/۸۶\times۱۰^{۱۶}}{۱/۶\times۱۰^{-۱۹}}$$
$$=۲/۹\times۱۰^{-۶}\ \frac{C}{m^۲}$$

●●۴۱- در شکل ۱۹-۴۵، یک گوی نارسانای کوچک به جرم $m=۱/۰\ mg$ و بار $q=۲/۰\times۱۰^{-۸}\ C$ (که به طور یکنواخت در حجم آن توزیع شده است) از یک نخ عایق آویزان است و با یک ورقهٔ نارسانای قائم با بار یکنواخت (سطح مقطع آن نشان داده شده) زاویهٔ $\theta=۳۰^\circ$ می‌سازد. با درنظر گرفتن نیروی گرانشی وارد به گوی و با فرض اینکه ورقه به طور قائم و به سمت داخل و خارج صفحه تا فاصله‌های دور امتداد یابد، چگالی بار سطحی σ ورقه را محاسبه کنید. SSM



شکل ۱۹-۴۵ مسئلهٔ ۴۱

حل: چون گوی در حال تعادل است نیروی خالص وارد بر آن صفر است.



نیروهای وادر بر گوی چنین است:

$qE - T\sin\theta = 0 \Rightarrow T\sin\theta = qE$: در راستای افقی

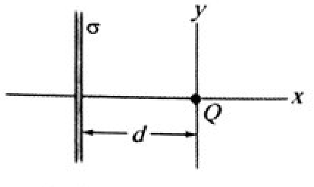
$T\cos\theta - mg = 0 \Rightarrow T\cos\theta = mg$: در راستای قائم

از تقسیم دو رابطه بالا به دست می‌آید:

$$\tan\theta = \frac{qE}{mg} = \frac{q\sigma}{2\varepsilon_0 mg} \Rightarrow \sigma = \frac{2\varepsilon_0 mg\tan\theta}{q} =$$

$$\frac{2\times 8/85\times 10^{-12}\times 1\times 10^{-6}\times 9/8\times \tan 30}{2\times 10^{-8}} = 5\times 10^{-9}\ \frac{C}{m^2}$$

●●۴۲- شکل ۱۹-۴۶ یک برگهٔ نارسانای خیلی بزرگ را نشان می‌دهد که دارای چگالی بار سطحی یکنواخت $\sigma = -2/00\ \mu C/m^2$ است؛ همچنین این شکل ذره‌ای با بار $Q = 6/00\ \mu C$ را نشان می‌دهد که در فاصلهٔ d از برگه قرار دارد. هر دو در مکانهای خود ثابت شده‌اند. اگر $d = 0/200$ m باشد، در چه مختصهٔ (الف) مثبت و (ب) منفی روی محور x (غیر از بینهایت)، میدان الکتریکی خالص $\vec{E}_{net}$ ناشی از برگه و ذره برابر با صفر است؟ (پ) اگر $d = 0/800$ m باشد، در چه مختصه‌ای روی محور x، $E_{net} = 0$ است؟



شکل ۱۹-۴۶ مسئلهٔ ۴۲

حل: چون ورقه و ذره دارای بارهایی مخالفند، نقطه‌ای که در آن میدان‌ها یکدیگر را خنثی می‌کنند در ناحیه میان ورقه و ذره $(-d<x<0)$ قرار ندارد. نقاطی که در آن میدان‌ها همدیگر را خنثی می‌کنند در ناحیه سمت راست ذره $(x>0)$ و ناحیه سمت چپ ورقه $(x<-d)$ است.

$$E_1 = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0} = \frac{2\times 10^{-6}}{2\times 8/85\times 10^{-12}} = 1/13\times 10^{5}\ \frac{N}{C}$$

$$E_2 = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q}{x^2} = \frac{9\times 10^{9}\times 6\times 10^{-6}}{x^2} = \frac{5/4\times 10^{4}}{x^2}$$

(الف)

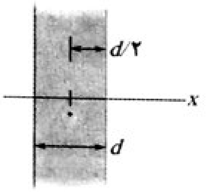
$$x>0 \Rightarrow \vec{E} = \vec{E}_1 + \vec{E}_2 = 0 \Rightarrow -1/13\times 10^{5} + \frac{5/4\times 10^{4}}{x^2} = 0 \Rightarrow x = 0/69\ m$$

(ب)

$$x<-d \Rightarrow \vec{E} = \vec{E}_1 + \vec{E}_2 = 0 \Rightarrow 1/13\times 10^{5} - \frac{5/4\times 10^{4}}{x^2} = 0 \Rightarrow x = -0/69\ m$$

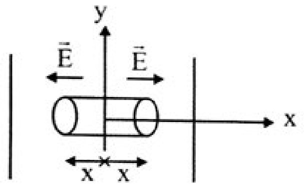
(پ) اگر $d = 0/8$ m باشد یکی از نقاط به دست آمده در بالا یعنی $x = -0/69$ m در ناحیه بین صفحه و بار قرار می‌گیرد که میدان در آنجا صفر نمی‌شود. بنابراین میدان‌ها همدیگر را در $x = 0/69$ m خنثی می‌کنند.

●●●۴۳- شکل ۱۹-۴۷ مقطع یک قطعهٔ نارسانای خیلی بزرگ را نشان می‌دهد که دارای ضخامت $d = 9/40$ mm و چگالی بار حجمی یکنواخت $\rho = 5/80\ fC/m^3$ است. مبداء محور x روی مرکز قطعه قرار دارد. بزرگی میدان الکتریکی قطعه در مختصهٔ x (الف) ۰، (ب) ۲/۰۰ mm، (پ) ۴/۷۰ mm، و (ت) ۲۶/۰ mm، چقدر است؟



شکل ۱۹-۴۷ مسئله ۴۳

حل:



سطح گاوس را به صورت استوانه‌ای در نظر می‌گیریم که نسبت به محور y متقارن است.
میدان الکتریکی موازی با سطح جانبی استوانه است و بنابراین شار عبوری از آن صفر است.

$$\oint \vec{E}\cdot\vec{ds} = \frac{q}{\varepsilon_0}$$

$$2Es = \frac{\rho V}{\varepsilon_0} = \frac{\rho s 2x}{\varepsilon_0} \Rightarrow E = \frac{\rho x}{\varepsilon_0}$$

(الف) به ازای $x=0$، $E=0$ می‌شود.

(ب) به ازای $x = 2\times 10^{-3}$ m داریم:

$$E = \frac{\rho x}{\varepsilon_0} = \frac{5/8\times 10^{-15}\times 2\times 10^{-3}}{8/85\times 10^{-12}} = 1/31\times 10^{-6}\ \frac{N}{C}$$

(ب) به ازای $x = 4/7\times 10^{-3}$ m نیز تمام حجم درون سطح گاوس دارای بار است و داریم:

$$E = \frac{\rho x}{\varepsilon_0} = \frac{5/8\times 10^{-15}\times 4/7\times 10^{-3}}{8/85\times 10^{-12}} = 3/1\times 10^{-6}\ \frac{N}{C}$$

(ت) هر چند $x = 2/6\times 10^{-2}$ m از $\frac{d}{2}$ بزرگتر است اما وقتی قانون گاوس را به کار می‌بریم با بار محصور شده در سطح گاوس سر و کار داریم. هر چند ارتفاع سطح گاوس در اینجا

بیشتر است اما بار محصور شده در آن برابر با بار محصور شده در $x=\frac{d}{2}$ است.

$$\oint E\cdot ds=\frac{q}{\varepsilon_0}\Rightarrow 2Es=\frac{\rho s d}{\varepsilon_0}\Rightarrow E=\frac{\rho d}{2\varepsilon_0}$$

$$=\frac{5/8\times10^{-15}\times9/4\times10^{-3}}{2\times8/85\times10^{-12}}=3/1\times10^{-6}\ \frac{N}{C}$$

بخش ۱۹-۹ کاربرد قانون گاؤس: تقارن کروی

●۴۴- یک بار نقطه‌ای باعث می‌شود که شار الکتریکی $-750\ N.m^2/C$ از یک سطح گاؤسی کروی با شعاع ۱۰/۰ cm و به مرکز آن بار، عبور کند. (الف) اگر شعاع سطح گاؤسی دو برابر شود، چقدر شار از این سطح می‌گذرد؟ (ب) مقدار بار نقطه‌ای چقدر است؟

حل: (الف) طبق قانون گاوس شار عبوری فقط به مقدار بار محصور شده بستگی دارد، بنابراین تغییر نمی‌کند.

(ب)

$$\varepsilon_0\Phi=q\Rightarrow q=8/85\times10^{-12}\times(-750)=-6/64\times10^{-9}\ C$$

●۴۵- یک بار نامعلوم روی کرهٔ توپر رسانایی به شعاع ۱۰ cm قرار دارد. اگر میدان الکتریکی در فاصلهٔ ۱۵ cm از مرکز کره دارای بزرگی $3/0\times10^3$ N/C و جهت آن به طور شعاعی به طرف درون باشد، بار خالص روی کره چقدر است؟ SSM

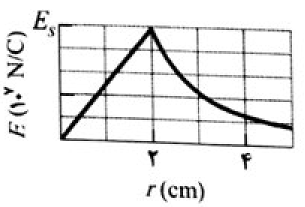
حل:

$$E=\frac{kq}{r^2}\Rightarrow q=\frac{Er^2}{k}=\frac{3\times10^3\times(0/15)^2}{9\times10^9}$$

چون جهت میدان به طرف داخل است، بار منفی است.

$$q=-7/5\times10^{9}\ C$$

●۴۶- شکل ۱۹-۴۸ بزرگی میدان الکتریکی در داخل و خارج کره‌ای را به دست می‌دهد که بار مثبت به طور یکنواخت در سرتا سر حجم آن توزیع شده است. مقیاس محور قائم با $E_s=5/0\times10^7$ N/C مشخص شده است. بار روی کره چقدر است؟



شکل ۱۹-۴۸ مسئلهٔ ۴۶

حل: میدان درون کره از رابطه $E=\frac{qr}{4\pi\varepsilon_0 R^3}$ به دست می‌آید که در سطح کره $(r=R)$ بیشینه است.

$$E=\frac{kq}{R^2}\Rightarrow q=\frac{ER^2}{k}=\frac{5\times10^7\times(0/02)^2}{9\times10^9}=2/22\times10^{-6}\ C$$

●۴۷- دو پوستهٔ کروی باردار هم‌مرکز دارای شعاعهای ۱۰/۰ cm و ۱۵/۰ cm هستند. بار روی پوستهٔ داخلی $4/00\times10^{-8}$ C، و روی پوستهٔ خارجی $2/00\times10^{-8}$ C است. میدان الکتریکی را (الف) در $r=12/0$ cm و (ب) در $r=20/0$ cm پیدا کنید.

حل: (الف) سطح گاوس را کره‌ای به شعاع r و هم مرکز با دو پوسته در نظر می‌گیریم.

$a<r<b$

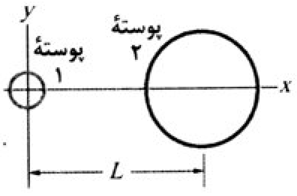
$$E=\frac{q_1}{4\pi\varepsilon_0 r^2}=\frac{9\times10^9\times4\times10^{-8}}{(0/12)^2}=2/5\times10^4\ \frac{N}{C}$$

(ب)

$$r>b\Rightarrow E=\frac{q_1+q_2}{4\pi\varepsilon_0 r^2}=(9\times10^9)\times\frac{4\times10^{-8}+2\times10^{-8}}{(0/2)^2}$$

$$=1/35\times10^4\ \frac{N}{C}$$

●●۴۸- شکل ۱۹-۴۹، دو پوستهٔ کروی نارسانا را نشان می‌دهد که در مکانهای خود روی محور x ثابت شده‌اند. پوستهٔ ۱ دارای شعاع ۰/۵۰ cm و چگالی بار سطحی یکنواخت $+4/0\ \mu C/m^2$ روی سطح خارجی‌خود، و پوستهٔ ۲ دارای شعاع ۲/۰ cm و چگالی بار سطحی یکنواخت $-2/0\ \mu C/m^2$ روی سطح خارجی خود است. مرکز پوسته‌ها به فاصلهٔ $L=6/0$ cm از هم قرار دارند. به جز در $x=\infty$، میدان الکتریکی خالص در کجای محور x برابر صفر است؟ GO



شکل ۱۹-۴۹ مسئلهٔ ۴۸

حل: چون بارها ناهمنام هستند این نقطه روی محور x و خارج از فاصله دوبار و در طرف کره با بار کمتر است و نیز درون دو کره قرار ندارد چون در آنجا فقط یک میدان سهم دارد و نمی‌تواند با سهم میدان دیگر خنثی شود.

$$q_1=\sigma_1 s_1=4\pi R_1^2\sigma_1=4\pi\times(0/5\times10^{-2})^2\times4\times10^{-6}$$

$$=1/26\times10^{-9}\ C$$

$$q_2=\sigma_2 s_2=4\pi R_2^2\sigma_2=4\pi\times(0/02)^2\times(-2\times10^{-6})$$

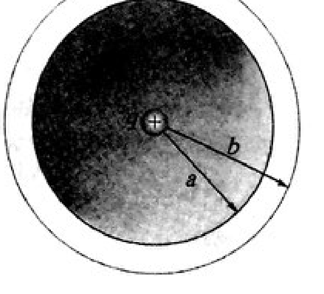
$$=-1\times10^{-8}\ C$$

$$E_1=E_2\Rightarrow\frac{kq_1}{x^2}=\frac{k|q_2|}{(x+L)^2}=\frac{1/26\times10^{-9}}{x^2}=\frac{1\times10^{-8}}{(0/06+x)^2}\Rightarrow$$

$x=-3/26$ cm — x در قسمت منفی محور قرار دارد.

●●●۴۹- در شکل ۱۹-۵۰، یک پوستهٔ کروی نارسانا به شعاع داخلی $a=2/00$cm و شعاع خارجی $b=2/40$cm، دارای چگالی بار حجمی مثبت $\rho=A/r$ (درون ضخامتش) است

که در آن A ثابت و r فاصله از مرکز پوسته است. به‌علاوه، گوی کوچکی با بار $q=۴۵/۰\,fC$ در مرکز آن قرار گرفته است. A باید چقدر باشد تا میدان الکتریکی در پوسته $(a \le r \le b)$ یکنواخت باشد؟ WWW SSM



شکل ۱۹-۵۰ مسئلهٔ ۴۹

حل: سطح گاوس را در فاصله r از مبدأ $(a<r<b)$ در نظر می‌گیریم، میدان به صورت زیر به دست می‌آید:

$$E=\frac{q_{in}}{۴\pi\varepsilon_\circ r^۲}$$

$$q_{in}=q+\int\rho dv=q+\int_{r=a}^{r=r}\frac{A}{r}۴\pi r^۲dr$$

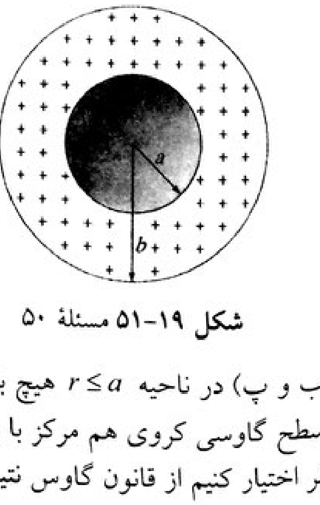
$$=q+۲\pi A(r^۲-a^۲)\Rightarrow E=\frac{q+۲\pi A(r^۲-a^۲)}{۴\pi\varepsilon_\circ r^۲}\Rightarrow$$

$$E=\frac{۲\pi A}{۴\pi\varepsilon_\circ}+\frac{q-۲\pi Aa^۲}{۴\pi\varepsilon_\circ r^۲}$$

شرط آنکه میدان یکنواخت و مستقل از r باشد این است که:

$$q-۲\pi Aa^۲=\circ\Rightarrow A=\frac{q}{۲\pi a^۲}=\frac{۴۵\times۱\circ^{-۱۵}}{۲\pi(\circ/\circ۲)^۲}=۱/۸\times۱\circ^{-۱۱}\frac{C}{m^۲}$$

۵۰●●●- شکل ۱۹-۵۱ یک پوستهٔ کروی با چگالی بار حجمی یکنواخت $\rho=۱/۸۴\,nC/m^۳$، شعاع داخلی $a=۱\circ/\circ\,cm$، و شعاع خارجی $b=۲/\circ\circ\,a$ را نشان می‌دهد. بزرگی میدان الکتریکی در فاصله‌های شعاعی (الف) $r=\circ$، (ب) $r=a/۲/\circ\circ$، (پ) $r=a$، (ت) $r=۱/۵\circ\,a$، (ث) $r=b$، و (ج) $r=۳/\circ\circ\,b$ چقدر است؟



شکل ۱۹-۵۱ مسئلهٔ ۵۰

حل: الف و ب و پ) در ناحیه $r\le a$ هیچ باری وجود ندارد. بنابراین اگر سطح گاوسی کروی هم مرکز با پوسته کروی به شعاع موردنظر اختیار کنیم از قانون گاوس نتیجه می‌گیریم:

$$E=\circ$$

(ت و ث)

$$\oint E\cdot ds=q\Rightarrow E=\frac{q}{۴\pi\varepsilon_\circ r^۲}$$

$$q=\int\rho dv=\int_{r=a}^{r=r}\rho(۴\pi r^۲)dr=\rho\frac{۴}{۳}\pi(r^۳-a^۳)$$

$$E=\frac{\rho(r^۳-a^۳)}{۳\varepsilon_\circ r^۲}=\frac{۱/۸۴\times۱\circ^{-۹}\times[(۱/۵\times\circ/۱)^۳-(\circ/۱)^۳]}{۳\times۸/۸۵\times۱\circ^{-۱۲}\times(۱/۵\times\circ/۱)^۲}=۷/۳۲\frac{N}{C}$$

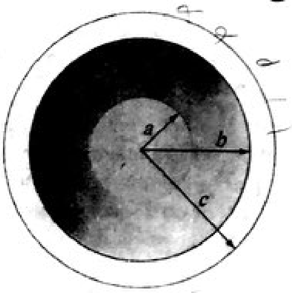
$$r=b=۲a=۲\circ\,cm\Rightarrow E=\frac{(۱/۸۴\times۱\circ^{-۹})[(\circ/۲)^۳-(\circ/۱)^۳]}{۳\times۸/۸۵\times۱\circ^{-۱۲}\times(\circ/۲)^۲}=۱۲/۱۳\frac{N}{C}$$

(ج)

$$r=۳b=۶a=\circ/۶m\Rightarrow E=\frac{\rho(b^۳-a^۳)}{۳\varepsilon_\circ r^۲}\Rightarrow$$

$$E=\frac{(۱/۸۴\times۱\circ^{-۹})[(\circ/۲)^۳-(\circ/۱)^۳]}{۳\times۸/۸۵\times۱\circ^{-۱۲}\times(\circ/۶)^۲}=۱/۳۵\frac{N}{C}$$

۵۱●●- در شکل ۱۹-۵۲، یک کرهٔ توپر به شعاع $a=۲/\circ\circ\,cm$ با یک پوستهٔ رسانای کروی به شعاع داخلی $b=۲/\circ\circ\,a$ و شعاع خارجی $c=۲/۴\circ\,a$ هم‌مرکز است. کره دارای بار خالص و یکنواخت $q_۱=+۵/\circ\circ\,fC$ و پوسته دارای بار خالص $q_۲=-q_۱$ است. بزرگی میدان الکتریکی در فاصله‌های شعاعی (الف) $r=\circ$، (ب) $r=a/۲/\circ\circ$، (پ) $r=a$، (ت) $r=۱/۵\circ\,a$، (ث) $r=۲/۳\circ\,a$، و (ج) $r=۳/۵\circ\,a$ چقدر است؟ بار خالص روی (چ) سطح داخلی و (ح) سطح خارجی پوسته چقدر است؟



شکل ۱۹-۵۲ مسئلهٔ ۵۱

حل: (الف) $r=\circ\Rightarrow E=\circ$

(ب)
$$r=\frac{a}{۲}\Rightarrow E=\frac{q_۱r}{۴\pi\varepsilon_\circ R^۳}=\frac{۵\times۱\circ^{-۱۵}\times(\circ/\circ۱)\times۹\times۱\circ^۹}{(\circ/\circ۲)^۳}=۵/۶۳\times۱\circ^{-۲}\frac{N}{C}$$

(پ)
$$r=a\Rightarrow E=\frac{q_۱}{۴\pi\varepsilon_\circ a^۲}=\frac{۹\times۱\circ^۹\times۵\times۱\circ^{-۱۵}}{(\circ/\circ۲)^۲}=\circ/۱۱۳\frac{N}{C}$$

(ت)
$$r=۱/۵a\Rightarrow E=\frac{q_۱}{۴\pi\varepsilon_\circ r^۲}=\frac{۹\times۱\circ^۹\times۵\times۱\circ^{-۱۵}}{(۱/۵\times\circ/\circ۲)^۲}=\circ/\circ۵\frac{N}{C}$$

(ث) درون رسانا میدان صفر است. $r=۲/۳a\Rightarrow E=\circ$

(ج) قانون گاوس را به کار می‌بریم. پس از آنکه بار $-q_1$ روی سطح داخلی پوسته القا شد، برای آنکه پایستگی بار برقرار بماند باید بار $+q_1$ روی سطح بیرونی پوسته القا شود. چون خود پوسته بار $-q_1$ داشت پس بار خالص محصور شده صفر است و بنابراین میدان نیز صفر می‌شود.

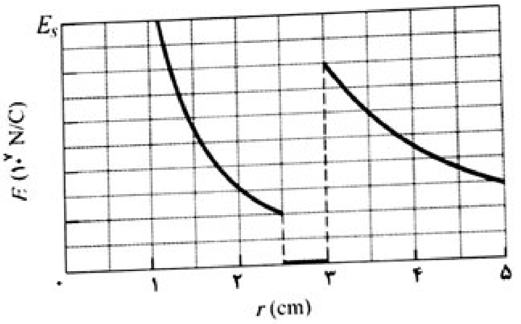
$r = 3/5a \Rightarrow E = 0$

(چ) روی سطح درونی پوسته بار $-q_1 = -5fC$ القا می‌شود.

(ح) چون روی سطح درونی بار $-q_1$ القا می‌شود طبق قانون پایستگی بار باید بار $+q_1$ روی سطح بیرونی القا شود که جمع آن با بار $-q_1$ که بیشتر روی پوسته بیرونی وجود داشت، صفر می‌شود.

$-q_1 + q_1 = 0$

۵۲●●- ذرهٔ بارداری در مرکز یک پوستهٔ کروی قرار داده شده است. شکل ۱۹-۵۳ بزرگی E میدان الکتریکی را برحسب فاصلهٔ شعاعی r به دست می‌دهد. مقیاس محور قائم با $E_s = 10/0 \times 10^7$ N/C مشخص شده است به طور تقریبی، چقدر بار خالص روی پوسته قرار دارد؟



شکل ۱۹-۵۳ مسئلهٔ ۵۲

حل: میدان در سطح خارجی پوسته $r = 3$cm برابر با 8×10^7 N/c است.

$$E = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 R^2} \Rightarrow 8\times10^7 = (9\times10^9)\frac{q}{(0/03)^2}$$
$$\Rightarrow q = 8\times10^{-6}\ C$$

این بار شامل بار نقطه‌ای q_1 و بار روی پوسته q_2 است.

درون پوسته در $r = 2/5(cm)$ میدان برابر با $2\times10^7 \frac{N}{C}$ است.

$$E = \frac{q_1}{4\pi\varepsilon_0 r^2} \Rightarrow 2\times10^7 = (9\times10^9)\frac{q_1}{(2/5\times10^{-2})^2}$$
$$\Rightarrow q_1 = 1/39\times10^{-6}\ C$$
$$q = q_1 + q_2 \Rightarrow q_2 = q - q_1 = 8\times10^{-6} - 1/39\times10^{-6}$$
$$= 6/61\times10^{-6}\ C$$

۵۳●●●- یک توزیع بار متقارن کروی که به طور شعاعی نایکنواخت است، میدانی الکتریکی به بزرگی $E = Kr^4$ را که جهت آن به طور شعاعی از مرکز کره به طرف بیرون است، ایجاد می‌کند. در اینجا r فاصلهٔ شعاعی از مرکز کره و K ثابت است. چگالی حجمی ρ توزیع بار چیست؟

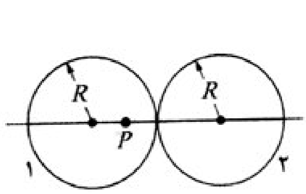
حل:

$$E = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 r^2} = k r^4 \Rightarrow q = 4\pi\varepsilon_0 k r^6$$
$$q = \int \rho dv = \int_{r=0}^{r} \rho(4\pi r^2)dr = 4\pi\varepsilon_0 k r^6$$

از طرفین رابطه بالا نسبت به r مشتق می‌گیریم:

$$\rho(4\pi r^2) = 24\pi\varepsilon_0 k r^5 \Rightarrow \rho = 6\varepsilon_0 k r^3$$

۵۴●●●- شکل ۱۹-۵۴، مقطعی از دو کرهٔ توپر را نشان می‌دهد که بار یکنواخت در سرتاسر حجم آنها توزیع شده است. شعاع هر کدام برابر با R است. نقطهٔ P روی خط واصل مرکز کره‌ها و در فاصلهٔ شعاعی $R/2/00$ از مرکز کرهٔ ۱ قرار دارد. اگر میدان الکتریکی خالص در نقطهٔ P برابر با صفر باشد، نسبت q_2/q_1 بار کل q_2 در کرهٔ ۲ به بار کل q_1 در کرهٔ ۱ چقدر است؟



شکل ۱۹-۵۴ مسئلهٔ ۵۴

حل:

$$E_1 = \frac{q_1 r}{4\pi\varepsilon_0 R^3} = \frac{q_1}{8\pi\varepsilon_0 R^2}$$
$$E_2 = \frac{q_2}{4\pi\varepsilon_0 (1/5R)^2} = \frac{q_2}{9\pi\varepsilon_0 R^2}$$

E_1 و E_2 همدیگر را خنثی کرده‌اند پس بارها همنام‌اند.

$$E_1 = E_2$$
$$\frac{q_1}{8\pi\varepsilon_0 R^2} = \frac{q_2}{9\pi\varepsilon_0 R^2} \Rightarrow \frac{q_2}{q_1} = \frac{9}{8} = 1/125$$

۵۵●●●- یک کرهٔ نارسانای توپر به شعاع $R = 5/60$ cm دارای توزیع بار نایکنواختی با چگالی بار حجمی $\rho = (14/1\ pC/m^3)r/R$ است که در آن r فاصلهٔ شعاعی از مرکز کره است. (الف) بار کل کره چقدر است؟ بزرگی E میدان الکتریکی در (ب) $r = 0$، (پ) $r = R/2/00$، و (ت) $r = R$ چقدر است؟ (ث) نمودار E برحسب r را رسم کنید. **ILW**

حل: (الف)

$$\rho = \rho_0 \frac{r}{R} \Rightarrow q = \int \rho dv = \int_{r=0}^{r=R} \rho_0 \frac{r}{R} 4\pi r^2 dr$$
$$= \frac{\pi\rho_0}{R} R^4 = \pi\rho_0 R^3$$
$$\Rightarrow q = \pi\times14/1\times10^{-12}\times(5/6\times10^{-2})^3$$
$$= 7/78\times10^{-15}\ C$$

(ب)

$$E = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 r^2}, q = \int_0^r \rho_0 \frac{r}{R} 4\pi r^2 dr = \frac{\pi\rho_0}{R} r^4$$
$$E = \frac{\pi\rho_0 r^4}{R}\frac{1}{4\pi\varepsilon_0 r^2} = \frac{\rho_0 r^2}{4\varepsilon_0 R}$$
$$r = 0 \Rightarrow E = 0$$

(پ)

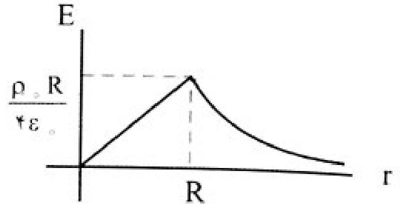
$$r=\frac{R}{۲}\Rightarrow E=\frac{۱۴/۱\times۱۰^{-۱۲}\times\frac{R^۲}{۴}}{۴\varepsilon_۰ R}=\frac{۱۴/۱\times۱۰^{-۱۲}R}{۱۶\varepsilon_۰}$$

$$=\frac{۱۴/۱\times۱۰^{-۱۲}\times۰/۰۵۶}{۱۶\times۸/۸۵\times۱۰^{-۱۲}}=۵/۵۷۶\times۱۰^{-۳}\ \frac{N}{C}$$

(ت)

$$r=R\Rightarrow E=\frac{\rho_۰ R}{۴\varepsilon_۰}=\frac{۱۴/۱\times۱۰^{-۱۲}\times۰/۰۵۶}{۴\times۸/۸۵\times۱۰^{-۱۲}}=۲/۲۳\times۱۰^{-۲}\ \frac{N}{C}$$

(ث)



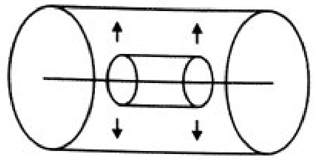
مسئله‌های اضافی

۵۶- *معمای خرده‌های شکلات*. انفجارهایی که به واسطهٔ تخلیهٔ بارهای الکتروستاتیکی (جرقه‌ها) رخ می‌دهند باعث خطرهایی جدی در دستگاههایی می‌شوند که با دانه‌ها و گردها کار می‌کنند. یک چنین انفجاری در گرد خرده‌های شکلات یک کارخانهٔ بیسکویت‌سازی در ۱۹۷۰/۱۳۴۹ رخ داد. کارگران بسته‌های گردی را که تحویل می‌گرفتند به داخل یک سطل بارگیری خالی می‌کردند که از آنجا نیز گردها از طریق لوله‌های پلاستیکی متصل به زمین به یک سیلو جهت نگهداری و انبار دمیده می‌شدند. در قسمتی از این مسیر، دو شرط برای وقوع انفجار وجود داشت: (۱) وقتی بزرگی میدان الکتریکی برابر یا بزرگتر از $۳/۰\times۱۰^۶$ N/C می‌شد، فروریزش الکتریکی و در نتیجه جرقهٔ الکتریکی می‌توانست رخ دهد. (۲) انرژی جرقه برابر یا بزرگتر از ۱۵۰ mJ می‌شد که می‌توانست گرد را تا حد انفجار آتش بزند. حال نخستین شرط وقوع انفجار در گردهای داخل لوله‌های پلاستیکی را بررسی می‌کنیم:

جریانی از گرد *باردار منفی* را در نظر بگیرید که به داخل یک لولهٔ استوانه‌ای به شعاع $R=۵/۰$ cm دمیده می‌شود. فرض کنید که گرد و بار آن با چگالی بار حجمی ρ به طور یکنواخت در طول لوله پخش می‌شوند. (الف) با استفاده از قانون گاؤس عبارتی برای بزرگی میدان الکتریکی $\vec{E}$ در لوله برحسب تابعی از فاصلهٔ شعاعی r از مرکز لوله به دست آورید. (ب) آیا E با افزایش r، بزرگتر می‌شود یا کوچکتر؟ (پ) آیا جهت $\vec{E}$ به طور شعاعی به طرف درون است یا به طرف بیرون؟ (ت) به ازای $\rho=۱/۱\times۱۰^{-۳}$ C/m^۳ (یک مقدار نوعی در کارخانه)، بیشینهٔ E را بیابید و تعیین کنید که این میدان بیشینه در کجا رخ می‌دهد؟ (ث) آیا جرقه می‌توانست رخ دهد؟ و اگر ممکن بود، در کجا؟ (این داستان با مسئلهٔ ۶۸ در فصل ۲۰ ادامه می‌یابد.)

حل: (الف) لوله را استوانه‌ای بسیار بلند در نظر می‌گیریم. از تقارن استوانه‌ای نتیجه می‌گیریم میدان شعاعی و عمود بر محور است. در نتیجه شاری از دو قاعده استوانه عبور نمی‌کند.

$$\oint\vec{E}\cdot\vec{ds}=\frac{q}{\varepsilon_۰}\Rightarrow E۲\pi r\ell=\frac{\rho\pi r^۲\ell}{\varepsilon_۰}$$



$$E=\frac{\rho\pi r^۲\ell}{۲\pi\varepsilon_۰ r\ell}=\frac{\rho r}{۲\varepsilon_۰}=\frac{-۱/۱\times۱۰^{-۳}\times r}{۲\times۸/۸۵\times۱۰^{-۱۲}}=-۶/۲۱\times۱۰^{۷}\,r\ \frac{N}{C}$$

(ب) با افزایش r اندازه میدان نیز افزایش می‌یابد.

(پ) چون بار منفی است جهت میدان شعاعی به طرف درون است.

(ت) در $r=R$ میدان بیشینه است.

$$E_{\max}=۶/۲۱\times۱۰^{۷}\times۰/۰۵=۳/۱۱\times۱۰^{۶}\ \frac{N}{C}$$

(ث) چون $E_{\max}$ بزرگتر از میدان لازم برای جرقه است بنابراین جرقه می‌توانست رخ دهد.

۵۷- بار Q به طور یکنواخت روی کره‌ای به شعاع R توزیع شده است. (الف) چه کسری از این بار داخل شعاع $r=R/۲/۰۰$ قرار گرفته است؟ (ب) نسبت بزرگی میدان الکتریکی در $r=R/۲$ به مقدار آن روی سطح کره چقدر است؟

حل: (الف)

$$\rho=\frac{Q}{\frac{۴}{۳}\pi R^۳}=\frac{۳Q}{۴\pi R^۳}$$

بار درون کره‌ای به شعاع $\frac{R}{۲}$ را با q نمایش می‌دهیم.

$$q=\rho\frac{۴}{۳}\pi\left(\frac{R}{۲}\right)^۳=\frac{۳Q}{۴\pi R^۳}\frac{۴}{۳}\pi\frac{R^۳}{۸}=\frac{Q}{۸}\Rightarrow\frac{q}{Q}=\frac{۱}{۸}$$

(ب)

میدان در $r=\frac{R}{۲}$:

$$E_۱=\frac{q}{۴\pi\varepsilon_۰ r^۲}=\frac{\frac{Q}{۸}}{۴\pi\varepsilon_۰\left(\frac{R}{۲}\right)^۲}=\frac{Q}{۸\pi\varepsilon_۰ R^۲}$$

میدان روی سطح کره برابر است با:

$$E=\frac{Q}{۴\pi\varepsilon_۰ R^۲}$$

$$\frac{E_۱}{E}=\frac{Q}{۸\pi\varepsilon_۰ R^۲}\frac{۴\pi\varepsilon_۰ R^۲}{Q}=\frac{۱}{۲}$$

۵۸- باری با چگالی حجمی یکنواخت $\rho=۳/۲\ \mu C/m^۳$، کرهٔ توپر نارسانایی به شعاع ۵/۰ cm را پر کرده است. بزرگی میدان الکتریکی در (الف) ۳/۵ cm و (ب) ۸/۰ cm از مرکز کره چقدر است؟

حل: (الف)

$$r<R\Rightarrow E=\frac{q}{۴\pi\varepsilon_۰ r^۲}=\frac{\rho\frac{۴}{۳}\pi r^۳}{۴\pi\varepsilon_۰ r^۲}=\frac{\rho r}{۳\varepsilon_۰}$$

$$=\frac{۳/۲\times۱۰^{-۶}\times(۰/۰۳۵)}{۳\times۸/۸۵\times۱۰^{-۱۲}}=۴/۲۲\times۱۰^{۳}\ \frac{N}{C}$$

(ب)

$$r>R \Rightarrow E=\frac{q}{۴\pi\varepsilon_۰ r^۲}=\frac{\rho\frac{۴}{۳}\pi R^۳}{۴\pi\varepsilon_۰ r^۲}=\frac{\rho R^۳}{۳\varepsilon_۰ r^۲}$$

$$=\frac{۳/۲\times۱۰^{-۶}\times(۰/۰۵)^۳}{۳\times۸/۸۵\times۱۰^{-۱۲}\times(۰/۰۸)^۲}=۲/۳۵\times۱۰^۳\ \frac{N}{C}$$

۵۹- میدان الکتریکی در نقطهٔ P درست بیرون سطح خارجی یک رسانای کروی توخالی به شعاع داخلی ۱۰ cm و شعاع خارجی ۲۰ cm، دارای بزرگی ۴۵۰ N/C و جهت آن به طرف بیرون است. وقتی بار نقطه‌ای نامعلوم Q در مرکز کره قرار داده شود، میدان الکتریکی در نقطهٔ P هنوز به طرف بیرون است، ولی بزرگی آن اکنون ۱۸۰ N/C است. (الف) پیش از آنکه Q در مرکز کره قرار داده شود، چه بار خالصی توسط سطح خارجی کره محصور شده است؟ (ب) بار Q چقدر است؟ پس از آنکه Q قرار داده شود، بار روی سطحهای (الف) داخلی و (ب) خارجی رسانا چقدر است؟

حل: (الف) میدان الکتریکی در سطح کره از رابطه روبرو به دست می‌آید:

$$E=\frac{q}{۴\pi\varepsilon_۰ R^۲}$$

چون میدان به طرف بیرون است بار مثبت می‌باشد.

$$۴۵۰=(۹\times۱۰^۹)\frac{q}{(۰/۲)^۲}\Rightarrow q=۲\times۱۰^{-۹}\ C$$

(ب) با قرار دادن بار Q در مرکز کره روی سطح داخلی بار $-Q$ ورودی سطح خارجی بار $q+Q$ قرار می‌گیرد.

$$E=\frac{q+Q}{۴\pi\varepsilon_۰ R^۲}\Rightarrow ۱۸۰=(۹\times۱۰^۹)\frac{(۲\times۱۰^{-۹}+Q)}{(۰/۲)^۲}\Rightarrow$$

$$\Rightarrow Q=-۱/۲\times۱۰^{-۹}\ C$$

(پ و ت) با قرار دادن Q بار $-Q$ برابر با $+۱/۲\times۱۰^{-۹}\ C$ روی سطح داخلی کره القا می‌شود. طبق پایستگی بار باید بار $+Q$ روی سطح خارجی کره القا شود که چون بار q قبلاً روی آن قرار داشت، بار روی سطح خارجی کره برابر $q+Q$ است

$$q+Q=۲\times۱۰^{-۹}-۱/۲\times۱۰^{-۹}=۰/۸\times۱۰^{-۹}\ C$$

۶۰- فرض کنید گویی باردار دارای چگالی بار منفی است که به طور یکنواخت به جز در مجرای شعاعی باریکی که با عبور از مرکز آن، سطح یک طرف را به سطح طرف مقابل وصل می‌کند، توزیع شده است. همچنین فرض کنید که می‌توانیم یک پروتون را در هر جایی داخل مجرا یا خارج گوی قرار دهیم. F_R را بزرگی نیروی الکتروستاتیکی در نظر می‌گیریم که وقتی پروتون روی سطح گوی به شعاع R قرار گیرد، بر آن وارد می‌شود. برحسب مضربی از R، در چه فاصله‌ای از سطح کره نقطه‌ای وجود دارد که اگر پروتون را (الف) از گوی دور کنیم و (ب) به داخل مجرا ببریم، بزرگی نیروی وارد بر آن برابر $۰/۵۰\ F_R$ شود؟

حل: طبق مسأله ۵۸ میدان درون کره از رابطه مقابل به دست می‌آید:

$$E=\frac{\rho r}{۳\varepsilon_۰}$$

در $r=R$ میدان بیشینه است.

$$E_{\max}=\frac{\rho R}{۳\varepsilon_۰}$$

در خارج از کره باردار میدان طبق مسأله ۵۸ به این شکل به دست می‌آید:

$$E=\frac{\rho R^۳}{۳\varepsilon_۰ r^۲}$$

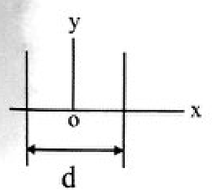
(الف) نیروی وارد بر پروتون $F=eE$ است که بیشینه آن در سطح کره باردار است.

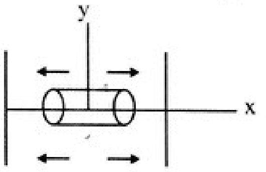
$$eE=\frac{۱}{۲}eE_{\max}\Rightarrow\frac{\rho R^۳}{۳\varepsilon_۰ r^۲}=\frac{۱}{۲}\frac{\rho R}{۳\varepsilon_۰}\Rightarrow r^۲=۲R^۲\Rightarrow r=\sqrt{۲}R$$

$$eE=\frac{۱}{۲}eE_{\max}\Rightarrow\frac{\rho r}{۳\varepsilon_۰}=\frac{۱}{۲}\frac{\rho R}{۳\varepsilon_۰}\Rightarrow r=\frac{R}{۲}$$

۶۱- باری با چگالی حجمی یکنواخت $\rho=۱/۲\ nC/m^۳$، قطعه‌ای نامتناهی میان $x=-۵/۰\ cm$ و $x=+۵/۰\ cm$ را پر می‌کند. بزرگی میدان الکتریکی در نقطه‌ای با مختصهٔ (الف) $x=۴/۰\ cm$ و (ب) $x=۶/۰\ cm$ چقدر است؟

حل:





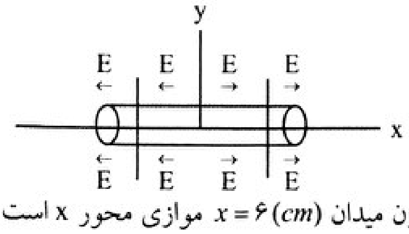
(الف) $x=۴\ cm$ درون توزیع بار قرار دارد.

به دلیل تقارن میدان موازی محور xها است و بنابراین شاری از سطح جانبی استوانه نمی‌گذرد.

$$\oint_S E\cdot dA=\frac{q}{\varepsilon_۰}\Rightarrow ۲EA=\frac{\rho A(۲x)}{\varepsilon_۰}\Rightarrow E=\frac{\rho x}{\varepsilon_۰}=$$

$$\frac{۱/۲\times۱۰^{-۹}\times(۰/۰۴)}{۸/۸۵\times۱۰^{-۱۲}}=۵/۴۲\frac{N}{C}$$

(ب)



به دلیل تقارن میدان $x=۶(cm)$ موازی محور x است و شاری از سطح جانبی استوانه نمی‌گذرد.

$$\oint_S \vec{E}\cdot\overrightarrow{dA}=\frac{q}{\varepsilon_۰}\Rightarrow$$

$$۲EA=\frac{\rho Ad}{\varepsilon_۰}\Rightarrow E=\frac{\rho d}{۲\varepsilon_۰}=\frac{۱/۲\times۱۰^{-۹}\times(۰/۱)}{۲\times۸/۸۵\times۱۰^{-۱۲}}=۶/۷۸\frac{N}{C}$$

۶۲- چگالی بار سطحی یکنواخت $8.0\ nC/m^2$ روی تمام صفحهٔ xy توزیع شده است. شار الکتریکی عبوری از یک سطح گاؤسی کروی به مرکز مبداء دستگاه مختصات و به شعاع $5.0\ cm$ چقدر است؟

حل:

$$\Phi=\frac{q}{\varepsilon_0}=\frac{\sigma\pi r^2}{\varepsilon_0}=\frac{(8\times10^{-9})\pi(0.05)^2}{8.85\times10^{-12}}=7.1\frac{N\cdot m^2}{C}$$

۶۳- یک پوستهٔ کروی فلزی و نازک دارای شعاع $25.0\ cm$ و بار $2.00\times10^{-7}\ C$ است. E را برای نقطه‌ای (الف) در داخل پوسته، (ب) درست خارج پوسته، و (پ) $3.00\ m$ از مرکز پوسته، به دست آورید.

حل: (الف) در داخل پوسته باری وجود ندارد، بنابراین میدان صفر است.

(ب)
$$E=\frac{q}{4\pi\varepsilon_0R^2}=\frac{2\times10^{-7}\times9\times10^9}{(0.25)^2}=2.88\times10^4\frac{N}{C}$$

(پ)
$$E=\frac{q}{4\pi\varepsilon_0r^2}=\frac{9\times10^9\times2\times10^{-7}}{9}=200\frac{N}{C}$$

۶۴- میدان الکتریکی در فضای خاصی برابر با $\vec{E}=(x+2)\hat{i}\ N/C$ است، که در آن x برحسب متر است. یک سطح گاؤسی استوانه‌ای به شعاع $20\ cm$ را که هم‌محور با محور x است در نظر بگیرید. یک سر استوانه در $x=0$ قرار دارد. (الف) بزرگی شار الکتریکی عبوری از سر دیگر استوانه در $x=2.0\ m$، چقدر است؟ (ب) بار خالص محصور شده در داخل استوانه چقدر است؟

حل: (الف)

$$x=2m\Rightarrow\Phi_1=\vec{E}\cdot\vec{s}=4\hat{i}\cdot(\pi)(0.2)^2\hat{i}=0.502\frac{N\cdot m^2}{C}$$

(ب) چون میدان موازی محور x است، از سطح جانبی استوانه شاری عبور نمی‌کند. شاری که از قاعده استوانه در $x=0$ می‌گذرد برابر است با:

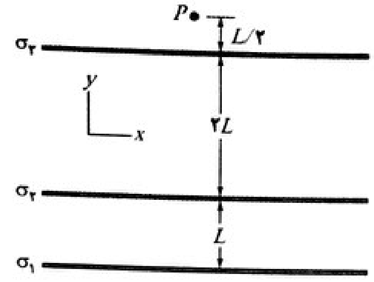
$$\Phi_2=\vec{E}\cdot\vec{s}=2\hat{i}\cdot\pi(0.2)^2(-\hat{i})=-0.251\frac{N\cdot m^2}{C}$$

$$\Phi_{total}=0.502-0.251=0.251\frac{N\cdot m^2}{C}$$

$$\Phi_{total}=\frac{q}{\varepsilon_0}\Rightarrow0.251=\frac{q}{8.85\times10^{-12}}$$

$$\Rightarrow q=2.22\times10^{-12}\ C$$

۶۵- شکل ۱۹-۵۵، مقطع سه برگهٔ نارسانای بزرگ نامتناهی را نشان می‌دهد که روی آنها بار به طور یکنواخت پخش شده است. چگالی‌های بار سطحی عبارت‌اند از: $\sigma_1=+2.00\ \mu C/m^2$، $\sigma_2=+4.00\ \mu C/m^2$ و $\sigma_3=-5.00\ \mu C/m^2$، و فاصلهٔ L برابر است با $L=1.50\ cm$. برحسب نمادگذاری بردارهای یکه، میدان الکتریکی خالص در نقطهٔ P چیست؟



شکل ۱۹-۵۵ مسئلهٔ ۶۵

حل:

$$\vec{E}=\frac{\sigma_1}{2\varepsilon_0}\hat{j}+\frac{\sigma_2}{2\varepsilon_0}\hat{j}+\frac{\sigma_3}{2\varepsilon_0}\hat{j}=\frac{\sigma_1+\sigma_2+\sigma_3}{2\varepsilon_0}\hat{j}=\frac{(2+4-5)\times10^{-6}}{2\times8.85\times10^{-12}}\hat{j}=5.56\times10^4\,\hat{j}\,\frac{N}{C}$$

۶۶- بزرگی شار الکتریکی خالص عبوری از هر وجه یک تاس مضربی از $10^3\ N.m^2/C$ است که این مضرب دقیقاً برابر با تعداد نقطه‌های N روی هر وجه (۱ تا ۶) است. برای N های فرد، شار به طرف درون و برای N های زوج، شار به طرف بیرون است. بار خالص داخل تاس چقدر است؟

حل:

$$\Phi=(-1+2-3+4-5+6)\times10^3=3\times10^3\frac{N\cdot m^2}{C}$$

$$q=\varepsilon_0\Phi=8.85\times10^{-12}\times3\times10^3=2.66\times10^{-8}\ C$$

۶۷- یک سطح گاؤسی به شکل نیمکره‌ای به شعاع $R=5.68\ cm$ در میدان الکتریکی یکنواختی به بزرگی $2.50\ N/C$ قرار دارد. این سطح، هیچ بار خالصی را در بر ندارد. در قاعدهٔ (تخت) این سطح، میدان عمود و به طرف این سطح است. شار عبوری از (الف) قاعده و (ب) بخش خمیدهٔ سطح چقدر است؟

حل: (الف) میدان عمود بر سطح قاعده است. شاری که از این سطح می‌گذرد، به طرف داخل نیمکره می‌باشد.

$$\Phi_1=\vec{E}\cdot\vec{s}=-(2.5)\times\pi\times(5.68\times10^{-2})^2=-2.53\times10^{-2}\frac{N\cdot m^2}{C}$$

(ب) سطح نیمکره و قاعده آن تشکیل یک سطح بسته می‌دهند که هیچ باری درون آن نیست. پس:

$$\Phi_{total}=\Phi_1+\Phi_2=0\Rightarrow\Phi_2=-\Phi_1=2.53\times10^{-2}\frac{N\cdot m^2}{C}$$

۶۸- بار نقطه‌ای $q=1.0\times10^{-7}\ C$ در مرکز یک کاواک کروی به شعاع $3.0\ cm$ در یک قطعهٔ فلزی قرار دارد. با استفاده از قانون گاؤس، میدان الکتریکی را در (الف) $1.5\ cm$ از مرکز کاواک و (ب) نقطه‌ای داخل فلز، به دست آورید.

حل: الف)

$$r=1.5(cm)\Rightarrow E=\frac{q}{4\pi\varepsilon_0r^2}=\frac{9\times10^9\times1\times10^{-7}}{(0.015)^2}=4\times10^6\frac{N}{C}$$

(ب) میدان درون رسانا صفر است. $E=0$

۶۹- یک پوستهٔ کروی فلزی نازک به شعاع a دارای بار q_a است. این کره با پوستهٔ کروی فلزی نازک دیگری به شعاع $b>a$ و بار q_b هم‌مرکز است. میدان الکتریکی را در نقطه‌هایی به فاصلهٔ r از مرکز مشترک به دست آورید که در آنها (الف) $r<a$، (ب) $a<r<b$، و (پ) $r>b$ است. (ت) دربارهٔ معیاری که با استفاده از آن چگونگی توزیع بار روی سطح‌های داخلی و خارجی پوسته‌ها را تعیین می‌کنید، بحث کنید.

حل: (الف) سطح گاوس را کره‌ای به شعاع r در نظر می‌گیریم که هیچ باری درون آن وجود ندارد پس میدان صفر است.

$r<a$
$E=0$

(ب)
$$a<r<b \Rightarrow E=\frac{q_a}{4\pi\varepsilon_\circ r^2}$$

(پ)
$$r>b \Rightarrow E=\frac{q_a+q_b}{4\pi\varepsilon_\circ r^2}$$

(ت) بار روی سطح داخلی پوسته a برابر صفر است، چون بار همیشه روی سطح خارجی رسانا قرار می‌گیرد. پس بار q_a روی سطح خارجی پوسته a جمع می‌شود. بار $-q_a$ روی سطح داخلی پوسته b القا می‌شود و در نتیجه بار q_b+q_a روی سطح بیرونی پوسته b قرار می‌گیرد.

۷۰- چه بار خالصی توسط مکعب گاوسی مسئلهٔ ۲ در بر گرفته شده است؟

حل: در مسأله ۲ شار کل که از سطح می‌گذرد را به دست آوردیم:

$$\Phi=-48\,\frac{\mathrm{N\cdot m^2}}{\mathrm{C}}$$
$$q=\varepsilon_\circ\Phi=8.85\times10^{-12}\times(-48)=-4.24\times10^{-10}\ \mathrm{C}$$

۷۱- پروتونی با تندی $v=3.00\times10^5$ m/s درست بیرون کرهٔ بارداری به شعاع $r=1.00$ cm، می‌چرخد. بار روی کره چقدر است؟

حل: نیروی جانب مرکز نیروی جاذبه کولنی است.

$$m\frac{v^2}{R}=\frac{eq}{4\pi\varepsilon_\circ R^2}\Rightarrow$$
$$q=\frac{4\pi\varepsilon_\circ Rmv^2}{e}=\frac{4\pi\times8.85\times10^{-12}\times0.01\times1.67\times10^{-27}\times(3\times10^5)^2}{1.6\times10^{-19}}$$

نیرو مرکزگرا و به سمت داخل، به طرف مرکز کره است. چون بار پروتون مثبت است و میدان الکتریکی نیز باید رو به داخل باشد پس بار روی کره منفی است.

$$q=-1.04\times10^{-9}\ \mathrm{C}$$

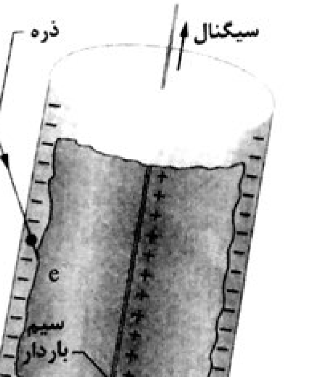
۷۲- معادلهٔ ۱۹-۱۱ $(E=\sigma/\varepsilon_\circ)$ میدان الکتریکی را در نقطه‌های نزدیک به سطح رسانای بارداری به دست می‌دهد. این معادله را برای یک کرهٔ رسانا به شعاع r و بار q به کار ببرید، و نشان دهید که میدان الکتریکی در بیرون این کره همان میدان ناشی از یک بار نقطه‌ای است که در مرکز کره قرار گرفته باشد.

حل: نقاط نزدیک به سطح کره یعنی نقاطی که تقریباً به شعاع R کره هستند.

$$E=\frac{\sigma}{\varepsilon_\circ}=\frac{\frac{q}{4\pi R^2}}{\varepsilon_\circ}=\frac{q}{4\pi\varepsilon_\circ R^2}$$

که مانند میدان یک بار نقطه‌ای است.

۷۳- شکل ۱۹-۵۶ یک شمارندهٔ گایگر[1] را نشان می‌دهد که برای آشکارسازی تابشهای یونیده (تابشهایی که باعث یونیده شدن اتمها می‌شود) به کار می‌رود. این شمارنده، شامل یک سیم مرکزی باردار مثبت است که توسط یک پوستهٔ استوانه‌ای رسانا و هم‌مرکز با بار منفی یکسان احاطه شده است. بنابراین، یک میدان الکتریکی شعاعی قوی در داخل این پوسته ایجاد می‌شود. پوسته دارای یک گاز خنثی با فشار پایین است. یک ذرهٔ تابشی که از طریق دیوارهٔ پوسته وارد دستگاه شود، چند اتم گاز را یونیده می‌کند. در نتیجه، الکترون‌های آزاد (e) به سوی سیم مثبت کشیده می‌شوند. ولی، میدان الکتریکی به حدی قوی است که در بین برخورد اتمهای گاز، الکترونهای آزاد انرژی کافی برای یونیده کردن اتمهای دیگر را نیز به دست می‌آورند و بدین ترتیب الکترونهای آزاد بیشتری ایجاد می‌شوند و این فرایند تا هنگامی که الکترونها به سیم برسند، ادامه می‌یابد. "بهمن" حاصل از الکترونها توسط سیم جمع‌آوری می‌شود و سیگنالی به وجود می‌آید که برای ثبت کردن‌عبور ذرهٔ اصلی تابش به کار می‌رود. فرض کنید که شعاع سیم مرکزی $25\mu m$، شعاع داخلی پوسته ۱/۴ cm، و طول پوسته ۱۶ cm باشد. اگر میدان الکتریکی روی دیوارهٔ درونی پوسته 2.9×10^4 N/C باشد، بار مثبت کل در سیم مرکزی چقدر است؟



شکل ۱۹-۵۶ مسئلهٔ ۷۳

حل: چون طول استوانه بسیار بزرگتر از شعاع قاعده است، می‌توان آن را بسیار طویل در نظر گرفت. سطح گاوسی را

---
1. Geiger

استوانه‌ای به دور سیم مرکزی و هم محور با آن در نظر می‌گیریم و قانون گاوسی را به کار می‌بریم. چون بزرگی میدان روی دیواره درونی پوسته معلوم است شعاع سطح گاوسی را برابر با R می‌گیریم. جداره داخلی استوانه بدون بار است، بنابراین بار محصور شده در سطح گاوسی همان بار سیم مرکزی است.

$$\oint \vec{E}\cdot\vec{ds} = \frac{q}{\varepsilon_\circ} \Rightarrow E۲\pi RL = \frac{q}{\varepsilon_\circ} \Rightarrow E = \frac{q}{۲\pi\varepsilon_\circ RL}$$

$$۲/۹\times۱۰^{۴} = \frac{q}{۲\pi\times۸/۸۵\times۱۰^{-۱۲}\times(۱/۴\times۱۰^{-۲})\times۰/۱۶} = ۳/۶\times۱۰^{-۹}\ \mathrm{C}$$

۷۴- باری به طور یکنواخت در سرتاسر حجم استوانه‌ای توپر به شعاع R و طول نامتناهی توزیع شده است. (الف) نشان دهید در فاصلهٔ $r < R$ از محور استوانه داریم

$$E = \frac{\rho r}{۲\varepsilon_\circ}$$

که در آن ρ چگالی بار حجمی است. (ب) عبارتی برای E، وقتی $r > R$ است، بنویسید.

حل: (الف) توزیع بار دارای تقارن استوانه‌ای است. میدان شعاعی و عمود بر محور است. بنابراین شاری از دو سطح قاعده استوانه گاوس عبور نمی‌کند.

$$r < R \Rightarrow \oint E\cdot ds = \frac{q}{\varepsilon_\circ} \Rightarrow E۲\pi rL = \frac{\rho\pi r^۲ L}{\varepsilon_\circ} \Rightarrow E = \frac{\rho r}{۲\varepsilon_\circ}$$

(ب)

$$r > R \Rightarrow \oint E\cdot ds = \frac{q}{\varepsilon_\circ} \Rightarrow E۲\pi rL = \frac{\rho\pi R^۲ L}{\varepsilon_\circ} \Rightarrow E = \frac{\rho R^۲}{۲\varepsilon_\circ r}$$

۷۵- آب در یک نهر آبیاری به پهنای $w = ۳/۲۲\ \mathrm{m}$ و عمق $d = ۱/۰۴\ \mathrm{m}$، با تندی $۰/۲۰۷\ \mathrm{m/s}$ جاری می‌شود. شار جرمی آب عبوری از یک سطح فرضی برابر با حاصلضرب چگالی آب ($۱۰۰۰\ \mathrm{kg/m^۳}$) در شار حجمی عبوری آن از این سطح است. شار جرمی عبوری از سطحهای فرضی زیر را پیدا کنید: (الف) سطحی به مساحت wd، کاملاً داخل آب و عمود بر جریان؛ (ب) سطحی به مساحت $۳wd/۲$، که به اندازهٔ wd در آب فرو رفته است و عمود بر جریان؛ (پ) سطحی به مساحت $wd/۲$ که کاملاً داخل آب است و عمود برجریان؛ (ت) سطحی به مساحت wd که نیمی از آن داخل آب و نیمی دیگر در خارج آن است و عمود بر جریان؛ (ث) سطحی به مساحت wd که کاملاً داخل آب است و بردار عمود بر سطح آن با جهت جریان زاویهٔ $۳۴/۰^\circ$ می‌سازد.

حل: (الف) شار جرمی برابر است با:

$$\Phi_m = \omega d\rho v =$$
$$۳/۲۲\times۱/۰۴\times۱۰۰۰\times۰/۲۰۷ = ۶۹۳\ \frac{\mathrm{kg}}{\mathrm{s}}$$

(ب) چون آب فقط از سطح ωd شارش می‌یابد، شار عبوری از این سطح همان $۶۹۳\ \frac{\mathrm{kg}}{\mathrm{s}}$ است.

(پ)

$$\Phi_m = \left(\frac{\omega d}{۲}\right)\rho v = \frac{۶۹۳}{۲} = ۳۴۶/۵\ \frac{\mathrm{kg}}{\mathrm{s}}$$

(ت) آب از سطح $\frac{\omega d}{۲}$ شارش می‌یابد، شار همان $۳۴۶/۵\ \frac{\mathrm{kg}}{\mathrm{s}}$ است.

(ث)

$$\Phi_m = (\omega d\cos\theta)\rho v = ۶۹۳\times\cos۳۴ = ۵۷۵\ \frac{\mathrm{kg}}{\mathrm{s}}$$

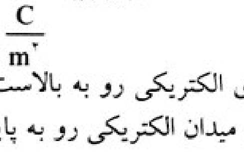
۷۶- یک الکترون آزاد میان دو صفحهٔ نارسانای موازی و بزرگ افقی که به فاصلهٔ $۲/۳\ \mathrm{cm}$ از هم واقع‌اند، قرار دارد. یکی از صفحه‌ها دارای بار مثبت یکنواخت و دیگری دارای بار منفی یکنواخت است. نیروی وارد بر الکترون بر اثر میدان الکتریکی $\vec{E}$ میان صفحه‌ها با نیروی گرانشی وارد بر الکترون موازنه کرده است. (الف) بزرگی چگالی بار سطحی روی صفحه‌ها و (ب) جهت (رو به بالا یا رو به پایین) $\vec{E}$ چگونه است؟ SSM

حل: (الف) بین دو صفحه میدان یکنواخت و برابر $\frac{\sigma}{\varepsilon_\circ}$ است. در حالت تعادل نیروی کولنی eE نیروی وزن را خنثی می‌کند.

$$mg = eE = \frac{e\sigma}{\varepsilon_\circ}$$
$$\Rightarrow \sigma = \frac{mg\varepsilon_\circ}{e} = \frac{۹/۱\times۱۰^{-۳۱}\times۸/۸۵\times۱۰^{-۱۲}\times۹/۸}{۱/۶\times۱۰^{-۱۹}}$$
$$= ۴/۹۴\times۱۰^{-۲۲}\ \frac{\mathrm{C}}{\mathrm{m^۲}}$$

(ب) جهت نیروی الکتریکی رو به بالاست. چون بار الکترون منفی است جهت میدان الکتریکی رو به پایین است.

۷۷- یک کره توپر نارسانا دارای چگالی بار حجمی یکنواخت ρ است. فرض کنید $\vec{r}$ برداری از مرکز کره به سوی نقطهٔ دلخواه P در داخل کره است. (الف) نشان دهید که میدان الکتریکی در نقطهٔ P با $\vec{E} = \rho\vec{r}/۳\varepsilon_\circ$ داده می‌شود. (توجه کنید که این نتیجه مستقل از شعاع کره است.) (ب) یک کاواک کروی، آن گونه که در شکل ۱۹-۵۷ نشان داده شده، درون کره ایجاد شده است. با استفاده از مفاهیم برهم‌نهی نشان دهید که میدان الکتریکی در تمام نقطه‌های داخل کاواک، یکنواخت و برابر با $\vec{E} = \rho\vec{a}/۳\varepsilon_\circ$ است که در آن $\vec{a}$ بردار مکان از مرکز کره به سوی مرکز کاواک است. (توجه کنید که این نتیجه به شعاع کره و شعاع کاواک بستگی ندارد.)



شکل ۱۹-۵۷ مسئلهٔ ۷۷

حل: (الف)

$$r<R \Rightarrow \oint \vec{E}\cdot \vec{ds} = \frac{q}{\varepsilon_0} \Rightarrow$$

$$E(4\pi r^2) = \frac{q}{\varepsilon_0} \Rightarrow E = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 r^2} \Rightarrow$$

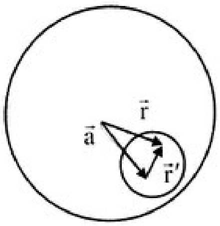
$$E = \frac{\rho \frac{4}{3}\pi r^3}{4\pi\varepsilon_0 r^2} = \frac{\rho r}{3\varepsilon_0}$$

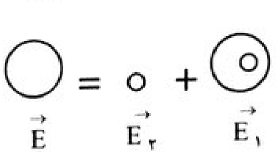
چون میدان شعاعی است:

$$\vec{E} = \frac{\rho \vec{r}}{3\varepsilon_0}$$

(ب) از اصل بر هم نهی استفاده می‌کنیم.

میدان کاواک توپر − میدان کره = میدان داخل کاواک





براساس نتیجه قسمت الف میدان کاواک توپر (که یک کره نارساناست) به شعاع $\vec{r}'$، چنین می‌شود: $\vec{E}_2 = \frac{\rho \vec{r}'}{3\varepsilon_0}$

۷۸- چگالی بار یکنواخت $500\ nC/m^3$ در سرتاسر یک حجم کروی به شعاع ۶/۰۰ cm توزیع شده است. یک سطح گاؤسی مکعبی را در نظر بگیرید که مرکز آن بر مرکز کره واقع است. شار الکتریکی عبوری از این سطح مکعبی چقدر است، در صورتی که طول هر ضلع آن (الف) ۴/۰۰ cm و (ب) ۱۴/۰ cm باشد؟

حل: (الف)

$a = 4\ cm \Rightarrow$ قطر مکعب $= a\sqrt{3} = 6/92\ cm$

پس تمام حجم مکعب داخل کره و دارای بار است. شاری که از سطح مکعبی می‌گذرد متناسب با بار درون آن است.

$$\Phi = \frac{q}{\varepsilon_0} = \frac{\rho a^3}{\varepsilon_0} = \frac{500\times10^{-9}\times(0/04)^3}{8/85\times10^{-12}} = 3/62\ \frac{N\cdot m^2}{C}$$

(ب)

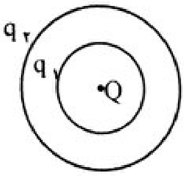
پس تمام بار کره درون مکعب قرار می‌گیرد. $a = 14\ cm$

$$\Phi = \frac{q}{\varepsilon_0} = \frac{\rho \frac{4}{3}\pi R^3}{\varepsilon_0} = \frac{\rho 4\pi R^3}{3\varepsilon_0} \Rightarrow$$

$$\Phi = \frac{500\times10^{-9}\times4\pi\times(0/06)^3}{3\times8/85\times10^{-12}} = 51/1\ \frac{N\cdot m^2}{C}$$

۷۹- بار $-14\mu C$ روی سطح خارجی یک پوستهٔ رسانای کروی، و یک ذرهٔ باردار در داخل آن قرار دارد. اگر بار خالص روی پوسته $-10\ \mu C$ باشد، بار (الف) روی سطح داخلی پوسته و (ب) ذره، چقدر است؟

حل: (الف) برای آنکه بار خالص $-10(\mu c)$ داشته باشیم هنگامی که بار $-14(\mu c)$ روی سطح خارجی توزیع شده است باید بار $+4(\mu c)$ روی سطح داخلی توزیع شده باشد. چون در حالت الکتروستاتیک بارها روی سطح خارجی رسانا قرار می‌گیرد.



$q_2 = -14\ \mu C \quad , \quad q_1 + q_2 = -10\ \mu C \Rightarrow q_1 = 4\ \mu C$

(ب) برای آنکه میدان داخل رسانا صفر باشد باید میدان ناشی از بار $+4\ \mu C$ روی سطح داخلی توسط میدان حاصل از ذره باردار، خنثی شود. پس بار ذره $-4\ \mu C$ است.

$Q + q_1 = 0 \Rightarrow Q = -q_1 = -4\ \mu C$

۸۰- بار ۶/۰۰ pC به طور یکنواخت در سر تا سر حجم کره‌ای به‌شعاع $r = 4/00\ cm$ پخش شده است. بزرگی میدان الکتریکی در فاصلهٔ شعاعی (الف) ۶/۰۰ cm و (ب) ۳/۰۰ cm چقدر است؟

حل: (الف)

$$r>R \Rightarrow E = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 r^2} = \frac{9\times10^9\times6\times10^{-12}}{(0/06)^2} = 15\ \frac{N}{C}$$

(ب) طبق مسأله ۷۷ میدان الکتریکی به دست می‌آید:

$$r<R \Rightarrow E = \frac{\rho r}{3\varepsilon_0}$$

$$\rho = \frac{q}{\frac{4}{3}\pi R^3} = \frac{3q}{4\pi R^3} = \frac{3\times6\times10^{-12}}{4\pi\times(0/04)^3} = 2/24\times10^{-8}\ \frac{C}{m^3}$$

$$E = \frac{2/24\times10^{-8}\times0/03}{3\times8/85\times10^{-12}} = 25/3\ \frac{N}{C}$$

۸۱- یک گوی کروی باردار دارای چگالی بار یکنواخت است. برحسب شعاع گوی R، در چه فاصله‌های شعاعی (الف) در داخل و (ب) در خارج گوی، بیشینهٔ میدان الکتریکی برابر با $\frac{1}{4}$ بزرگی بیشینهٔ میدان آن است؟

حل: (الف) طبق مسأله ۷۷ میدان داخل کره از این رابطه به دست آمد:

$$E = \frac{\rho r}{3\varepsilon_0} \Rightarrow$$

$$E = \frac{\frac{q}{\frac{4}{3}\pi R^3} r}{3\varepsilon_0} = \frac{qr}{4\pi\varepsilon_0 R^3}$$

میدان در سطح کره بیشینه است. $r = R$

$$E_{max} = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 R^2}$$

$$\frac{E}{E_{max}} = \frac{qr}{4\pi\varepsilon_0 R^3}\,\frac{4\pi\varepsilon_0 R^2}{q} = \frac{r}{R} = \frac{1}{4} \Rightarrow r = \frac{1}{4}R$$

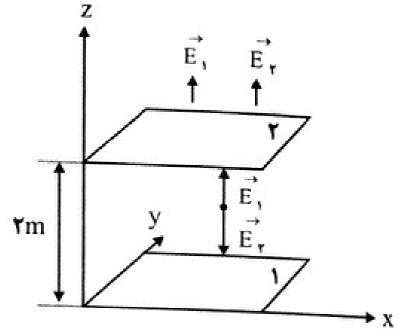
(ب)

$$E=\frac{q}{4\pi\varepsilon_0 r^2}\Rightarrow\frac{E}{E_{max}}=\frac{q}{4\pi\varepsilon_0 r^2}\frac{4\pi\varepsilon_0 R^2}{q}=\frac{R^2}{r^2}=\frac{1}{4}\Rightarrow$$

$$r^2=4R^2\Rightarrow r=2R$$

۸۲- باری با چگالی سطحی یکنواخت $8/00\ nC/m^2$ روی تمام صفحهٔ xy توزیع شده‌است؛ باری با چگالی سطحی یکنواخت $3/00\ nC/m^2$ روی صفحه‌ای موازی که با $z=2/00\ m$ تعریف شده، توزیع شده است. بزرگی میدان الکتریکی را در نقطه‌ای با مختصهٔ z (الف) $1/00\ m$ و (ب) $3/00\ m$، تعیین کنید.

حل:



$$E_1=\frac{\sigma_1}{2\varepsilon_0}=\frac{8\times10^{-9}}{2\times8/85\times10^{-12}}=452\ \frac{N}{C}$$

$$E_2=\frac{\sigma_2}{2\varepsilon_0}=\frac{3\times10^{-9}}{2\times8/85\times10^{-12}}=169/5\ \frac{N}{C}$$

(الف) $z=1\ m$ بین دو صفحه قرار دارد.

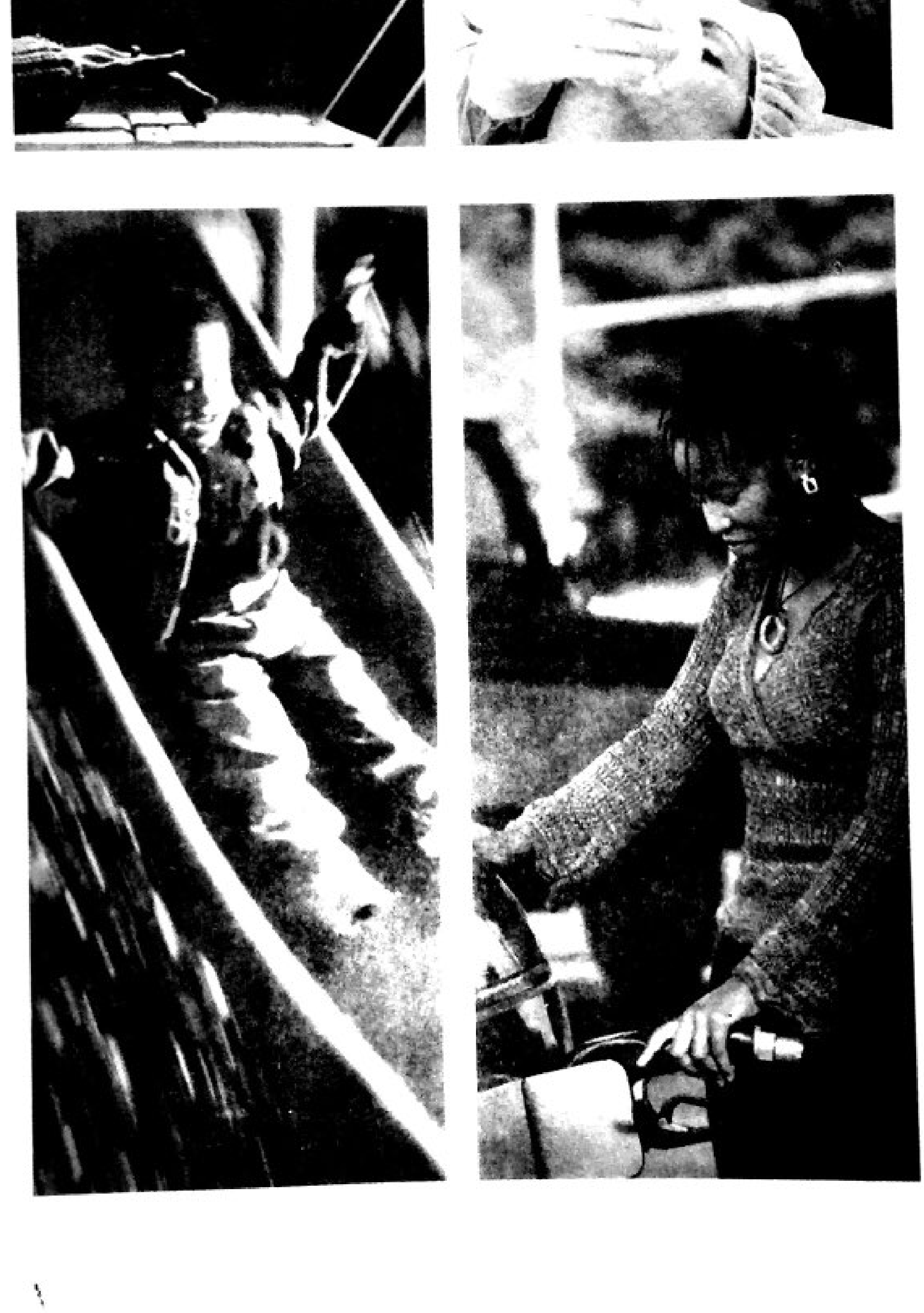
$$E=E_1-E_2=452-169/5=282/5\ \frac{N}{C}$$

(ب) $z=3m$ بالای صفحه دوم قرار دارد.

$$E=E_1+E_2=452+169/5=621/5\ \frac{N}{C}$$

۲۰

پتانسیل الکتریکی



بخش ۲۰-۳ پتانسیل الکتریکی

●۱- بیشتر مواد سازندهٔ حلقه‌های زحل به شکل دانه‌های غبار ریزی با شعاعی از مرتبهٔ $۱۰^{-۶}$m هستند. این دانه‌ها در ناحیه‌ای که شامل گاز یونیدهٔ رقیقی است قرار گرفته‌اند، و الکترونهای اضافی را جذب می‌کنند. به طور تقریبی، فرض کنید هر دانه، کره‌ای به شعاع $R=۱/۰\times۱۰^{-۶}$m است. هر دانه چه تعداد الکترون را باید جذب کند تا پتانسیل روی سطح آن (با فرض آنکه در بینهایت $V=۰$ است) برابر با -۴۰۰V شود؟

حل:

$$V=\frac{kq}{r}\Rightarrow -۴۰۰=\frac{(۹\times۱۰^{۹})}{۱\times۱۰^{-۶}}\Rightarrow q=-۴/۴۴\times۱۰^{-۱۴}\ \text{C}$$

$$N=\frac{q}{e}=\frac{-۴/۴۴\times۱۰^{-۱۴}}{-۱/۶\times۱۰^{-۱۹}}=۲/۷۸\times۱۰^{۵}$$

●۲- اختلاف پتانسیل الکتریکی میان زمین و ابر در یک توفان تندری خاص، $۱/۲\times۱۰^{۶}$ V است. بزرگی تغییر در انرژی پتانسیل الکتریکی الکترونی که میان زمین و این ابر حرکت می‌کند، برحسب یکای الکترون - ولت چقدر است؟

حل:

$$\Delta U=q\Delta V=(۱/۶\times۱۰^{-۱۹})(۱/۲\times۱۰^{۹})=۱/۹۲\times۱۰^{-۱۰}\ \text{J}$$
$$=۱/۲\times۱۰^{۹}\ \text{eV}$$

●۳- باتری ۱۲V اتومبیل می‌تواند از طریق یک مدار، بار کل (آمپر- ساعت) ۸۴A.h را از پایانه‌ای به پایانهٔ دیگر بفرستد. (الف) این بار معادل چند کولن است؟ (*راهنمایی:* معادلهٔ ۱۷-۳ را ببینید.) (ب) اگر تمام این بار باعث تغییر اختلاف پتانسیل ۱۲V شود، این چه مقدار انرژی دربر دارد؟ SSM

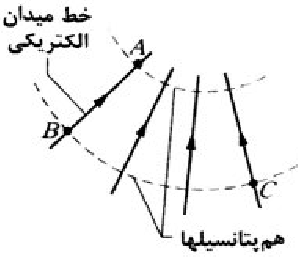
حل: (الف)

$$q=It=۸۴\ \text{A}\cdot\text{h}=(۸۴)(۳۶۰۰)=۳/۰۲\times۱۰^{۵}\ \text{C}$$

(ب)
$$\Delta U=q\Delta V=(۱۲)(۳/۰۲\times۱۰^{۵})=۳/۶۲\times۱۰^{۶}\ \text{J}$$

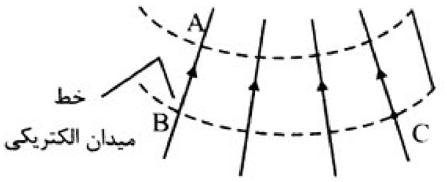
بخش ۲۰-۵ محاسبهٔ پتانسیل از روی میدان

●۴- وقتی یک الکترون در امتداد خط میدان شکل ۲۰-۲۹ از A به B حرکت کند، میدان الکتریکی، کاری به اندازهٔ $۳/۹۴\times۱۰^{-۱۹}$J روی آن انجام می‌دهد. اختلاف پتانسیلهای الکتریکی (الف) V_B-V_A، (ب) V_C-V_A و (پ) V_C-V_B چقدرند؟



شکل ۲۰-۲۹ مسئلهٔ ۴

حل:



(الف)
$$W=q\Delta V\Rightarrow$$
$$۳/۹۴\times۱۰^{-۱۹}=(۱/۶\times۱۰^{-۱۹})\Delta V\Rightarrow$$
$$\Delta V=V_B-V_A=۲/۴۶\ \text{V}$$

(ب) نقاط B و C روی یک سطح هم پتانسیل قرار دارند پس:

$$\Delta V=V_C-V_A=V_B-V_A=۲/۴۶\text{V}$$

(پ) نقاط B و C روی یک سطح هم پتانسیل قرار دارند.

$$\Delta V=V_C-V_B=۰$$

●۵- یک ورقهٔ نارسانای نامتناهی دارای باری با چگالی سطحی $\sigma=۰/۱۰\mu\text{C/m}^{۲}$ روی یک طرف خود است. سطحهای هم پتانسیلی که اختلاف پتانسیل آنها ۵۰V است، در چه فاصله‌ای از یکدیگر قرار دارند؟ SSM

حل:
$$E=\frac{\sigma}{۲\varepsilon_۰},\Delta V=\int_۱^۲\vec{E}\cdot\vec{dr}=\frac{\sigma}{۲\varepsilon_۰}\Delta r\Rightarrow$$
$$۵۰=\frac{(۰/۱\times۱۰^{-۶})\Delta r}{(۲)(۸/۸۵\times۱۰^{-۱۲})}\Rightarrow\Delta r=۸/۸۵\times۱۰^{-۳}\ \text{m}$$

●۶- دو صفحهٔ رسانای موازی و بزرگ که ۱۲cm از هم فاصله دارند، دارای بارهایی با بزرگی یکسان و علامت مخالف روی سطحهای مقابل‌اند. نیروی الکتروستاتیکی به بزرگی $۳/۹\times۱۰^{-۱۵}$N بر الکترونی که در نقطه‌ای میان این دو صفحه قرار دارد، وارد می‌شود. (از اثر لبه‌ها چشمپوشی کنید). (الف) میدان الکتریکی را در مکان الکترون پیدا کنید. (ب) اختلاف پتانسیل میان صفحه‌ها چقدر است؟

حل: (الف)

$$F=qE\Rightarrow ۳/۹\times۱۰^{-۱۵}=(۱/۶\times۱۰^{-۱۹})E\Rightarrow E=۲/۴۴\times۱۰^{۴}\ \frac{\text{N}}{\text{C}}$$

(ب)
$$\Delta V=\int_۱^۲ Edr=E\Delta r=(۲/۴۴\times۱۰^{۴})(۰/۱۲)$$
$$=۲/۹۳\times۱۰^{۳}\ \text{V}$$

●●۷- یک ورقهٔ نارسانای نامتناهی دارای چگالی بار سطحی $\sigma=+۵/۸۰\ \text{pC/m}^{۲}$ است. (الف) اگر ذره‌ای به بار $q=+۱/۶۰\times۱۰^{-۱۹}$C از روی ورقه به نقطهٔ P به فاصلهٔ $d=۳/۵۶$cm از ورقه حرکت کند، میدان الکتریکی ناشی از ورقه چقدر کار انجام داده است؟ (ب) اگر پتانسیل الکتریکی V روی ورقه صفر گرفته شود، مقدار V در نقطهٔ P چقدر است؟

حل: (الف)

$$E=\frac{\sigma}{۲\varepsilon_۰}=\frac{۵/۸\times۱۰^{-۱۲}}{(۲)(۸/۸۵\times۱۰^{-۱۲})}=۰/۳۳\ \frac{\text{N}}{\text{C}}$$

$$\Delta V=E\Delta r=(۰/۳۳)(۳/۵۶\times۱۰^{-۲})=۱/۱۷\times۱۰^{-۲}\ \text{V}$$

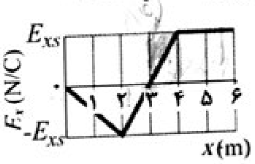
$$W=q\Delta V=(۱/۶\times۱۰^{-۱۹})(۱/۱۷\times۱۰^{-۲})=۱/۸۷\times۱۰^{-۲۱}\ \text{J}$$

از نتیجه قسمت الف استفاده می‌کنیم.

(ب)

$V_P - ۰ = ۱/۱۷ \times ۱۰^{-۲}\ V$

●●۸- نمودار مؤلفهٔ x میدان الکتریکی برحسب تابعی از x در ناحیه‌ای از فضا، در شکل ۲۰-۳۰ نشان داده شده است. مقیاس محور قائم با $E_{xs} = ۲۰/۰\ N/C$ مشخص شده است در این ناحیه، مؤلفه‌های y و z میدان الکتریکی برابر صفرند. اگر پتانسیل الکتریکی در مبدأ ۱۰ V باشد، (الف) پتانسیل الکتریکی در $x = ۲/۰\ m$ چقدر است؟ (ب) بزرگترین مقدار مثبت پتانسیل الکتریکی برای نقطه‌هایی روی محور x در گسترهٔ $۰ \le x \le ۶/۰\ m$ چقدر است؟ و (پ) به ازای چه مقداری از x، پتانسیل الکتریکی برابر با صفر است؟



شکل ۲۰-۳۰ مسئلهٔ ۶

حل: با استفاده از فرمول مساحت مثلث داریم:

(الف)

$$V - ۱۰ = -\int_{۰}^{x=۲} \vec{E}\cdot\vec{ds}$$

$$= \left(\frac{۱}{۲}\right)(۲)(۲۰) = ۲۰ \Rightarrow \quad V = ۳۰\ V$$

(ب) $-\int_{۰}^{x=۲} \vec{E}\cdot\vec{ds}$ برای هر ناحیه داخل $۰ < x < ۳\ m$ مثبت و برای هر ناحیه‌ای در $x > ۳\ m$ منفی است. پس $V = V_{max}$ در $x = ۳\ m$ رخ می‌دهد. بنابراین داریم:

$$V - ۱۰ = -\int_{۰}^{x=۳} \vec{E}\cdot\vec{ds} = \left(\frac{۱}{۲}\right)(۳)(۲۰) = ۳۰ \Rightarrow$$

$$V_{max} = ۴۰\ V$$

(پ) از قسمت ب دریافتیم که در $x = ۳\ m$، $V = V_{max} = ۴۰\ V$ می‌شود. آن را به عنوان مبدا پتانسیل اختیار می‌کنیم و به دنبال x ای می‌گردیم که به ازای آن $V = ۰$ می‌شود.

$$۰ - ۴۰ = -\int_{x=۳}^{x} \vec{E} - \vec{ds} = -\left[\left(\frac{۱}{۲}\right)(۱)(۲۰) + (x-۴)(۲۰)\right] \Rightarrow$$

$$x = ۵/۵\ m$$

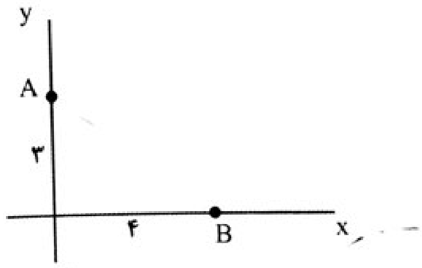
عبارت داخل کروشه، به ترتیب مساحت زیر مثلث و مساحت زیر مستطیلی است که طول آن، x، موردنظر است.

●●۹- میدان الکتریکی در ناحیه‌ای از فضا دارای مؤلفه‌های $E_y = E_z = ۰$ و $E_x = (۴/۰۰\ N/C)x$ است. نقطهٔ A روی محور y در $y = ۳/۰۰\ m$، و نقطهٔ B روی محور x در $x = ۴/۰۰\ m$ واقع‌اند. اختلاف پتانسیل $V_B - V_A$ چقدر است؟

حل:

$$\Delta V = V_A - V_B = -\int_{x=۰}^{x-۴} E_x d_x$$

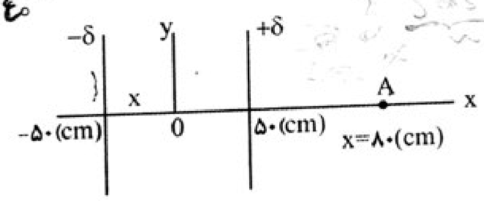
$$= -\int_{۰}^{۴} ۴x\,dx = -۳۲\ V \Rightarrow V_B - V_A = ۳۲V$$



●●●۱۰- دو صفحهٔ نارسانای نامتناهی و باردار یکنواخت موازی صفحهٔ yz و در مکانهای $x = -۵۰\ cm$ و $x = +۵۰\ cm$ قرار گرفته‌اند. چگالیهای بار روی صفحه‌ها به ترتیب $-۵۰\ nC/m^۲$ و $+۲۵\ nC/m^۲$ است. بزرگی اختلاف پتانسیل میان مبدأ و نقطه‌ای روی محور x در $x = +۸۰\ cm$ چقدر است؟ (*راهنمایی:* از قانون گاوس استفاده کنید.)

حل: پتانسیل در نقطه‌ای به فاصله x از صفحه نامتناهی برابر است با:

$$V = \frac{\sigma}{۲\epsilon_۰}x$$



$$V_۰ = \frac{\sigma_۱}{۲\epsilon_۰}x + \frac{\sigma_۲}{۲\epsilon_۰}x = \frac{x}{۲\epsilon_۰}(\sigma_۱ + \sigma_۲)$$

$$= \frac{(۰/۵)(۲۵-۵۰)(۱۰^{-۹})}{(۲)(۸/۸۵\times ۱۰^{-۱۲})} = -۷۰۶/۲V$$

$$V_A = \frac{\sigma_۱}{۲\epsilon_۰}x_۱ + \frac{\sigma_۲}{۲\epsilon_۰}x_۲ = \frac{(۲۵\times ۱۰^{-۹})(۰/۳)}{(۲)(۸/۸۵\times ۱۰^{-۱۲})}$$

$$+\frac{(-۵۰\times ۱۰^{-۹})(۱/۳)}{(۲)(۸/۸۵\times ۱۰^{-۱۲})} = ۴۲۳/۷ - ۳۶۷۲/۳$$

$$= -۳۲۴۸/۶V$$

$$V_۰ - V_A = -۷۰۶/۲ + ۳۲۴۸/۶ = ۲۵۴۲/۴V$$

●●●۱۱- روی کرهٔ نارسانایی به شعاع $R = ۲/۳۱\ cm$، بار $q = +۳/۵۰\ fC$ به طور یکنواخت توزیع شده است. پتانسیل الکتریکی را در مرکز کره $V_۰ = ۰$ اختیار کنید. پتانسیل V در فاصلهٔ شعاعی (الف) $r = ۱/۴۵\ cm$ و (ب) $r = R$ چقدر است؟ (*راهنمایی:* بخش ۱۹-۹ را ببینید.)

حل: در مسائل فصل ۱۸ میدان درون کره را به‌دست آوریم:

(الف)

$$r < R \Rightarrow E = \frac{qr}{۴\pi\epsilon_۰ R^۳}$$

$$\Delta V = V_A - V_۰ = -\int_{r=۰}^{r} \vec{E}\cdot\vec{dr} = -\int_{r=۰}^{r} \frac{qr}{۴\pi\epsilon_۰ R^۳}dr \Rightarrow$$

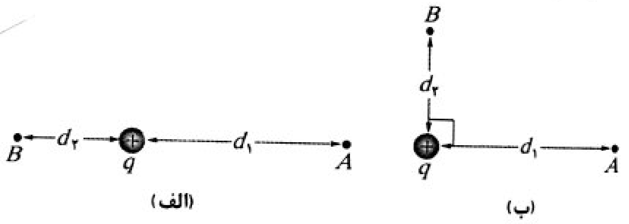
$$V_A - 0 = \frac{qr^2}{2(4\pi\varepsilon_0)R^3} = \frac{-(9\times10^9)(3/5\times10^{15})(1/45\times10^{-2})^2}{(2)(2/31\times10^{-2})^3}$$
$$= -2/69\times10^{-4}\ \text{V}$$

(ب) اگر نقطه B روی سطح کره باشد:

$$r=R \Rightarrow V_B = \frac{-q}{8\pi\varepsilon_0 R} \Rightarrow$$
$$V_B = \frac{-(9\times10^9)(3/5\times10^{-15})}{(2)(2/31\times10^{-2})} = -6/82\times10^{-4}\ \text{V}$$

بخش ۲۰-۷ پتانسیل ناشی از دسته‌ای بار نقطه‌ای

●۱۲- بار نقطه‌ای $q=1/0\ \mu C$، نقطهٔ A به فاصلهٔ $d_1=2/0\text{m}$، و نقطهٔ B به فاصلهٔ $d_2=1/0\text{m}$ از q را در نظر بگیرید. (الف) اگر همان‌طور که در شکل ۲۰-۳۱ الف نشان داده شده است، A و B به طور قطری در برابر یکدیگر قرار گرفته باشند، اختلاف پتانسیل الکتریکی $V_A - V_B$ چقدر است؟ (ب) اگر A و B مطابق شکل ۲۰-۳۱ ب قرار گرفته باشند، این اختلاف پتانسیل الکتریکی چقدر است؟



شکل ۲۰-۳۱ مسئلهٔ ۱۲

حل: (الف) و (ب) چون پتانسیل کمیتی نرده‌ای است فقط مقدار و فاصله بار در آن تاثیر دارد. بنابراین در هر دو حالت، اختلاف پتانسیل یکسان است.

$$\Delta V = V_A - V_B = \frac{kq}{r_A} - \frac{kq}{r_B}$$
$$= \frac{(9\times10^9)(1\times10^{-6})}{2} - \frac{(9\times10^9)(1\times10^{-6})}{1} = 4500\ \text{V}$$

●۱۳- (الف) بار و (ب) چگالی بار روی سطح یک کرهٔ رسانا به شعاع $0/15\ \text{m}$ که پتانسیل آن 200V است ($V=0$ در بینهایت)، چقدر است؟

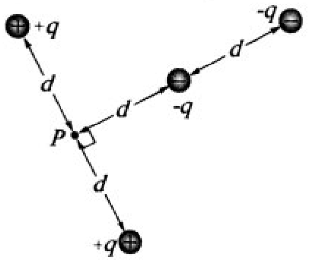
حل: (الف)
$$V=\frac{kq}{R} \Rightarrow 200 = \frac{(9\times10^9)q}{0/15}$$
$$\Rightarrow q = 3/33\times10^{-9}\ \text{C}$$

(ب)
$$\sigma = \frac{q}{4\pi R^2} = \frac{3/33\times10^{-9}}{4\pi(0/15)^2} = 1/18\times10^{-8}\ \text{C/m}^2$$

●۱۴- وقتی یک شاتل فضایی در گاز یونیدهٔ رقیق جو زمین حرکت می‌کند، پتانسیل آن در حین یک دور گردش نوعاً به اندازهٔ $-1/0\text{V}$ تغییر می‌کند. با فرض اینکه شاتل کره‌ای به شعاع 10m باشد، مقدار باری را که روی آن جمع می‌شود، تخمین بزنید.

حل:
$$V=\frac{kq}{R} \Rightarrow -1 = \frac{(9\times10^9)q}{10} \Rightarrow q = -1/11\times10^{-9}\ \text{C}$$

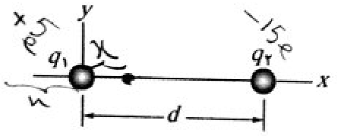
●●●۱۵- در شکل ۲۰-۳۲، پتانسیل الکتریکی خالص ناشی از چهار بار در نقطهٔ P چقدر است، در صورتی که در بینهایت $V=0$ باشد و داشته باشیم $q=5/00\text{fC}$ و $d=4/00\text{cm}$. GO



شکل ۲۰-۳۲ مسئلهٔ ۱۵

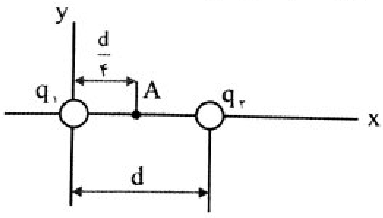
حل:
$$V = V_1 + V_2 + V_3 + V_4$$
$$V = \frac{kq}{d} + \frac{kq}{d} + k\frac{-q}{d} + k\frac{-q}{2d} \Rightarrow$$
$$V = \frac{kq}{2d} = \frac{(9\times10^9)(5\times10^{-15})}{(2)(0/04)} = 5/63\times10^{-4}\ \text{V}$$

●●●۱۶- در شکل ۲۰-۳۳، دو ذره به بارهای q_1 و q_2، به فاصلهٔ d از هم قرار گرفته‌اند. میدان الکتریکی خالص ناشی از این دو ذره در $x=d/4$ برابر صفر است. به ازای $V=0$ در بینهایت، (بر حسب d) نقطه‌ای را روی محور x (غیر از بینهایت) بیابید که در آن پتانسیل الکتریکی ناشی از این دو بار صفر باشد.



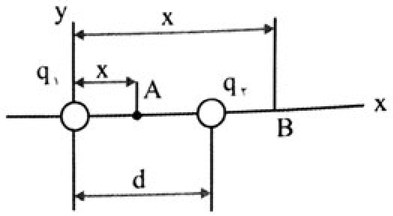
شکل ۲۰-۳۳ مسئله‌های ۱۶، ۱۷ و ۹۱

حل: چون میدان در نقطه A که بین دو بار است صفر شده است، دو بار هم علامت هستند. پس در هیچ نقطه‌ای غیر از بی‌نهایت، پتانسیل صفر نمی‌گردد.



●●●۱۷- در شکل ۲۰-۳۳، ذره‌هایی با بار $q_1=+5e$ و $q_2=-15e$ به فاصلهٔ $d=24/0\text{cm}$ از یکدیگر ثابت شده‌اند. به ازای $V=0$ در بینهایت، مقدارهای متناهی (الف) مثبت و (ب) منفی x که در آن پتانسیل الکتریکی خالص روی محور x صفر است، کدام‌اند؟

حل: (الف) اول فرض می‌کنیم این نقطه بین دو بار است و فاصله آن از q_1 برابر x می‌باشد.



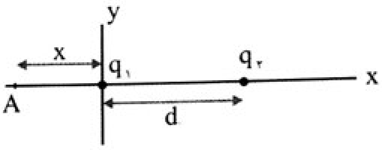
$\frac{kq_1}{x}+\frac{kq_2}{d-x}=0\Rightarrow\frac{5}{x}+\frac{-15}{24-x}=0\Rightarrow x=6$ cm

حال فرض می‌کنیم این نقطه در $x>d$ باشد.

$\frac{kq_1}{x}+\frac{kq_2}{x-d}=0\Rightarrow\frac{5}{x}+\frac{-15}{x-24}=0\Rightarrow x=-12$ cm

که قابل قبول نیست چون $x>d$ است و باید مثبت باشد.

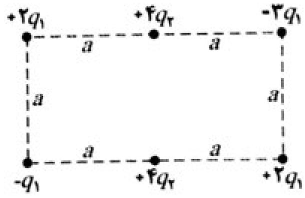
(ب) حال این نقطه را در $x<0$ در نظر می‌گیریم.



$\frac{kq_1}{x}+\frac{kq_2}{x+5}=0\Rightarrow$

$\frac{5}{-x}+\frac{-15}{x+24}=0\Rightarrow x=-12$ cm

●●۱۸- شکل ۲۰-۳۴ آرایه‌ای مستطیلی از ذره‌های بارداری را نشان می‌دهد که در مکانهای خود، به فاصلهٔ $a=39/0$ cm ، ثابت شده‌اند. بارهای نشان داده شده در شکل مضربهای درستی از $q_1=3/40$ pC و $q_2=6/00$ pC هستند. به ازای $V=0$ در بینهایت، پتانسیل الکتریکی خالص در مرکز مستطیل چقدر است؟ (*راهنمایی*: یک بررسی ذهنی می‌تواند از محاسبه‌ها بکاهد.) GO



شکل ۲۰-۳۴ مسئلهٔ ۱۸

حل: مجموع چهار بار واقع در گوشه‌های مستطیل برابر با صفر است و چون این ۴ بار به فاصله یکسانی از مرکز مستطیل قرار دارند، سهم آنها در پتانسیل الکتریکی صفر است. پس فقط سهم دوبار $+4q_2$ را حساب می‌کنیم.

$$V=K\frac{4q_2}{\frac{a}{2}}+K\frac{4q_2}{\frac{a}{2}}=K\frac{16q_2}{a}=\frac{(9\times10^9)(16)(6\times10^{-12})}{0/39}$$
$$=2/21\ V$$

●●۱۹- یک قطرهٔ کروی آب که حامل بار 30 pC است دارای پتانسیل 500 V (به ازای $V=0$ در بینهایت) روی سطح خود است. (الف) شعاع قطره چقدر است؟ (ب) اگر دو قطره با همین بار و شعاع، قطرهٔ کروی واحدی را تشکیل دهند، پتانسیل روی سطح این قطرهٔ جدید چقدر است؟ **ILW SSM**

حل: الف) $V=\frac{kq}{R}\Rightarrow\frac{(9\times10^9)(30\times10^{-12})}{R}=500\Rightarrow$

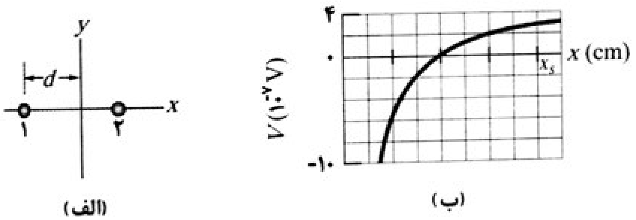
$R=5/4\times10^{-4}$ m

(ب) در این حالت حجم دو قطره با هم جمع می‌شود و شعاع قطره جدید R' برابر است. $q'=2q$

$$\frac{4}{3}\pi R'^3=(2)\left(\frac{4}{3}\pi R^3\right)\Rightarrow R'=(2)^{\frac{1}{3}}R=(1/26)(5/4\times10^{-4})$$
$$=6/8\times10^{-4}\ m$$

$$V'=\frac{kq'}{R'}=\frac{(9\times10^9)(2)(30\times10^{-12})}{6/8\times10^{-4}}=794/1\ V$$

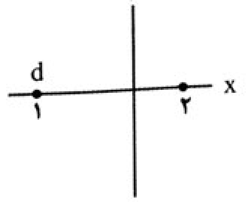
●●۲۰- دو ذرهٔ باردار در شکل ۲۰-۳۵ الف نشان داده شده‌اند. ذرهٔ ۱، با بار q_1 ، در مکان خود به فاصلهٔ d از مبدأ ثابت شده است. ذرهٔ ۲، با بار q_2 ، می‌تواند روی محور x حرکت کند. شکل ۲۰-۳۵ ب، پتانسیل الکتریکی خالص V ناشی از این دو ذرهٔ باردار را در مبدأ، برحسب تابعی از مختصهٔ x ذرهٔ ۲ نشان می‌دهد. مقیاس محور x با $x_s=16/0$ cm مشخص شده است. منحنی دارای مجانب $V=5/76\times10^{-7}$ V در $x\to\infty$ است. q_2 برحسب e چقدر است؟



شکل ۲۰-۳۵ مسئلهٔ ۲۰

حل: هنگامی که q_2 به بی‌نهایت می‌رود $(x\to\infty)$ پتانسیل در مبدا فقط ناشی از بار q_1 است.

$$V_1=\frac{kq_1}{d}=5/76\times10^{-7}\ V$$



در $x=8$ cm پتانسیل دوبار در مبدا صفر است. پس:

$$V_1+V_2=0\Rightarrow5/76\times10^{-7}+\frac{(9\times10^9)q_2}{(0/08)}=0\Rightarrow$$

$q_2=-5/12\times10^{-18}\ C=-32e$

بخش ۲۰-۸ پتانسیل ناشی از دو قطبی الکتریکی

●۲۱- مولکول آمونیاک NH_3 دارای گشتاور دو قطبی الکتریکی دائمی برابر با ۱/۴۷D است، که در آن ۱ یکای دبای = $1D$ = $3/34\times10^{-30}$ C.m است. پتانسیل الکتریکی ناشی از یک مولکول آمونیاک را در نقطه‌ای به فاصلهٔ

۵۲/۰ nm روی محور دوقطبی محاسبه کنید (در بینهایت $V=۰$). ILW

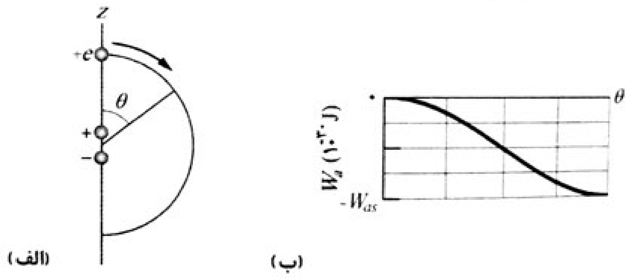
حل: پتانسیل دو قطبی در فاصله r از مرکز آن از رابطه زیر به‌دست می‌آید:

$$V=\frac{kP\cos\theta}{r^{۲}}$$

در نقاط روی محور $\theta=۰$ است.

$$V=\frac{(۹\times۱۰^{۹})(۱/۴۷)(۳/۳۴\times۱۰^{-۳۰})}{(۵۲\times۱۰^{-۹})^{۲}}=۱/۶۳\times۱۰^{-۵}\ V$$

●●۲۲- در شکل ۲۰-۳۶ الف، ذره‌ای با بار $+e$ در ابتدا در مختصهٔ $z=۲۰$ nm روی محور یک دوقطبی الکتریکی و در طرف مثبت آن قرار دارد. (مبداء z در مرکز دوقطبی است.) سپس ذره روی مسیری دایره‌ای به مرکز دوقطبی حرکت می‌کند تا اینکه به مختصهٔ $z=-۲۰$ nm می‌رسد. شکل ۲۰-۳۶ ب، کار W_a انجام شده توسط نیرویی که ذره را حرکت می‌دهد برحسب زاویهٔ θ که مکان ذره را مشخص می‌کند، نشان می‌دهد. مقیاس محور قائم با $W_{as}=۴/۰\times۱۰^{-۳۰}$ J مشخص شده است بزرگی گشتاور دوقطبی چقدر است؟



شکل ۲۰-۳۶ مسئلهٔ ۲۲

حل: (الف)

$$V=\frac{kP\cos\theta}{r^{۲}}$$

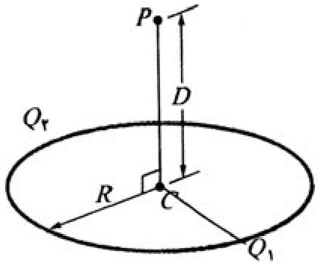
$$\theta=۰\Rightarrow V_{(۰)}=\frac{kP}{r^{۲}}\ ,\ \ \theta=\pi\Rightarrow V_{(\pi)}=\frac{-kP}{r^{۲}}$$

(ب)

$$W_a=e\Delta V=\frac{۲kP}{r^{۲}}e\Rightarrow ۴\times۱۰^{-۳۰}=\frac{(۲)(۹\times۱۰^{۹})(۱/۶\times۱۰^{-۱۹})P}{(۲۰\times۱۰^{-۹})^{۲}}\Rightarrow$$

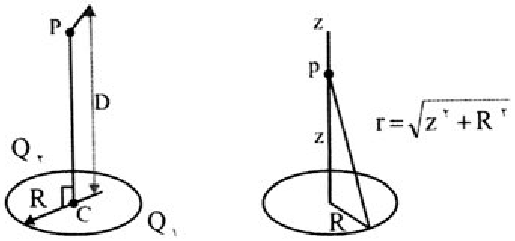
$$P=۵/۵۶\times۱۰^{-۳۷}\ \text{cm}$$

●۲۳- یک میلهٔ پلاستیکی به شکل دایره‌ای به شعاع $R=۸/۲۰$ cm درآمده است. بار $Q_۱=۴/۲۰$ pC روی یک‌چهارم پیرامون آن و بار $Q_۲=-۶Q_۱$ روی بقیهٔ پیرامون آن به طور یکنواخت توزیع شده است (شکل ۲۰-۳۷). به ازای $V=۰$ در بینهایت، پتانسیل الکتریکی در (الف) مرکز C دایره و (ب) نقطهٔ P، که روی محور مرکزی دایره به فاصلهٔ $D=۶/۷۱$ cm از مرکز آن قرار دارد، چقدر است؟ SSM



شکل ۲۰-۳۷ مسئلهٔ ۲۳

حل:



$$dV=\frac{kdq}{r}=\frac{kdq}{\sqrt{z^{۲}+R^{۲}}}\Rightarrow V=\frac{kQ}{\sqrt{z^{۲}+R^{۲}}}$$

در این رابطه اندازه کمان مهم نیست بلکه بار روی آن اهمیت دارد.

$$V=\frac{k(Q_۱+Q_۲)}{\sqrt{z^{۲}+R^{۲}}}$$

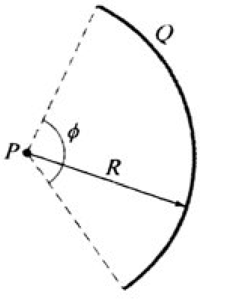
(الف)

$$z=۰\Rightarrow V=\frac{(۹\times۱۰^{۹})(-۶+۱)(۴/۲\times۱۰^{-۱۲})}{(۸/۲\times۱۰^{-۲})}=-۲/۳\ V$$

(ب)

$$z=D\Rightarrow ۶/۷۱\ \text{cm}\Rightarrow V=\frac{(۹\times۱۰^{۹})(-۵)(۴/۲\times۱۰^{-۱۲})}{\sqrt{(۶/۷۱)^{۲}+(۸/۲)^{۲}\times(۱۰^{-۲})}}=-۱/۷۸\ V$$

●۲۴- در شکل ۲۰-۳۸، روی میله‌ای پلاستیکی که به شکل کمانی دایره‌ای به شعاع $R=۳/۷۱$ cm و زاویهٔ مرکزی $\phi=۱۲۰^{\circ}$ درآمده است، بار $Q=-۲۵/۶$ pC به طور یکنواخت توزیع شده است. به ازای $V=۰$ در بینهایت، پتانسیل الکتریکی در نقطهٔ P، مرکز خمیدگی میله، چقدر است؟



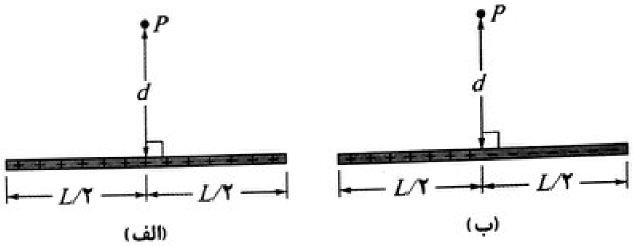
شکل ۲۰-۳۸ مسئلهٔ ۲۴

حل:

$$dV=\frac{kdq}{R}\Rightarrow V=\frac{k}{R}\int dq=\frac{kQ}{R}\Rightarrow$$

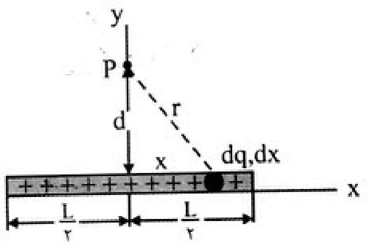
$$V=\frac{(-۲۵/۶\times۱۰^{-۱۲})(۹\times۱۰^{۹})}{(۳/۷۱\times۱۰^{-۲})}=-۶/۲۱\ V$$

●۲۵- (الف) شکل ۲۰-۳۹ الف یک میلهٔ نارسانا به طول $L=۶/۰۰\text{cm}$ و چگالی بار خطی یکنواخت $\lambda=+۳/۶۸\ \text{pC/m}$ را نشان می‌دهد. به ازای $V=۰$ در بینهایت، پتانسیل V در نقطهٔ P به فاصلهٔ $d=۸/۰۰\text{cm}$ روی عمود منصف میله چقدر است؟ (ب) شکل ۲۰-۳۹ ب میلهٔ مشابهی را نشان می‌دهد، با این تفاوت که حالا یک نیمهٔ آن به طور منفی باردار شده است. هر دو نیمه دارای چگالی بار خطی به بزرگی ۳/۶۸ pC/m هستند. به ازای $V=۰$ در بینهایت، مقدار V در نقطهٔ P چقدر است؟



شکل ۲۰-۳۹ مسئلهٔ ۲۵

حل: (الف)



$$dq=\lambda dx$$

$$dV=\frac{kdq}{r}=\frac{k\lambda dx}{\sqrt{x^۲+d^۲}}$$

$$V=۲K\lambda\int_{x=۰}^{x=L/۲}\frac{dx}{\sqrt{x^۲+d^۲}}=۲k\lambda\left[\ln(x+(x^۲+d^۲)^{۱/۲})\right]_۰^{L/۲}\Rightarrow$$

$$V=۲k\lambda\ln\left[\frac{\frac{L}{۲}+\left(\frac{L^۲}{۴}+d^۲\right)^{۱/۲}}{d}\right]\Rightarrow$$

$$V=(۲)(۹\times۱۰^۹)(۳/۶۸\times۱۰^{-۱۲})$$

$$\ln\left[\frac{(۰/۰۳)+\sqrt{۹\times۱۰^{-۴}+۶۴\times۱۰^{-۴}}}{(۰/۰۸)}\right]=۲/۴۳\times۱۰^{-۲}\ \text{V}$$

(ب) دو قسمت کاملاً مشابه هستند ولی علامت آنها مخالف هم است پس حاصل صفر است. $V=۰$

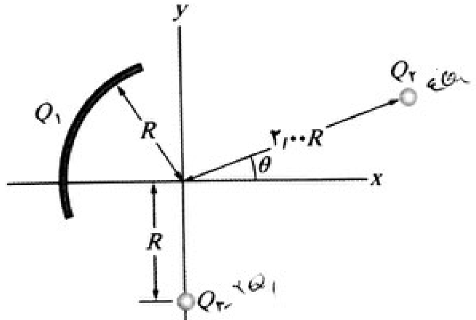
●۲۶- در مرکز یک کرهٔ گاؤسی به شعاع ۴/۰۰cm ، گویی به شعاع ۱/۰۰cm با توزیع بار یکنواخت قرار دارد. شار الکتریکی کل (خالص) عبوری از سطح این کرهٔ گاؤسی برابر با $+۵/۶۰\times۱۰^۴\ \text{N.m}^۲/\text{C}$ است. پتانسیل الکتریکی در فاصلهٔ ۱۲/۰cm از مرکز گوی چقدر است؟

حل:

$$q=\varepsilon_۰\Phi=(۸/۸۵\times۱۰^{-۱۲})(۵/۶\times۱۰^۴)=۴/۹۶\times۱۰^{-۷}\ \text{C}$$

$$V=\frac{kq}{r}=\frac{(۹\times۱۰^۹)(۴/۹۶\times۱۰^{-۷})}{(۰/۱۲)}=۴/۹۶\times۱۰^{-۷}\ \text{C}$$

●●۲۷- در شکل ۲۰-۴۰، پتانسیل الکتریکی خالص ناشی از کمان دایره‌ای با بار $Q_۱=+۷/۲۱\ \text{pC}$ و دو ذره با بارهای $Q_۲=۴/۰۰Q_۱$ و $Q_۳=-۲/۰۰Q_۱$ در مبدأ چقدر است؟ مرکز خمیدگی کمان در مبدأ و شعاع آن $R=۲/۰۰\ \text{m}$ است؛ زاویهٔ نشان داده شده $\theta=۲۰/۰°$ است.



شکل ۲۰-۴۰ مسئلهٔ ۲۷

حل: طبق مسئله ۲۴ پتانسیل کمان از رابطه زیر به دست می‌آید:

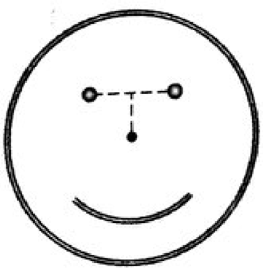
$$V=\frac{kQ_۱}{R}$$

$$V=V_۱+V_۲+V_۳=\frac{kQ_۱}{R}+\frac{k\varepsilon Q_۱}{۲R}+\frac{k(-۲)Q_۱}{R}=\frac{kQ_۱}{R}\Rightarrow$$

$$V=\frac{(۹\times۱۰^۹)(۷/۲۱\times۱۰^{-۱۲})}{۲}=۳/۲۴\times۱۰^{-۲}\ \text{V}$$

●●۲۸- صورت خندان شکل ۲۰-۴۱ از سه بخش تشکیل شده است:

۱. یک میلهٔ باریک با بار $-۳/۰\mu\text{C}$ که دایره‌ای کامل به شعاع ۶/۰cm را تشکیل می‌دهد.



شکل ۲۰-۴۱ مسئلهٔ ۲۸

میلهٔ باریک دوم با بار $۲/۰\mu\text{C}$ که کمانی دایره‌ای به شعاع ۴/۰cm را با زاویهٔ °۹۰ حول مرکز دایرهٔ کامل تشکیل می‌دهد؛

۳. یک دوقطبی الکتریکی با گشتاوری که عمود بر خط شعاعی و دارای بزرگی $۱/۲۸\times۱۰^{-۲۱}\text{C.m}$ است.

پتانسیل الکتریکی خالص در مرکز چقدر است؟ GO

حل:

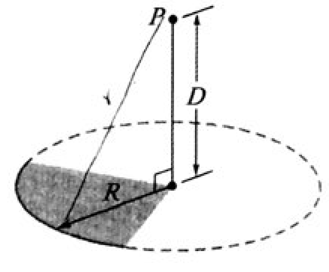
$$V_۱=\frac{kQ_۱}{R_۱}=\frac{(۹\times۱۰^۹)(-۳\times۱۰^{-۶})}{۰/۰۶}=-۴/۵\times۱۰^۵\ \text{V}$$

$$V_1=\frac{kQ_1}{R_1}=\frac{(9\times10^{9})(2\times10^{-6})}{0.04}=-4.5\times10^{5}\ V$$

پتانسیل دو قطبی از رابطه $V=\frac{kP\cos\theta}{2}$ به دست می‌آید که در تمام نقاط روی عمود منصف آن چون $\theta=90°$ است، صفر می‌باشد.

$$V=V_1+V_2+V_3=0$$

۲۹●●- یک طرف قرصی پلاستیکی به شعاع $R=64.0\ cm$ با چگالی بار سطحی یکنواخت $\sigma=7.73\ fC/m^2$ باردار شده و سپس سه ربع آن برداشته می‌شود. ربع قرص به جای مانده در شکل ۲۰-۴۲ نشان داده شده است. به ازای $V=0$ در بینهایت، پتانسیل ناشی از ربع به جای مانده در نقطهٔ P، واقع بر محور مرکزی قرص اصلی و به فاصلهٔ $D=25.9\ cm$ از مرکز آن، چقدر است؟ WWW SSM



شکل ۲۰-۴۲ مسئلهٔ ۲۹

حل: پتانسیل ناشی از یک قرص باردار در نقطه‌ای روی محور آن از رابطه زیر به دست می‌آید:

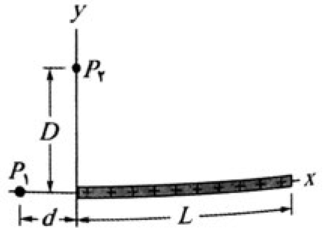
$$V_D=\frac{\sigma}{2\varepsilon_0}\left[\sqrt{z^2+R^2}-z\right]$$

چون پتانسیل کمّیتی نرده‌ای است، اگر قرص را به N قطعه هم شکل تقسیم نماییم پتانسیل هر کدام برابر با $\frac{V_D}{N}$ است.

$$V=\frac{V_D}{4}=\frac{\sigma}{8\varepsilon_0}\left[\sqrt{z^2+R^2}-z\right]\Rightarrow$$

$$V=\frac{(7.73\times10^{-15})}{(8)(8.85\times10^{-12})}\left[\sqrt{(25.9)^2+(64)^2}-25.9\right]\times10^{-2}$$
$$=4.71\times10^{-5}\ V$$

۳۰●●- شکل ۲۰-۴۳ میله‌ای پلاستیکی به طول $L=12.0\ cm$ و بار مثبت یکنواخت $Q=56.1\ fC$ را نشان می‌دهد که روی محور x قرار دارد. به ازای $V=0$ در بینهایت، پتانسیل الکتریکی را در نقطهٔ P_1 روی این محور و به فاصلهٔ $d=2.50\ cm$ از یک سر میله پیدا کنید. GO



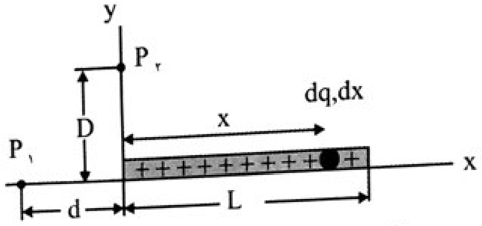
شکل ۲۰-۴۳ مسئله‌های ۳۰، ۳۳، ۳۸ و ۴۰

حل: میله را به قسمت‌های کوچک تقسیم می‌کنیم.

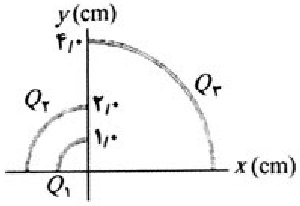
$$dV=\frac{kdq}{x+d}=\frac{k\lambda dx}{x+d}$$

$$V=k\lambda\int_{x=0}^{x=L}\frac{dx}{x+d}=k\lambda\ln\frac{L+d}{d}=\frac{kQ}{L}\ln\frac{L+d}{d}\Rightarrow$$

$$V=\frac{(9\times10^{9})(56.1\times10^{-15})}{0.12}\ln\left[\frac{12+2.5}{2.5}\right]=7.4\times10^{-3}\ V$$



۳۱●●- در شکل ۲۰-۴۴، سه میلهٔ پلاستیکی باریک، ربع دایره‌هایی را تشکیل می‌دهند که مرکز مشترک خمیدگی آنها در مبدأ قرار دارد. بارهای یکنواخت روی میله‌ها عبارت‌اند از $Q_1=+30\ nC$ ، $Q_2=3.0\ nC$ ، و $Q_3=-8.0\ Q_1$. پتانسیل الکتریکی خالص ناشی از میله‌ها در مبدأ چقدر است؟



شکل ۲۰-۴۴ مسئلهٔ ۳۱

حل:

$$V=V_1+V_2+V_3=\frac{kQ_1}{R_1}+\frac{kQ_2}{R_2}+\frac{kQ_3}{R_3}\Rightarrow$$

$$V=\frac{kQ_1}{R_1}+\frac{kQ_1}{2R_1}-\frac{8kQ_1}{4R_1}=\frac{-kQ_1}{2R_1}\Rightarrow$$

$$V=\frac{-(9\times10^{9})(3\times10^{-9})}{2(0.01)}=1350\ V$$

۳۲●●●- توزیع بار خطی نایکنواختی که با $\lambda=bx$ داده می‌شود و در آن b ثابت است، روی محور x از $x=0$ تا $x=0.20\ m$ قرار دارد. اگر $b=20\ nC/m^2$ و در بینهایت $V=0$ باشد، پتانسیل الکتریکی در (الف) مبدأ و (ب) نقطهٔ $y=0.15\ m$ روی محور y چقدر است؟

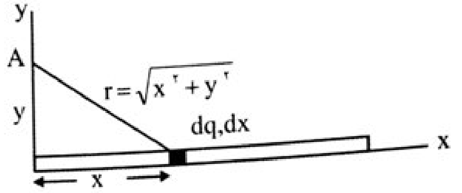
حل:

(الف)

$$dq=\lambda\,dx=bx\,dx$$

$$dV=\frac{kdq}{x}=kbdx$$

$$V=kb\int_{x=0}^{x=L}dx=kbL=(9\times10^{9})(20\times10^{-9})(0.2)=36\ V$$



(ب)

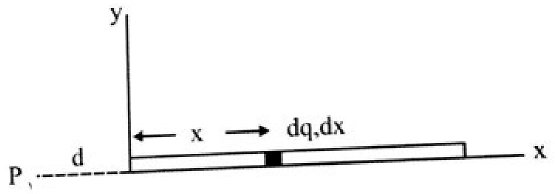
$$dV=\frac{kdq}{r}=\frac{kbx\,dx}{\sqrt{x^۲+y^۲}}\Rightarrow V=kb\int_{x=۰}^{x=L}\frac{x\,dx}{\sqrt{x^۲+y^۲}}\Rightarrow$$

$$V=kb\left[\sqrt{x^۲+y^۲}\right]_۰^L=kb\left[\sqrt{L^۲+y^۲}-y\right]\Rightarrow$$

$$V=(۹\times۱۰^۹)(۲۰\times۱۰^{-۹})\left[\sqrt{(۰/۲)^۲+(۰/۱۵)^۲}-(۰/۱۵)\right]=۱۸\ \text{V}$$

●●●۳۳- میلهٔ پلاستیکی باریک نشان داده شده در شکل ۲۰-۴۳ دارای طول $L=۱۲/۰\ \text{cm}$ و چگالی بار خطی نایکنواخت $\lambda=cx$ است که در آن $c=۲۸/۹\ \text{pC/m}^۲$ است. به ازای $V=۰$ در بینهایت، پتانسیل الکتریکی را در نقطهٔ $P_۱$ روی محور و به فاصلهٔ $d=۳/۰۰\ \text{cm}$ از یک سر آن پیدا کنید.

حل:



$$dV=\frac{kdq}{x+d}=\frac{k\lambda\,dx}{x+d}=\frac{kcx\,dx}{x+d}$$

$$V=kc\int_{x=۰}^{L}\frac{(x+d-d)dx}{x+d}\Rightarrow$$

$$V=kc\left[\int_{x=۰}^{x=L}dx-d\int_{x=۰}^{x=L}\frac{dx}{x+d}\right]=kc\left[L-d\ln\frac{L+d}{d}\right]\Rightarrow$$

$$V=(۹\times۱۰^۹)(۲۸/۹\times۱۰^{-۱۲})\left[(۰/۱۲)-(۰/۰۳)\ln\left(\frac{۰/۱۲+۰/۰۳}{۰/۰۳}\right)\right]=۱/۸۷\times۱۰^{-۲}\ \text{V}$$

بخش ۲۰-۱۰ محاسبهٔ میدان از روی پتانسیل

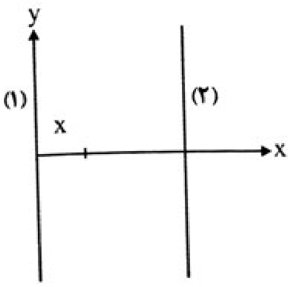
●۳۴- پتانسیل الکتریکی V در فضای میان دو صفحهٔ موازی تخت ۱ و ۲ با $V=۱۵۰۰\,x^۲$ (برحسب ولت) داده شده است، که در آن x (برحسب متر) فاصلهٔ عمودی از صفحهٔ ۱ است. در $x=۱/۳\text{cm}$ ، (الف) بزرگی میدان الکتریکی چقدر است؟ و (ب) آیا این میدان به طرف صفحهٔ ۱ است یا از آن دور می‌شود؟

حل: (الف)

$$E_x=\frac{-\partial V}{\partial x}=-۳۰۰۰x$$

$$E_y=-\frac{\partial V}{\partial y}=۰$$

$$\vec{E}=-۳۰۰۰x\,\hat{i}\Rightarrow E=(۳۰۰۰)(۱/۳\times۱۰^{-۲})=۳۹\ \text{V/m}$$



(ب) جهت میدان در خلاف محور x و به طرف صفحه (۱) می‌باشد.

●۳۵- پتانسیل الکتریکی در نقطه‌های واقع بر صفحهٔ xy با $V=(۲/۰\ \text{V/m}^۲)x^۲-(۳/۰\ \text{V/m}^۲)y^۲$ داده شده است. برحسب نمادگذاری بردار یکه، میدان الکتریکی در نقطهٔ $(۳/۰\text{m},۲/۰\text{m})$ چگونه است؟

حل:

$$V=۲x^۲-۳y^۲$$

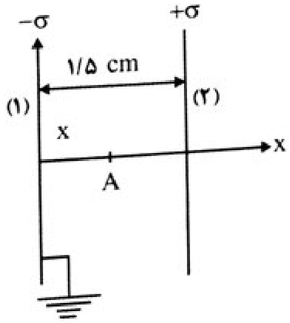
$$E_x=\frac{-\partial V}{\partial x}=-۴x\ ,\quad E_y=-\frac{\partial V}{\partial y}=۶y$$

$$E=-۴x\hat{i}+۶y\hat{j}\ \text{V/m}\Rightarrow\vec{E}=(-۴)(۳)\hat{i}+(۶)(۲)\hat{j}\ \text{V/m}$$

$$=-۱۲\hat{i}+۱۲\hat{j}\ \text{V/m}$$

●۳۶- دو صفحهٔ فلزی موازی بزرگ که به فاصلهٔ ۱/۵ cm از یکدیگر واقع‌اند، دارای بارهایی با بزرگیهای یکسان ولی علامتهای مخالف روی سطحهای مقابل‌اند. پتانسیل صفحهٔ منفی را صفر اختیار کنید. اگر پتانسیل در میانهٔ این صفحه‌ها $+۵/۰\text{V}$ باشد، میدان الکتریکی در ناحیهٔ میان صفحه‌ها چقدر است؟

حل:



میدان میان دو صفحه یکنواخت است و پتانسیل از رابطه زیر به دست می‌آید.

x فاصله از صفحه (۱) است.

$$V=Ex$$

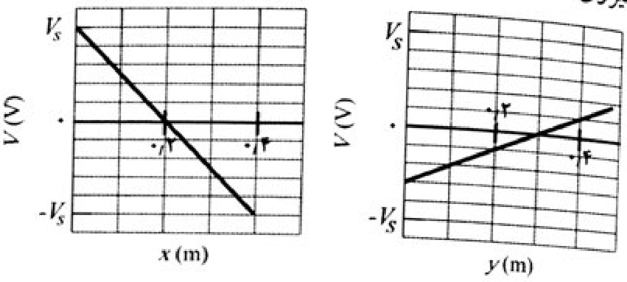
$$x_A=\frac{۱/۵}{۲}=۰/۷۵\ \text{cm}=۷/۵\times۱۰^{-۳}\ \text{m}$$

میدان از صفحه پشت به سمت صفحه منفی است.

$$E=\frac{V}{x}=\frac{۵}{۷/۵\times۱۰^{-۳}}=۶۶۶/۷\ \text{V/m}$$

●●۳۷- الکترونی در صفحهٔ xy قرار دارد که در آنجا پتانسیل الکتریکی همان‌طور که در شکل ۲۰-۴۵ نشان داده شده است به x و y بستگی دارد (پتانسیل به z بستگی ندارد). مقیاس محور

قائم $V_s = ۵۰۰V$ مشخص شده است. برحسب بردار یکه، نیروی الکتریکی وارد بر الکترون چگونه است؟



شکل ۲۰-۴۵ مسئلهٔ ۳۷

حل: E_x منفی شیب نمودار V برحسب x و E_y منفی شیب نمودار V برحسب y می‌باشد.

$$E_x = -\frac{-۵۰۰-۵۰۰}{۰/۴-۰} = ۲۵۰۰\ \text{V/m}$$

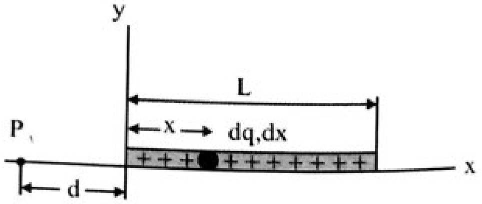
$$E_y = -\frac{۰-(-۳۰۰)}{۰/۳-۰} = -۱۰۰۰\ \text{V/m}$$

$$\vec{E} = ۲۵۰۰\hat{i} - ۱۰۰۰\hat{j}\ \text{V/m}$$

$$\vec{F} = e\vec{E} = (-۱/۶\times۱۰^{-۱۹})(۲۵۰۰\hat{i}-۱۰۰۰\hat{j})$$
$$= (-۴\times۱۰^{-۱۶}\ \hat{i} + ۱/۶\times۱۰^{-۱۶}\ \hat{j})\ \text{N}$$

••۳۸- شکل ۲۰-۴۳ یک میلهٔ پلاستیکی باریک به طول $L = ۱۳/۵\text{cm}$ و بار یکنواخت $۴۳/۶\ \text{fC}$ را نشان می‌دهد. (الف) برحسب فاصلهٔ d، رابطه‌ای برای پتانسیل الکتریکی در نقطهٔ $P_۱$ بیابید. (ب) سپس، متغیر x را به جای d قرار دهید و از آنجا رابطه‌ای را برای بزرگی مؤلفهٔ E_x میدان الکتریکی در $P_۱$ پیدا کنید. (پ) جهت E_x نسبت به جهت مثبت محور x چگونه است؟ (ت) مقدار E_x در $P_۱$ به ازای $x = d = ۶/۲۰\text{cm}$ چقدر است؟ (ث) از روی تقارن شکل ۲۰-۴۳، E_y را در $P_۱$ تعیین کنید.

حل: **(الف)** میله را به قسمت‌های کوچک تقسیم می‌کنیم.



$$dV = \frac{kdq}{d+x} = \frac{k\lambda dx}{d+x}$$

$$V = \int dV = k\lambda\int_{x=۰}^{x=L}\frac{dx}{d+x} = k\lambda\ln\frac{d+L}{d}$$

$$\lambda = \frac{Q}{L} = \frac{۴۳/۶\times۱۰^{-۱۵}}{۰/۱۳۵} = ۳/۲۳\times۱۰^{-۱۳}\ \text{C/m}$$

$$V = (۹\times۱۰^{۹})(۳/۲۳\times۱۰^{-۱۳})\ln\frac{d+۰/۱۳۵}{d}$$
$$= ۲/۹۱\times۱۰^{-۳}\ \ln\frac{d+۰/۱۳۵}{d}$$

(ب)
$$V_x = ۲/۹۱\times۱۰^{-۳}\ \ln\frac{x+۰/۱۳۵}{x} \Rightarrow$$

$$E = -\frac{dV}{dx} = -۲/۹۱\times۱۰^{-۳}\frac{\frac{x-(x+۰/۱۳۵)}{x^{۲}}}{\frac{x+۰/۱۳۵}{x}} = \frac{۳/۹۳\times۱۰^{-۴}}{x(x+۰/۱۳۵)}\ \text{V/m}$$

(پ) چون E_x مثبت است، جهت میدان الکتریکی به طرف قسمت مثبت محور x می‌باشد.

(ت)

$$E_x = \frac{۳/۹۳\times۱۰^{-۴}}{(۰/۰۶۲)(۰/۰۶۲+۰/۱۳۵)} = ۳/۲۲\times۱۰^{-۲}\ \text{V/m}$$

(ث) چون توزیع بار در راستای محور x است و نقطه $P_۱$ نیز روی این محور قرار دارد، E_y صفر است.

••۳۹- اگر پتانسیل الکتریکی با $V = ۲/۰۰xyz^{۲}$ داده شده باشد، که در آن V برحسب ولت و x، y و z برحسب مترند، بزرگی میدان الکتریکی در نقطهٔ $(۳/۰۰\hat{i} - ۲/۰۰\hat{j} + ۴/۰۰\hat{k})\text{m}$ چقدر است؟ **SSM**

حل:

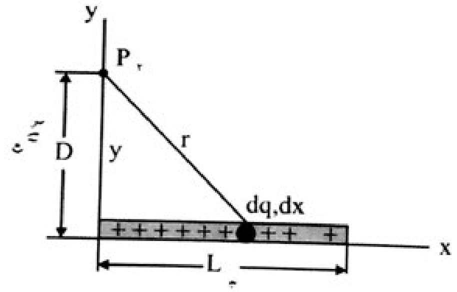
$$V = ۲xyz^{۲} \Rightarrow E_x = -\frac{\partial V}{\partial x} = -۲yz^{۲}\ ,\ E_y = -\frac{\partial V}{\partial y} = -۲xz^{۲}$$
$$,\ E_z = -\frac{\partial V}{\partial z} = -۴xyz$$
$$\vec{E} = -۲yz^{۲}\hat{i} - ۲xz^{۲}\hat{j} - ۴xyz\hat{k}$$

در نقطه (۳،-۲،۴) میدان برابر است با:

$$\vec{E} = (-۲)(-۲)(۴)^{۲}\hat{i} + (-۲)(۳)(۴)^{۲}\hat{j} + (۴)(۳)(-۲)(۴)\hat{k} \Rightarrow$$
$$\vec{E} = (۶۴\hat{i} - ۹۶\hat{j} + ۹۶\hat{k})\ \text{V/m}$$
$$E = \sqrt{(۶۴)^{۲}+(-۹۶)^{۲}+(۹۶)^{۲}} = ۱۵۰/۱\ \text{V/m}$$

•••۴۰- میلهٔ پلاستیکی باریک به طول $L = ۱۰/۰\ \text{cm}$ در شکل ۲۰-۴۳، دارای چگالی بار خطی نایکنواخت $\lambda = cx$ است که در آن $c = ۴۹/۹\ \text{pC/m}$. (الف) به ازای $V = ۰$ در بینهایت، پتانسیل الکتریکی را در نقطهٔ $P_۲$ روی محور y واقع در $y = D = ۳/۵۶\text{cm}$ بیابید. (ب) مؤلفهٔ E_y میدان الکتریکی را در $P_۲$ به دست آورید. (پ) چرا مؤلفهٔ E_x میدان در $P_۲$ را نمی‌توان با استفاده از نتیجهٔ (الف) به دست آورد؟

حل: (الف)



$$\lambda = cx \Rightarrow dq = \lambda dx = cxdx$$

$$dV = \frac{kdq}{r} = \frac{kcxdx}{\sqrt{x^{۲}+y^{۲}}}$$

$$V = kc\int_{x=۰}^{x=L}\frac{xdx}{\sqrt{x^{۲}+y^{۲}}} = kc\left[\sqrt{x^{۲}+y^{۲}}\right]_{۰}^{L} = kc\left(\sqrt{L^{۲}+y^{۲}} - y\right)$$

(ب)

$$E_y = -\frac{\partial V}{\partial y} = -kc\left[\frac{y}{\sqrt{L^2+y^2}}-1\right] \Rightarrow$$

$$E_y = -(9\times10^{9})(49/9\times10^{-12})\left[\frac{3/56}{\sqrt{100+(3/56)^2}}-1\right]$$

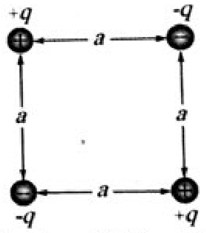
$$= 0/297\ V/m$$

(پ) ما پتانسیل را محور شخصی (محور y) به دست آوریم و چون برروی این محور، $x=0$ است نمی‌توانیم از تغییرات x صحبت کنیم. چون x در پتانسیل ظاهر نمی‌شود و نمی‌توان با مشتق‌گیری E_x را به دست آورد. به همان ترتیب اگر پتانسیل را روی محور x به دست می‌آوریم، مؤلفه E_y را نمی‌توانیم به دست آوریم. برای آنکه $E_x(x,y)$ و یا $E_y(x,y)$ را به دست آوریم باید پتانسیل، $V(x,y)$، را برای نقطه دلخواهی واقع در (x,y) به دست آوریم و آنگاه با استفاده از روابط زیر E_x و E_y را محاسبه کنیم.

$$E_x(x,y) = -\frac{\partial V(x,y)}{\partial x}\ ,\ E_y(x,y) = -\frac{\partial V(x,y)}{\partial y}$$

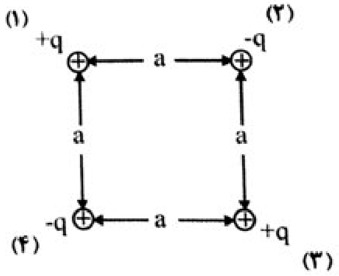
بخش ۲۰-۱۱ انرژی پتانسیل الکتریکی دستگاهی از بارهای نقطه‌ای

●۴۱- برای برقراری آرایش شکل ۲۰-۴۶ چقدر کار لازم است، در صورتی که $q = 2/30$ pC ، $a = 64/0$ cm ، و ذره‌ها در ابتدا در فاصلهٔ نامتناهی قرار داشته و ساکن باشند. **SSM ILW WWW**



شکل ۲۰-۴۶ مسئلهٔ ۴۱

حل:



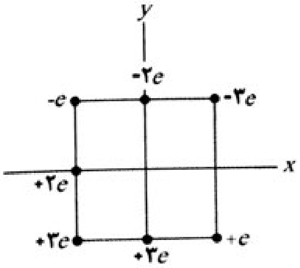
$$W_1 = 0\ ,\ W_2 = \frac{-kq^2}{a}\ ,\ W_3 = \frac{-kq^2}{a} + \frac{kq^2}{\sqrt{2}a}$$

$$W_4 = \frac{-kq^2}{a} - \frac{kq^2}{a} + \frac{kq^2}{\sqrt{2}a}$$

$$W_{total} = \frac{kq^2}{a}\left[0-1-1+\frac{1}{\sqrt{2}}-1-1+\frac{1}{\sqrt{2}}\right] = \frac{2kq^2}{a}\left(\frac{1}{\sqrt{2}}-2\right) \Rightarrow$$

$$W_{toltal} = \frac{(2)(9\times10^{9})(2/3\times10^{-12})^2}{(0/64)}\left(\frac{1}{\sqrt{2}}-2\right) = -1/92\times10^{-13}\ J$$

●۴۲- در شکل ۲۰-۴۷، هفت ذرهٔ باردار برای تشکیل مربعی به ضلع ۴/۰cm در مکانهای خود قرار گرفته‌اند. چقدر کار باید انجام دهیم تا ذره‌ای با بار $+6e$ را که در ابتدا ساکن است از فاصلهٔ نامتناهی به مرکز مربع بیاوریم؟



شکل ۲۰-۴۷ مسئلهٔ ۴۲

حل:

$$V = V_1+V_2+V_3+V_4+V_5+V_6+V_7 \Rightarrow$$

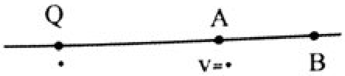
$$V = k\frac{3e}{\frac{a}{2}} = \frac{6ke}{a}$$

$$W = Vq = \left(\frac{6ke}{a}\right)(6e) = \frac{36ke^2}{a} \Rightarrow$$

$$W = \frac{(36)(9\times10^{9})(1/6\times10^{-19})^2}{(0/04)} = 2/07\times10^{-25}\ J$$

●۴۳- ذره‌ای با بار $+7/5\mu C$ از حالت سکون در نقطهٔ $x = 60$ cm روی محور x، رها شده است. این ذره تحت تأثیر بار Q که در مبدأ ثابت شده است، شروع به حرکت می‌کند. انرژی جنبشی ذره در صورتی که (الف) $Q=+20\mu C$ و (ب) $Q=-20\mu C$ باشد، در لحظه‌ای که به اندازهٔ ۴۰cm حرکت کرده چقدر است؟

حل:



(الف) مقدار اولیه r برابر ۰/۶ m و مقدار نهایی آن برابر $(0/6\ m + 0/4\ m) = 1\ m$ است. (مقادیر از آنرو با هم جمع شده‌اند که بارها هم علامتند و یکدیگر را دفع می‌کنند).

پایستگی انرژی را به کار می‌بریم. چون انرژی جنبشی اولیه صفر است داریم:

$$U_i = K_f + U_f$$

$$K_f = U_1 - U_f = kqQ\left(\frac{1}{r_i}-\frac{1}{r_f}\right) \Rightarrow$$

$$K_f = (9\times10^{9})(7/5\times10^{-6})(20\times10^{-6})\left(\frac{1}{0/6}-\frac{1}{1}\right) = 0/9\ J$$

(ب) این بار علامت بارها مخالف است و تعداد نهایی r برابر است با:

$$r_f = 0/6 - 0/4 = 0/2\ m$$

$$K_f = kQq\left(\frac{۱}{r_i}-\frac{۱}{r_f}\right)$$
$$=(۹\times ۱۰^{۹})(۷/۵\times ۱۰^{-۶})(۲۰\times ۱۰^{-۶})\left(\frac{۱}{۰/۶}-\frac{۱}{۱}\right)=۴/۵\ \text{J}$$

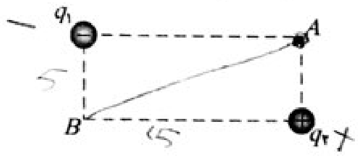
●۴۴- (الف) انرژی پتانسیل الکتریکی دو الکترون به فاصلهٔ ۲/۰۰nm چقدر است؟ (ب) اگر این فاصله افزایش یابد، آیا انرژی پتانسیل افزایش می‌یابد یا کاهش؟

حل: (الف)

$$U = k\frac{e^{۲}}{r} = \frac{(۹\times ۱۰^{۹})(۱/۶\times ۱۰^{-۱۹})^{۲}}{(۲\times ۱۰^{-۹})} = ۱/۱۵۲\times ۱۰^{-۱۹}\ \text{J}$$

(ب) $U>۰$ و $U\alpha\frac{۱}{r}$، پس انرژی پتانسیل U با افزایش r، کاهش می‌یابد.

●●۴۵- در مستطیل شکل ۲۰-۴۸، ضلعها ۵/۰cm و ۱۵ cm، $q_۱=-۵/۰\,\mu C$ و $q_۲=+۲/۰\,\mu C$ است. به ازای $V=۰$ در بینهایت، پتانسیل الکتریکی در (الف) گوشهٔ A و (ب) گوشهٔ B چقدر است؟ (پ) چقدر کار باید انجام گیرد تا بار $q_۳=+۳/۰\,\mu C$ در امتداد قطر مستطیل از B به A حرکت داده شود؟ (ت) آیا این کار، انرژی پتانسیل الکتریکی دستگاه سه بار را افزایش می‌دهد یا کاهش؟ اگر $q_۳$ در امتداد مسیری (ث) داخل مستطیل ولی نه روی قطر و (ج) بیرون مستطیل حرکت داده شود، آیا کار بیشتری لازم است یا کمتر یا مساوی آن؟ GO



شکل ۲۰-۴۸ مسئلهٔ ۴۵

حل: (الف)

$$V_A = V_۱+V_۲ = k\frac{q_۱}{a}+k\frac{q_۲}{b} \Rightarrow$$
$$V_A = \frac{(۹\times ۱۰^{۹})(-۵\times ۱۰^{-۶})}{۰/۱۵}+\frac{(۹\times ۱۰^{۹})(۲\times ۱۰^{-۶})}{۰/۰۵} = ۶\times ۱۰^{۴}\ \text{V}$$

(ب)

$$V_B = k\frac{q_۱}{b}+k\frac{q_۲}{a} = \frac{(۹\times ۱۰^{۹})(-۵\times ۱۰^{-۶})}{۰/۰۵}+\frac{(۹\times ۱۰^{۹})(۲\times ۱۰^{-۶})}{۰/۱۵}$$
$$= -۷/۸\times ۱۰^{۵}\ \text{V}$$

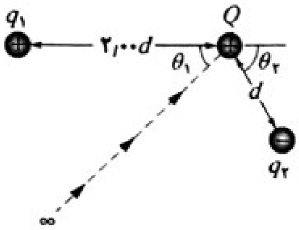
(پ)

$$\Delta V = V_A - V_B = ۶\times ۱۰^{۴} + ۷/۸\times ۱۰^{۵} = ۸/۴\times ۱۰^{۵}\ \text{V}$$
$$W = q_۳\Delta V = (۳\times ۱۰^{-۶})(۸/۴\times ۱۰^{۵}) = ۲/۵۲\text{J}$$

(ت) چون کار مثبت است، برای این انتقال کار نیروی خارجی مثبت است. این انرژی در دستگاه بارها به صورت انرژی پتانسیل ذخیره می‌شود و انرژی پتانسیل الکتریکی دستگاه سه بار افزایش می‌یابد.

(ث) و (ج) چون نیرو پایستار است، کار آن مستقل از مسیر انجام کار می‌باشد. پس درهر دو مورد کار یکسان است.

●●۴۶- در شکل ۲۰-۴۹، چقدر کار باید انجام گیرد تا ذره‌ای با بار $Q=+۱۶e$ که در ابتدا ساکن است، در امتداد خط‌چین از بینهایت به نقطهٔ مشخص شده در نزدیکی دو بار ثابت شدهٔ $q_۱=+۴e$ و $q_۲=-q_۱/۲$ آورده شود؟ فاصله $d=۱/۴۰\text{cm}$، $\theta_۱=۴۳^\circ$ و $\theta_۲=۶۰^\circ$ است.



شکل ۲۰-۴۹ مسئلهٔ ۴۶

حل: کار انجام شده مستقل از مسیر است و بنابراین داریم:

$$W=(V_۱+V_۲)Q = k\left[\frac{q_۱}{۲d}+\frac{q_۲}{d}\right]Q = k\left[\frac{q_۱}{۲d}+\frac{-\left(\frac{q_۱}{۲}\right)}{d}\right]Q = ۰$$

●●۴۷- ذره‌ای با بار q در نقطهٔ P ثابت شده، و ذرهٔ دومی به جرم m و با همان بار q در ابتدا به فاصلهٔ $r_۱$ از P نگهداشته شده است. سپس ذرهٔ دوم رها می‌شود. تندی آن را هنگامی که به فاصلهٔ $r_۲$ از P است، تعیین کنید. $q=۳/۱\,\mu C$، $m=۲۰\text{ mg}$، $r_۱=۰/۹۰\text{ mm}$ و $r_۲=۲/۵\text{ mm}$. ILW

حل:

ابتدا اختلاف انرژی مجموعه را در این دو حالت به دست می‌آوریم.

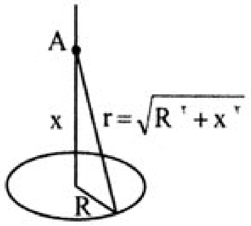
$$\Delta U = k\frac{q^{۲}}{r_۲}-k\frac{q^{۲}}{r_۱} = kq^{۲}\left(\frac{۱}{r_۲}-\frac{۱}{r_۱}\right)\Rightarrow$$
$$\Delta U = (۹\times ۱۰^{۹})(۳/۱\times ۱۰^{-۶})\left(\frac{۱}{۲/۵\times ۱۰^{-۳}}-\frac{۱}{۰/۹\times ۱۰^{-۳}}\right)$$
$$= -۶۱/۵\ \text{J}$$

چون هیچ نیرویی از خارج سیستم دو ذره به آن وارد نمی‌شود، انرژی مکانیکی در طول حرکت ثابت می‌ماند.

$$\Delta K = -\Delta U = ۶۱/۵\ \text{J}$$
$$\Delta K = \frac{۱}{۲}mv^{۲} \Rightarrow ۶۱/۵ = \left(\frac{۱}{۲}\right)(۲۰\times ۱۰^{-۶})v^{۲}$$
$$\Rightarrow v = ۲۴۸۰\ \text{m/s}$$

●●۴۸- بار $-۹/۰\text{nC}$ به دور یک حلقهٔ پلاستیکی باریک واقع در صفحهٔ yz که مرکز آن در مبدأ قرار گرفته، توزیع شده است. بار نقطه‌ای $-۶/۰\text{pC}$ روی محور x در $x=۳/۰\text{m}$ واقع است. برای حلقه‌ای به شعاع ۱/۵m، یک نیروی خارجی چقدر کار باید روی این بار نقطه‌ای انجام دهد تا آن را به مبدأ حرکت دهد؟

حل:



پتانسیل یک حلقه به شعاع R که بار Q به طور یکنواخت روی آن توزیع شده است، در نقطه‌ای روی محور حلقه و به فاصله x از مرکز حلقه برابر است با:

$$dV = \frac{kdq}{r} \Rightarrow V = \frac{kQ}{\sqrt{R^۲ + x^۲}}$$

$$V_A = \frac{(۹\times۱۰^۹)(-۹\times۱۰^{-۹})}{\sqrt{(۳)^۲ + (۱/۵)^۲}} = -۲۴/۱۵\,\text{V}$$

$$x = ۰ \Rightarrow V_۰ = \frac{kQ}{R} = \frac{(۹\times۱۰^۹)(-۹\times۱۰^{-۹})}{۱/۵} = -۵۴\,\text{V}$$

$$\Delta V = V_۰ - V_A = -۵۴ - (-۲۴/۵) = -۲۹/۵\,\text{V}$$

$$W = q\Delta V = (-۶\times۱۰^{-۱۲})(-۲۹/۵) = ۱/۷۷\times۱۰^{-۱۰}\,\text{J}$$

۴۹●●- *تندی فرار* الکترونی که در ابتدا به حال سکون روی سطح کره‌ای با شعاع ۱/۰cm و بار $۱/۶\times۱۰^{-۱۵}$C که به طور یکنواخت توزیع شده قرار دارد، چقدر است؟ به عبارت دیگر، تندی اولیهٔ الکترون باید چقدر باشد تا الکترون به فاصله‌ای نامتناهی از کره برسد و در آنجا انرژی جنبشی آن صفر شود؟

حل:

اگر ذره‌ای با تندی فرار پرتاب شود به بی‌نهایت رفته و در آنجا ساکن می‌ماند. یعنی انرژی کل صفر است:

$$\frac{۱}{۲}mv^۲ + \frac{-keq}{R} = ۰ \Rightarrow$$

$$\left(\frac{۱}{۲}\right)(۹/۱\times۱۰^{-۳۱})v^۲ - \frac{(۹\times۱۰^۹)(۱/۶\times۱۰^{-۱۹})(۱/۶\times۱۰^{-۱۵})}{۰/۰۱} = ۰$$

$$\Rightarrow v = ۲/۲۵\times۱۰^۴\,\text{m/s}$$

۵۰●●- یک پوستهٔ رسانای کروی و باریک به شعاع R روی تکیه‌گاه عایقی قرار دارد و تا پتانسیل ۱۲۵ V- باردار شده است. الکترونی از نقطهٔ P به فاصلهٔ r از مرکز پوسته $(r >> R)$ به طور مستقیم به طرف مرکز پوسته شلیک می‌شود. تندی اولیهٔ $v_۰$ مورد نیاز الکترون باید چقدر باشد تا الکترون پیش از وارونه شدن جهت حرکتش، درست به پوسته برسد؟

حل:

انرژی الکترون در نقاط دور $r>>R$ فقط انرژی جنبشی آن است:

$$E_۱ = U_۱ + K_۱ = K_۱$$

الکترون هنگامی که به پوسته می‌رسد به طور لحظه‌ای می‌ایستد. بنابراین:

$$E_۲ = qV + K_۲ = (-۱/۶\times۱۰^{-۱۹})(-۱۲۵) + ۰ = ۲\times۱۰^{-۱۷}\,\text{J}$$

چون از خارج سیستم هیچ نیرویی بر آن وارد نشده است، انرژی مکانیکی ثابت می‌ماند.

$$E_۱ = E_۲ \Rightarrow \frac{۱}{۲}mv_۰^۲ = ۲\times۱۰^{-۱۷} \Rightarrow \left(\frac{۱}{۲}\right)(۹/۱\times۱۰^{-۳۱})V_۰^۲ = ۲\times۱۰^{-۱۷}$$

$$\Rightarrow v_۰ = ۶/۶۳\times۱۰^۶\,\text{m/s}$$

۵۱●●- دو کرهٔ فلزی کوچک A و B به جرمهای $m_A = ۵/۰۰$g و $m_B = ۱۰/۰$g دارای بار مثبت یکسان $q = ۵/۰۰\mu$C هستند. کره‌ها با تار نارسانا و بدون جرمی به طول $d = ۱/۰۰$m ، که در مقایسه با شعاع کره‌ها بسیار بزرگتر است، به هم وصل شده‌اند. (الف) انرژی پتانسیل الکتریکی این دستگاه چقدر است؟ (ب) فرض کنید تار را قطع کنیم، در این لحظه، شتاب هر یک از کره‌ها چقدر است؟ (پ) پس از زمانی طولانی از قطع تار، تندی هر یک از کره‌ها چقدر است؟

حل: (الف)

$$U = \frac{kq^۲}{d} = \frac{(۹\times۱۰^۹)(۵\times۱۰^{-۶})^۲}{۱} = ۰/۲۲۵\,\text{J}$$

از شعاع کره‌ها چون d بسیار بزرگتر از آنهاست صرفنظر کرده‌ایم.

(ب)

$$F_A = ma_A \Rightarrow \frac{kq^۲}{d^۲} = ma_A \Rightarrow \frac{(۹\times۱۰^۹)(۵\times۱۰^{-۶})^۲}{(۱)^۲} = (۵\times۱۰^{-۳})a_A$$

$$\Rightarrow a_A = ۴۵\,\text{m/s}^۲ \quad , \quad F_B = ma_B \Rightarrow a_B = ۲۲/۵\,\text{m/s}^۲$$

(پ) از آنجایی که هیچ نیروی خارجی بر مجموعه وارد نمی‌شود، انرژی مکانیکی در طول حرکت ثابت می‌ماند. در زمان طولانی پس از پاره شدن تار فاصله دوبار، r بسیار زیاد می‌شود. در این صورت:

$$E = \frac{kq^۲}{r} + K_۱ + K_۲ \Rightarrow ۰/۲۲۵ = \frac{۱}{۲}m_۱v_۱^۲ + \frac{۱}{۲}m_۲v_۲^۲ \Rightarrow$$

$$۰/۲۲۵ = ۰/۰۰۰۲۵V_۱^۲ + ۰/۰۰۵V_۲^۲$$

نیروی دافعه، نیروی داخلی است و پایستگی اندازه حرکت برقرار است:

$$m_۱v_۱ = m_۲v_۲ \Rightarrow$$

$$۰/۰۰۵v_۱ = ۰/۰۱v_۲ \Rightarrow v_۱ = ۲v_۲$$

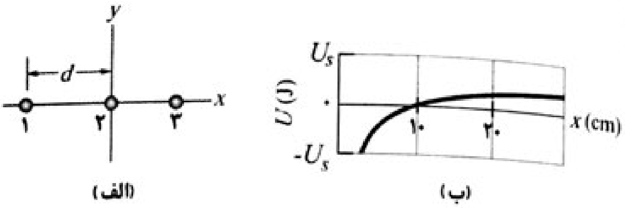
این نتیجه را در رابطه بالا قرار می‌دهیم:

$$۰/۲۲۵ = (۲/۵\times۱۰^{-۳})(۴v_۲^۲) + (۵\times۱۰^{-۳})v_۲^۲ \Rightarrow v_۲ = ۳/۸۷\,\text{m/s}$$

$$v_۱ = ۲v_۲ = ۷/۷۴\,\text{m/s}$$

جهت سرعت آنها خلاف یکدیگر است.

۵۲●●- شکل ۲۰-۵۰ الف، سه ذرهٔ باردار را روی محور x نشان می‌دهد. ذرهٔ ۱ (با بار $+۵/۰\mu$C) و ذرهٔ ۲ (با بار $+۳/۰\mu$C) در مکانهای خود در فاصلهٔ $d = ۴/۰$cm از یکدیگر ثابت شده‌اند. ذرهٔ ۳ می‌تواند روی محور x به سمت راست ذرهٔ ۲ حرکت کند. شکل ۲۰-۵۰ ب انرژی پتانسیل الکتریکی U این دستگاه سه ذره‌ای را برحسب تابعی از مختصهٔ x ذرهٔ ۳ به دست می‌دهد. مقیاس محور قائم با $U_s = ۵/۰$ J مشخص شده است. بار ذرهٔ ۳ چیست؟



شکل ۲۰-۵۰ مسئلهٔ ۵۲

حل:

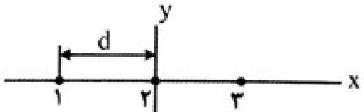
در $x = 10\ cm$ انرژی پتانسیل مجموعه صفر است پس:

$$U = U_{12} + U_{13} + U_{23} = 0$$

$$\Rightarrow \frac{(9\times10^9)(5\times10^{-6})(3\times10^{-6})}{0/04} + \frac{(9\times10^9)(5\times10^{-6})q_3}{0/14} + \frac{(9\times10^9)(3\times10^{-6})q_3}{0/1} = 0$$

$$3/375 + 3/21\times10^5\ q_3 + 2/7\times10^5\ q_3$$

$$\Rightarrow q_3 = -5/71\times10^{-6}\ C$$



●●۵۳- دو الکترون به فاصلهٔ ۲/۰cm از یکدیگر ثابت شده‌اند. الکترون دیگری از بینهایت پرتاب و در وسط آن دو متوقف می‌شود. تندی اولیهٔ آن چقدر است؟

حل: انرژی پتانسیل مجموعه قبل از نزدیک شدن بار q_3:

$$U_i = U_{12} = \frac{ke^2}{2a}$$

$$a = 1\ cm = 0/01\ m$$

انرژی پتانسیل مجموعه بعد از اینکه بار q_3 بین q_2 و q_1 قرار گرفت:

$$U_f = U_{12} + U_{13} + U_{23}$$

$$U_f = \frac{ke^2}{2a} + \frac{ke^2}{a} + \frac{ke^2}{a} = \frac{5ke^2}{2a}$$

چون هیچ نیرویی از خارج مجموعه سه بار به آن وارد نمی‌شود، انرژی مکانیکی ثابت می‌ماند.

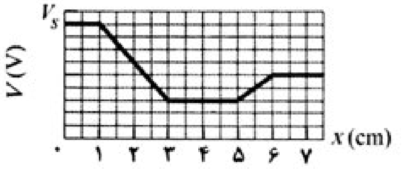
$$K_i + U_i = K_f + U_f$$

$$\frac{1}{2}mv_0^2 + \frac{ke^2}{2a} = 0 + \frac{5ke^2}{2a} \Rightarrow \frac{1}{2}mv_0^2 = \frac{2ke^2}{a} \Rightarrow$$

$$\left(\frac{1}{2}\right)(9/1\times10^{-31})v_0^2 = \frac{(2)(9\times10^9)(1/6\times10^{-19})^2}{0/01}$$

$$\Rightarrow v_0 = 318/2\ m/s$$

●●۵۴- *پروتون در چاه.* شکل ۲۰-۵۱ پتانسیل الکتریکی V در امتداد محور x را نشان می‌دهد. مقیاس محور قائم با $V_s = 10/0\ VA$ مشخص شده است. پروتونی در $x = 3/5\ cm$ با انرژی جنبشی اولیهٔ $4/00\ eV$ رها می‌شود. (الف) اگر پروتون در ابتدا در جهت منفی محور x حرکت کند، آیا به نقطهٔ برگشت می‌رسد، (اگر می‌رسد، مختصهٔ x آن نقطه چیست) یا از ناحیهٔ رسم شده می‌گریزد (اگر می‌گریزد، تندی آن در $x = 0$ چیست)؟ (ب) اگر پروتون در ابتدا در جهت مثبت محور x حرکت کند، آیا به نقطهٔ برگشت می‌رسد، (اگر می‌رسد، مختصهٔ x آن نقطه چیست) یا از ناحیهٔ رسم شده می‌گریزد (اگر می‌گریزد، تندی آن در $x = 6/0\ cm$ چیست)؟ (پ) بزرگی F و (ت) جهت (مثبت یا منفی محور x) نیروی الکتریکی وارد بر پروتون، در صورتی‌که پروتون فقط در سمت چپ $x = 3/0\ cm$ حرکت کند چگونه است؟ (ث) F و (ج) جهت آن در صورتی‌که پروتون فقط در سمت راست $x = 5/0\ cm$ حرکت کند چگونه است؟



شکل ۲۰-۵۱ مسئلهٔ ۵۴

حل: (الف) انرژی کل پروتون در شروع حرکت برابر است با:

$$E_i = K_i + U_i = 4 + 3 = 7\ eV$$

اگر خط افقی $E=V$ را رسم کنیم در $x = 1/5\ cm$ منحنی V را قطع می‌کند. پس اگر پروتون به طرف جهت منفی محور xها حرکت کند، نقطه بازگشت آن $x = 1/5\ cm$ است.

(ب) اگر خط افقی $E=V$ را رسم کنیم، منحنی V را در هیچ نقطه‌ای جز $x = 1/5\ cm$ قطع نمی‌کند و در این حالت اگر پروتون به طرف مثبت محور x حرکت کند نقطه بازگشتی وجود ندارد. در $x = 6\ cm$ داریم $V = 5\ eV$ پس:

$$E = V(eV) = V + K = 5(eV) + K \Rightarrow K = \frac{1}{2}mv^2 = 2(eV)$$

$$\left(\frac{1}{2}\right)(1/67\times10^{-27})v^2 = (2)(1/6\times10^{-19}) \Rightarrow V = 1/96\times10^4\ m/s$$

(ب) در سمت راست $x = 3\ cm$ چون منحنی پتانسیل ثابت است، میدان و در نتیجه نیرو صفر است.

$$E = -\frac{\Delta V}{\Delta x} = -\frac{3-9}{(3-1)(10^{-2})} = 300\ V/m$$

$$F = eE = (1/6\times10^{-19})(300) = 4/8\times10^{-17}\ N$$

(ت) چون میدان و در نتیجه نیرو مثبت است جهت آن به طرف مثبت x می‌باشد.

(ث) $5 < x < 6\ cm$

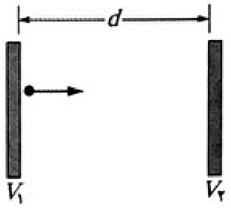
$$E = -\frac{5-3}{(6-5)(10^{-2})} = -200\ V/m \Rightarrow F = eE = (1/6\times10^{-19})(-200)$$

$$\Rightarrow -3/2\times10^{-17}\ N$$

(ج) چون نیرو منفی است جهت آن به طرف منفی محور x می‌باشد.

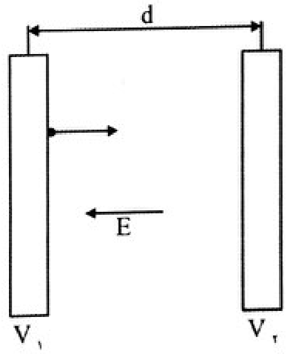
●●۵۵- در شکل ۲۰-۵۲، یک ذرهٔ باردار (الکترون یا پروتون) در حال حرکت به سمت راست، میان دو صفحهٔ باردار موازی به فاصلهٔ $d = 2/00\ mm$ است. پتانسیل صفحه‌ها عبارت‌اند از $V_1 = -70/0\ V$ و $V_2 = -50/0\ V$. تندی ذره از مقدار اولیهٔ

۹۰ km/s روی صفحهٔ سمت چپ، کند می‌شود. (الف) آیا این ذره، الکترون است یا پروتون؟ (ب) تندی آن وقتی درست به صفحهٔ ۲ می‌رسد چقدر است؟



شکل ۲۰- ۵۲ مسئلهٔ ۵۵

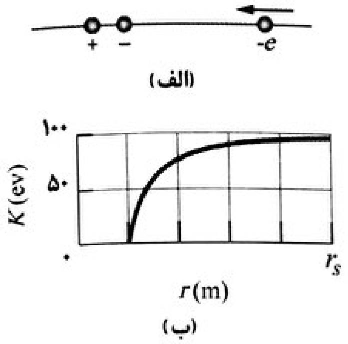
حل: (الف) چون جهت میدان الکتریکی به سمت مقادیر کوچک‌تر پتانسیل است، پس جهت میدان صفحه‌ها به سمت چپ است. چون $\vec{F} = q\vec{E}$ است، نیرو در همان جهت میدان الکتریکی و به سمت چپ است. طبق صورت مسئله، حرکت ذره کندشونده است و بنابراین شتاب آن به سمت چپ است. می‌دانیم که یک ذره با بار مثبت است که در جهت میدان شتاب می‌گیرد پس این ذره، پروتون است.



(ب) چون هیچ نیرویی به ذره وارد نمی‌شود، انرژی مکانیکی ثابت می‌ماند.

$$U_1 + K_1 = U_2 + K_2 \Rightarrow$$
$$-V\cdot e + \left(\frac{۱}{۲}\right)(۱/۶۷\times۱۰^{-۲۷})(۹\times۱۰^{۴})^{۲} = -۵۰e + \left(\frac{۱}{۲}\right)(۱/۶۷\times۱۰^{-۲۷})v^{۲}$$
$$\Rightarrow (-۲۰)(۱/۶\times۱۰^{-۱۹}) + ۶/۷۶\times۱۰^{-۱۸} = ۰/۸۴\times۱۰^{-۲۷}\,V^{۲}$$
$$\Rightarrow U = ۶/۵۳\times۱۰^{۴}\ \text{m/s}$$

●●۵۶- شکل ۲۰-۵۳ الف، الکترونی را نشان می‌دهد که در حال حرکت روی محور یک دوقطبی الکتریکی به سوی طرف منفی این دوقطبی است. دوقطبی در مکان خود ثابت شده است. الکترون در ابتدا در فاصلهٔ بسیار دوری از دوقطبی، با انرژی جنبشی ۱۰۰eV بوده است. شکل ۲۰-۵۳ ب، انرژی جنبشی K الکترون را برحسب فاصلهٔ r آن از مرکز دوقطبی نشان می‌دهد. مقیاس محور افقی با $r_s = ۰/۱۰\text{m}$ مشخص شده است. بزرگی گشتاور دو قطبی چقدر است؟



شکل ۲۰-۵۳ مسئلهٔ ۵۶

حل: به ازای $\theta = ۱۸۰°$ خواهیم داشت:

$$U = qV = -e\left(\frac{P\cos\theta}{۴\pi\varepsilon_0 r^{۲}}\right) = \frac{eP}{۴\pi\varepsilon_0 r^{۲}}$$

V را با استفاده از پایستگی انرژی به دست می‌آوریم. در فاصله بسیار دور $U_i = ۰$ و $K_i = ۱۰۰(eV)$ انرژی جنبشی الکترون صفر می‌شود $(K_f = ۰)$ بنابراین انرژی پتانسیل در این نقطه برابر (eV)۱۰۰ می‌شود.

$$p = \frac{۴\pi\varepsilon_0 r^{۲}V}{e} = \frac{(۰/۰۲)^{۲}(۱۰۰)(e)}{(۹\times۱۰^{۹})(e)} = ۴/۴۵\times۱۰^{-۱۲}\ \text{cm}$$

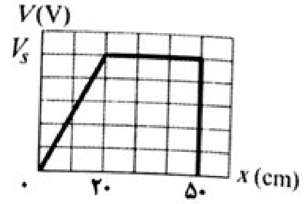
●●۵۷- الکترونی با تندی اولیهٔ $۳/۲\times۱۰^{۵}$ m/s به طور مستقیم به طرف پروتونی که در مکان خود ثابت شده است، پرتاب می‌شود. اگر الکترون در ابتدا در فاصلهٔ بسیار دوری از پروتون باشد، در چه فاصله‌ای از پروتون، تندی الکترون به طور لحظه‌ای دو برابر مقدار اولیه می‌شود؟

حل:

چون از خارج مجموعه نیرویی بر آن وارد نمی‌گردد انرژی مکانیکی ثابت می‌ماند.

$$U_i + K_i = U_f + K_f$$
$$۰ + \frac{۱}{۲}mv_0^{۲} = -\frac{e^{۲}}{۴\pi\varepsilon_0 r} + \frac{۱}{۲}m\,(۲v_0)^{۲} \Rightarrow \frac{e^{۲}}{۴\pi\varepsilon_0 r} = \frac{۳}{۲}mv_0^{۲}$$
$$\frac{(۹\times۱۰^{۹})(۱/۶\times۱۰^{-۱۹})^{۲}}{r} = \left(\frac{۳}{۲}\right)(۹/۱\times۱۰^{-۳۱})(۳/۲\times۱۰^{۵})^{۲}$$
$$\Rightarrow r = ۱/۶۵\times۱۰^{-۹}\ \text{m}$$

●●۵۸- پوزیترونی (با بار $+e$ و جرمی برابر با جرم الکترون) با تندی $۱/۰\times۱۰^{۷}$ m/s در جهت مثبت محور x در حرکت است و وقتی به $x = ۰$ می‌رسد با یک میدان الکتریکی که در امتداد محور x است مواجه می‌شود. پتانسیل الکتریکی V وابسته به این میدان در شکل ۲۰-۵۴ نشان داده شده است. مقیاس محور قائم با $V_s = ۵۰۰/۰V$ مشخص شده است.(الف) آیا پوزیترون در $x = ۰$ از میدان خارج می‌شود (یعنی جهت حرکتش عوض می‌شود) یا در $x = ۰/۵۰$ m (یعنی جهت حرکتش عوض نمی‌شود)؟ (ب) تندی آن هنگام خروج از میدان چقدر است؟



شکل ۲۰-۵۴ مسئلهٔ ۵۸

حل: با استفاده از $U = qV$ می‌توانیم منحنی پتانسیل را به منحنی انرژی پتانسیل (در یکاهای ev) تبدیل کنیم. انرژی کل پوزیترون در $x=\circ$ که برابر انرژی جنبشی آن است به صورت زیر به دست می‌آید.

(الف)

$$K_i = \frac{۱}{۲}mv_i^۲ = \left(\frac{۱}{۲}\right)(۹/۱\times۱۰^{-۳۱})(۱\times۱۰^{۷}) = ۴/۵۵\times۱۰^{-۱۷}\,\text{J}$$

$$K_i = (۴/۵۵\times۱۰^{-۱۷})\left(\frac{۱}{۱/۶\times۱۰^{-۱۹}}\right) = ۲۸۴/۶۹(eV) = E_i$$

با تبدیل منحنی، ارتفاع سد انرژی پتانسیل $۵۰۰(eV)$ به دست می‌آید. بنابراین E_i از این انرژی کمتر است و پوزیترون در $x=\circ$ جهت حرکتش عوض می‌شود.

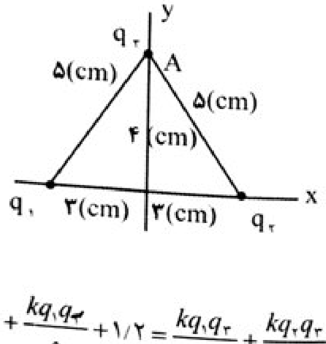
(ب) پوزیترون در جهت $x-$ و با همان تندی اولیه حرکت می‌کن بنابراین تندی آن ۱×۱۰^{۷} m/s است.

●●۵۹- بارهای مشابه $۵۰\mu C$ روی محور x در $x=\pm۳/۰$m ثابت شده‌اند. سپس ذره‌ای با بار $q=-۱۵\,\mu C$ از حالت سکون در نقطه‌ای واقع بر بخش مثبت محور y رها می‌شود. به دلیل تقارن وضعیت، این ذره روی محور y حرکت می‌کند و به هنگام عبور از نقطهٔ $x=\circ$، $y=۴/۰$m دارای $۱/۲$J انرژی جنبشی است. (الف) انرژی جنبشی ذره به هنگام عبور از مبدأ چقدر است؟ (ب) در چه مقدار منفی از y، ذره به طور لحظه‌ای متوقف خواهد شد؟ SSM

حل: چون از خارج مجموعه هیچ نیرویی بر آن وارد نمی‌شود انرژی آن ثابت می‌ماند. پس:

$E_\circ$ انرژی در مبدأ است.

$$E_A = E_\circ$$



(الف)

$$\frac{kq_۱q_۳}{۵}+\frac{kq_۲q_۳}{۵}+\frac{kq_۱q_۲}{۶}+۱/۲=\frac{kq_۱q_۳}{۳}+\frac{kq_۲q_۳}{۳}+\frac{kq_۱q_۲}{۶}+K_\circ$$

$$\frac{(۲)(۹\times۱۰^{۹})(۵۰\times۱۰^{-۶})(۱۵\times۱۰^{-۶})}{۳}+K_\circ$$

$$\Rightarrow -۲/۷+۱/۲=\frac{(۲)(۹\times۱۰^{۹})(۵۰\times۱۰^{-۶})(-۱۵\times۱۰^{-۶})}{۳}+K_\circ$$

$$\Rightarrow -۲/۷+۱/۲=-۴/۵+K_\circ \Rightarrow K_\circ = ۳\,\text{J}$$

فرض می‌کنیم ذره در نقطه B متوقف شود. پس:

$$E_A = E_B$$

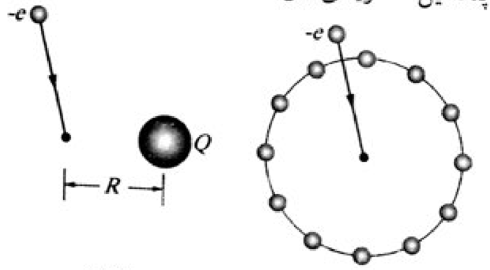
$$-۲/۷+۱/۲=\frac{kq_۱q_۳}{r}+\frac{kq_۲q_۳}{r}=\frac{۲kq_۱q_۳}{r}$$

$$-۱/۵=\frac{(۲)(۹\times۱۰^{۹})(۵۰\times۱۰^{-۶})(-۱۵\times۱۰^{-۶})}{r}\Rightarrow r=۹\text{m}$$

$$y^۲+۹=r^۲=۸۱\Rightarrow y=\pm۸/۴۹\text{ m}$$

که جواب منفی موردنظر است.

●●۶۰- در شکل ۲۰-۵۵ الف، الکترونی را از یک فاصلهٔ نامتناهی تا نقطه‌ای به فاصلهٔ $R=۸/۰۰$cm از یک گوی باردار کوچک، حرکت می‌دهیم. برای این حرکت باید $W=۲/۱۶\times۱۰^{-۱۳}$J کار انجام دهیم. (الف) بار Q روی گوی چقدر است؟ در شکل ۲۰-۵۵ ب، گوی به تکه‌هایی با مقدار بار مساوی تقسیم شده است و آن تکه‌ها در مکان شماره‌های یک ساعت دایره‌ای به شعاع $R=۸/۰۰$cm پخش شده‌اند. حال الکترونی از یک فاصلهٔ نامتناهی به مرکز دایره آورده می‌شود. (ب) بر اثر اضافه شدن این الکترون به دستگاه ۱۲ ذرهٔ باردار، انرژی پتانسیل الکتریکی این دستگاه چقدر تغییر می‌کند؟



شکل ۲۰-۵۵ مسئلهٔ ۶۰

حل: (الف)

$$W=eV=\frac{kqe}{R}\Rightarrow ۲/۱۶\times۱۰^{-۱۳}=\frac{(۹\times۱۰^{۹})(q)(-۱/۶\times۱۰^{-۱۹})}{۰/۰۸}$$

$$\Rightarrow q=-۱/۲\times۱۰^{-۵}\text{ C}=-۱۲\,\mu\text{C}$$

ابتدا پتانسیل بارها روی گوی را در مرکز آن بدست می‌آوریم.

(ب)

$$q'=\frac{q}{۱۲}=-۱\times۱۰^{-۶}\text{ C}$$

$$V=۱۲\frac{kq'}{R}=\frac{(۱۲)(۹\times۱۰^{۹})(-۱\times۱۰^{-۶})}{۰/۰۸}=-۱/۳۵\times۱۰^{۶}\text{ V}$$

تغییرات انرژی مجموعه برابر کاری است که باید انجام داد تا الکترون در مرکز گوی قرار گیرد.

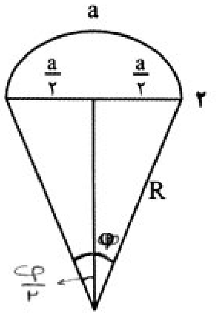
$$\Delta U=W=eV$$

$$\Delta U=(-۱/۶\times۱۰^{-۱۹})(-۱/۳۵\times۱۰^{۶})=۲/۱۶\times۱۰^{-۱۳}\text{ J}$$

●●●۶۱- فرض کنید N الکترون را می‌توان در یکی از دو پیکربندی زیر قرار داد. در پیکربندی ۱، همهٔ آنها به طور یکنواخت روی پیرامون حلقهٔ باریکی به شعاع R توزیع شده‌اند،

به طوری که فاصلهٔ میان الکترونهای مجاور در همه جا یکسان است. در پیکربندی ۲، $N-1$ الکترون به طور یکنواخت روی حلقه و یک الکترون در مرکز حلقه قرار گرفته‌اند. (الف) کمترین مقدار N که به ازای آن انرژی پیکربندی دوم کمتر از پیکربندی اول است، چقدر است؟ (ب) برای آن مقدار N، یکی از الکترونهای واقع بر پیرامون حلقه را در نظر بگیرید و آن را e_0 بنامید. چه تعداد از سایر الکترونهای واقع بر پیرامون حلقه به e_0 نزدیکتر از الکترون مرکزی‌اند؟

حل:



الف) محیط دایره به N قسمت تقسیم می‌گردد.

$$\varphi = \frac{2\pi}{N}$$

هر ضلع چند ضلعی منتظم محاط در دایره برابر است با:

$$\frac{a}{2} = R\sin\frac{\varphi}{2} \Rightarrow a = 2R\sin\frac{\varphi}{2}$$

اگر انرژی پتانسیل مجموعه N ضلعی که در هر گوشه آن یک الکترون قرار دارد را حساب کنیم این مجموعه دارای N جمله $\frac{ke^2}{2R\sin\varphi/2}$ و ... N جمله $\frac{ke^2}{2R\sin(N/2-1)\varphi/2}$ و اگر N زوج باشد دارای جمله $\frac{N}{2}\frac{Ke^2}{2R\sin N/2\varphi/2}$ می‌باشد. برای Nهای فرد جمله آخر $\frac{NKe^2}{2R\sin(N-1/2)\varphi/2}$ است. در حالتی که $N-1$ الکترون روی دایره و یکی در مرکز آن باشد انرژی مجموعه $\frac{(N-1)ke^2}{R}$ اضافه دارد. در آخر، اگر N زوج باشد اختلاف انرژی حالت اول U_1 و حالت دوم U_2 برابر است با:

$$U_1 - U_2 = \left\{\frac{Nke^2}{2R}\left(\sum_{n=1}^{\frac{N}{2}-1}\frac{1}{\sin n\theta/2}+\frac{1}{2}\right)\right\} - \left(\frac{(N-1)ke^2}{2R}\sum_{n=1}^{\frac{N-1}{2}}\frac{1}{\sin n\theta/2}+(N-1)\frac{ke^2}{R}\right)\Rightarrow$$

$$U_1 - U_2 = \frac{ke^2}{2R}\times\left\{\left(\sum_{n=1}^{\frac{N}{2}-2}\frac{1}{\sin n\theta/2}+\frac{N}{2}\right) - \sum_{n=1}^{\frac{N-1}{2}}\frac{N-1}{\sin n\theta/2}-2(N-1)\right\}$$

می‌خواهیم بدانیم به ازای چه مقدار N این عبارت مثبت یعنی $U_1 > U_2$ است. با روش عددگذاری $N > 3$ در این عبارت و بدست آوردن نتیجه آن می‌توان به جواب $N = 12$ رسید.

(ب) در $N = 12$ در حالت دوم ۱۱ الکترون روی دایره و یکی در مرکز آن است. فاصله e_0 از همسایگانش برابر است با:

$$\varphi = \frac{2\pi}{11}\ ,\ a_1 = 2R\sin\frac{\pi}{11} = 0/563R$$

فاصله e_0 از دومین همسایگانش:

$$a_2 = 2R\sin\frac{2\varphi}{2} = 2R\sin\frac{2\pi}{11} = 1/08R$$

پس فقط دو عدد از همسایگان به e_0 نزدیکتر از الکترون مرکزی می‌باشند.

بخش ۲۰-۱۲ پتانسیل رسانای منزوی باردار

●۶۲- پتانسیل یک کرهٔ فلزی توخالی نسبت به زمین (که پتانسیل آن $V = 0$ تعریف شده است) برابر با $+400V$ و بار آن $5/0\times10^{-9}$ C است. پتانسیل الکتریکی را در مرکز کره پیدا کنید.

حل: درون کره فلزی میدان الکتریکی صفر است، پس پتانسیل روی کره و درون آن ثابت است. پس پتانسیل الکتریکی در مرکز کره نیز ۴۰۰ ولت است.

●۶۳- اگر پتانسیل کرهٔ رسانایی به شعاع $r = 0/15$ m برابر 1500 V و در بینهایت $V = 0$ باشد، بار اضافی روی این کره چقدر است؟ **SSM**

حل:

$$V = \frac{kq}{R} \Rightarrow 1500 = \frac{(9\times10^9)(q)}{0/15} \Rightarrow q = 2/5\times10^{-8}\ \text{C}$$

●۶۴- کرهٔ ۱ به شعاع R_1 دارای بار مثبت q است. کرهٔ ۲ به شعاع $2/00R_1$ در فاصلهٔ دوری از کرهٔ ۱ قرار دارد و در ابتدا بدون بار است. پس از آنکه کره‌های جدا از هم با سیم به حد کافی نازکی که فقط بار ناچیزی را نگه می‌دارد به هم متصل شوند (الف) آیا پتانسیل V_1 کرهٔ ۱ بزرگتر از پتانسیل V_2 کرهٔ ۲ می‌شود یا کوچکتر یا مساوی آن؟ سرانجام چه کسری از q روی (ب) کرهٔ ۱ و (پ) کرهٔ ۲ باقی می‌مانند؟ (ت) نسبت σ_1/σ_2 چگالیهای بار سطحی کره‌ها چقدر است؟

حل: (الف) پتانسیل هر دو کره یکسان می‌شود زیرا توسط یک رسانا به وصل شده‌اند.

(ب) و (پ) از شرط برابر شدن پتانسیل‌ها خواهیم داشت:

$$\frac{kq_1}{R_1} = \frac{kq_2}{R_2} \Rightarrow \frac{q_1}{q_2} = \frac{R_1}{R_2} = \frac{R_1}{2R_1} = \frac{1}{2}$$

از قانون پایستگی بار داریم:

$$q = q_1 + q_2 = \frac{q_2}{2} + q_2 = \frac{3q_2}{2} \Rightarrow$$

$$\frac{q_۲}{q}=\frac{۲}{۳}\Rightarrow\frac{q_۱}{q}=\frac{۱}{۳}$$

(ت)

$$\frac{\sigma_۱}{\sigma_۲}=\frac{q_۱/۴\pi R_۱^۲}{q_۲/۴\pi R_۲^۲}=\left(\frac{q_۱}{q_۲}\right)\left(\frac{R_۲}{R_۱}\right)^۲=۲$$

●۶۵- فاصلهٔ مرکز به مرکز دو کرهٔ فلزی، هر یک به شعاع ۳/۰cm ، برابر با ۲/۰m است. کرهٔ ۱ دارای بار $+۱/۰×۱۰^{-۸}C$ و کرهٔ ۲ دارای بار $-۳/۰×۱۰^{-۸}$ C است. فرض کنید این فاصله به حد کافی بزرگ است به گونه‌ای که می‌توانیم فرض کنیم بار روی هر کره به طور یکنواخت توزیع شده است (کره‌ها بر یکدیگر تأثیر نمی‌گذارند.) به ازای $V=۰$ در بینهایت، مطلوب است محاسبهٔ (الف) پتانسیل در نقطهٔ میان مرکزهای دو کره و پتانسیل روی سطح (ب) کرهٔ ۱ و (پ) کرهٔ ۲. WWW SSM

حل: (الف)

$$V_A=\frac{kq_۱}{r_۱}+\frac{kq_۲}{r^۲}\Rightarrow$$

$$V_A=\frac{۹×۱۰^۹}{۱}(۱×۱۰^{-۸}-۳×۱۰^{-۸})=-۱۸۰V$$

(ب)

$$V_B=\frac{kq_۱}{R_۱}+\frac{kq_۲}{۲-R_۱}=\frac{(۹×۱۰^۹)(۱×۱۰^{-۸})}{۰/۰۳}+\frac{(۹×۱۰^۹)(-۳×۱۰^{-۸})}{(۲-۰/۰۳)}$$
$$=۳۰۰۰-۱۳۷=۲/۸۶×۱۰^۳\ V$$

(پ)

$$V_D=\frac{kq_۱}{۲-R_۲}+\frac{kq_۲}{R_۲}=\frac{(۹×۱۰^۹)(۱×۱۰^{-۸})}{(۲-۰/۰۳)}+\frac{(۹×۱۰^۹)(-۳×۱۰^{-۸})}{۰/۰۳}$$
$$=۴۵/۷-۹۰۰۰=-۸/۹۵×۱۰^۳\ V$$

●●۶۶- دو پوستهٔ کروی رسانا، هم مرکز و منزوی دارای شعاعهای $R_۱=۰/۵۰۰$m و $R_۲=۱/۰۰$m ، بارهای یکنواخت $q_۱=+۲/۰۰\ \mu C$ و $q_۲=+۱/۰۰\ \mu C$ ، و ضخامتهای ناچیزند. بزرگی میدان الکتریکی E در فاصلهٔ شعاعی (الف) $r=۴/۰۰$m ، (ب) $r=۰/۷۰۰$ m ، و (پ) $r=۰/۲۰۰$ m چقدر است؟ به ازای $V=۰$ در بینهایت، پتانسیل V در (ت) $r=۴/۰۰$m ، (ث) $r=۱/۰۰$m ، (ج) $r=۰/۷۰۰$m ، (چ) $r=۰/۵۰$ m ، (ح) $r=۰/۲۰۰$ m ، و (خ) $r=۰$ ، چقدر است؟ (د) نمودارهای $E(r)$ و $V(r)$ را رسم کنید.

حل: (الف)

$$r=۴(m)>R_۲\Rightarrow E=\frac{k(q_۱+q_۲)}{r^۲}=\frac{(۹×۱۰^۹)(۳×۱۰^{-۶})}{(۴)^۲}$$
$$=۱/۶۹×۱۰^۳\ V/m$$

(ب)

$$r=۰/۷(m)\Rightarrow R_۱<r<R_۲\Rightarrow E=\frac{kq_۱}{r^۲}=\frac{(۹×۱۰^۹)(۳×۱۰^{-۶})}{(۰/۷)^۲}$$
$$=۳/۶۷×۱۰^۴\ V/m$$

(پ)

$$r=۰/۲(m)<R_۱\Rightarrow E=۰$$

(ت)

$$r=۴(m)>R_۲\Rightarrow E=\frac{k(q_۱+q_۲)}{r}=\frac{(۹×۱۰^۹)(۳×۱۰^{-۶})}{۴}$$
$$=۶/۷۵×۱۰^۴\ V$$

(ث)

$$r=۱(m)>R_۲\Rightarrow E=\frac{k(q_۱+q_۲)}{R_۲}=\frac{(۹×۱۰^۹)(۳×۱۰^{-۶})}{۱}$$
$$=۲/۷×۱۰^۴\ V$$

(ج)

$$r=۰/۷(m)\Rightarrow R_۱<r<R_۲\Rightarrow V=\frac{kq_۱}{r}+\frac{kq}{R_۲}=$$
$$\frac{(۹×۱۰^۹)(۲×۱۰^{-۶})}{۰/۷}+\frac{(۹×۱۰^۹)(۱×۱۰^{-۶})}{۱}=۳/۴۷×۱۰^۴\ V$$

(چ)

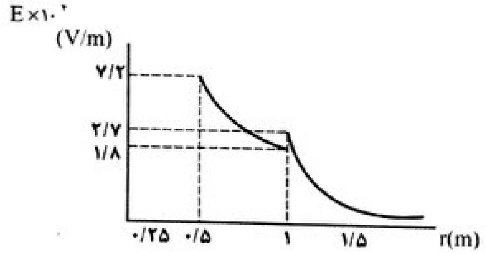
$$r=۰/۵(m)\Rightarrow R_۱\Rightarrow V=\frac{kq_۱}{R_۱}+\frac{kq_۲}{R_۲}=$$
$$\frac{(۹×۱۰^۹)(۲×۱۰^{-۶})}{۰/۵}+\frac{(۹×۱۰^۹)(۱×۱۰^{-۶})}{۱}=۴/۵×۱۰^۴\ V$$

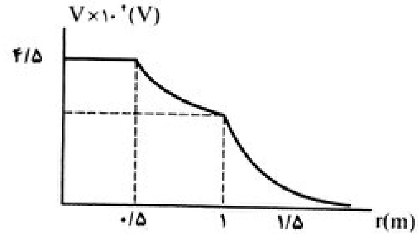
(ح) در نقاط درون کره ۱ پتانسیل برابر نقاط روی سطح آن است.

$$r=۰/۲m\Rightarrow V=۴/۵×۱۰^۴\ V$$

(خ)

$$r=۰\Rightarrow V=۴/۵×۱۰^۴\ V$$





●●۶۷- یک کرهٔ فلزی به شعاع ۱۵ cm دارای بار خالص $۳/۰×۱۰^{-۸}$ C است. (الف) میدان الکتریکی در سطح کره چقدر است؟ (ب) اگر در بینهایت $V=۰$ باشد، پتانسیل الکتریکی در سطح کره چقدر است؟ (پ) در چه فاصله‌ای از سطح کره، پتانسیل الکتریکی به اندازهٔ ۵۰۰V کاهش می‌یابد؟

حل:

(الف)

$$E=\frac{kq}{R^۲}=\frac{(۹×۱۰^۹)(۳×۱۰^{-۸})}{(۰/۱۵)^۲}=۱۲۰۰۰\ V/m$$

(ب)

$$V=\frac{kq}{R}=\frac{(۹×۱۰^۹)(۳×۱۰^{-۸})}{(۰/۱۵)^۲}=۱۸۰۰\ V$$

(ج)

$$V = ۱۸۰۰ - ۵۰۰ = ۱۳۰۰ \text{ V}$$

$$V = \frac{kq}{r} \Rightarrow ۱۳۰۰ = \frac{(۹\times۱۰^{۹})(۳\times۱۰^{-۸})}{r} \Rightarrow r = ۰/۲۰۸ \text{ m}$$

$$d = r - R = ۰/۲۰۸ - ۰/۱۵ = ۰/۰۵۹ \text{ m}$$

مسئله‌های اضافی

۶۸- **معمای خرده‌های شکلات.** این داستان با مسئلهٔ ۵۶ فصل ۱۹ آغاز می‌شود. (الف) با استفاده از پاسخ قسمت (الف) آن مسئله، عبارتی را برای پتانسیل الکتریکی برحسب تابعی از فاصلهٔ شعاعی r از مرکز لوله پیدا کنید. (پتانسیل الکتریکی روی دیوارهٔ لولهٔ متصل به زمین برابر با صفر است.) (ب) برای چگالی بار حجمی نوعی $\rho = -۱/۱\times۱۰^{-۳}\ \text{C/m}^۳$، اختلاف پتانسیل الکتریکی میان مرکز لوله و دیوارهٔ داخلی آن چقدر است؟ (این داستان با مسئلهٔ ۵۰ در فصل ۲۱ ادامه می‌یابد.)

حل: (الف) از مسئله ۵۴ فصل ۲۳ میدان الکتریکی درون استوانه‌ای با توزیع جمعی یکنواخت بار برابر است با:

$$E = -\frac{\rho r}{۲\varepsilon_۰}$$

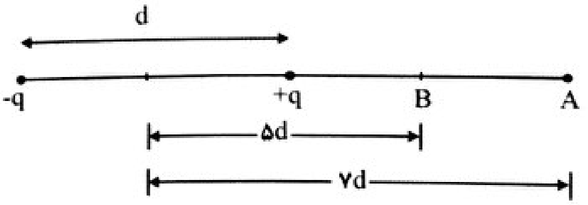
$$V - V_۰ = -\int_{r=۰}^{r} \frac{\rho r}{۲\varepsilon_۰} dr = -\frac{\rho r^۲}{۴\varepsilon_۰}$$

(ب)

$$V - V_۰ = -\frac{(-۱/۱\times۱۰^{-۳})(۰/۰۵)^۲}{(۴)(۸/۸۵\times۱۰^{-۱۲})} = ۷/۷۷\times۱۰^{۴} \text{ V}$$

۶۹- الکترونی از حالت سکون روی محور یک دوقطبی الکتریکی ثابت شده در مکان خود که دارای بار e و فاصلهٔ بارهای $d = ۲۰\text{pm}$ است، رها می‌شود. نقطهٔ رهاشدن در طرف مثبت دوقطبی، و در فاصلهٔ ۷/۰d از مرکز دوقطبی است. تندی الکترون هنگامی که به نقطهٔ ۵/۰d از مرکز دوقطبی می‌رسد، چقدر است؟

حل: چون از خارج مجموعه نیرویی بر آن وارد نمی‌گردد، انرژی مکانیکی ثابت می‌ماند.



پتانسیل دو قطبی در نقطه‌ای روی محور آن برابر است با:

$$V = \frac{kq}{r - \frac{d}{۲}} + \frac{-kq}{r + \frac{d}{۲}} = \frac{kq\left(r + \frac{d}{۲} - r + \frac{d}{۲}\right)}{\left(r - \frac{d}{۲}\right)\left(r + \frac{d}{۲}\right)} = \frac{kqd}{r^۲ - \frac{d^۲}{۴}}$$

$$V_A = \frac{kqd}{۴۹d^۲ - \frac{d^۲}{۴}} = \frac{۴kq}{۱۹۵d} \quad , \quad V_B = \frac{kqd}{۲۵d^۲ - \frac{d^۲}{۴}} = \frac{۴kq}{۹۹d}$$

$$E_A = E_B \Rightarrow U_A + K_A = U_B + K_B$$

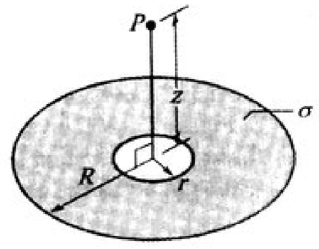
$$\Rightarrow \frac{۴kqe}{۱۹۵d} + ۰ = \frac{۴kqe}{۹۹d} + \frac{۱}{۲}mv^۲$$

$$\Rightarrow \frac{-(۴)(۹\times۱۰^{۹})(۱/۶\times۱۰^{-۱۹})^۲}{(۱۹۵)(۲۰\times۱۰^{-۱۲})} = \frac{-(۴)(۹\times۱۰^{۹})(۱/۶\times۱۰^{-۱۹})^۲}{(۹۹)(۲۰\times۱۰^{-۱۲})} + \frac{۱}{۲}(۹/۱\times۱۰^{-۳۱})v^۲$$

$$\Rightarrow -۲/۶۳\times۱۰^{-۱۹} = -۴/۴۵۵\times۱۰^{-۱۹} + ۴/۵\times۱۰^{-۳۱}\, v^۲$$

$v = ۷/۱۴\times۱۰^{۵}$ m/s

۷۰- شکل ۲۰-۵۶ حلقه‌ای را به شعاع خارجی $R = ۱۳/۰$ cm، شعاع داخلی $r = ۰/۲۰۰\text{R}$ و چگالی بار سطحی یکنواخت $\sigma = ۶/۲۰\ \text{pC/m}^۲$ نشان می‌دهد. به ازای $V = ۰$ در بینهایت، پتانسیل الکتریکی را در نقطهٔ P واقع بر محور مرکزی حلقه، در فاصلهٔ $z = ۲/۰۰\text{R}$ از مرکز حلقه، به دست آورید.



شکل ۲۰-۵۶ مسئلهٔ ۷۰

حل: المان بار را به صورت حلقه‌ای به ضخامت dr و بار dq در نظر می‌گیریم. می‌دانیم پتانسیل الکتریکی در نقطه P روی محور حلقه و به فاصله Z از آن رابطه $V = \frac{kq}{\sqrt{R^۲ + Z^۲}}$ به دست می‌آید. پس:

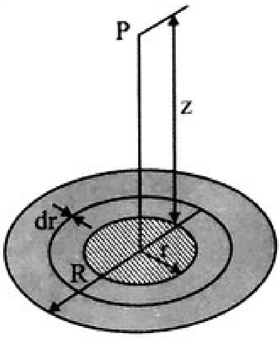
$$dV = \frac{kdq}{\sqrt{r^۲ + z^۲}} = \frac{k\sigma ۲\pi r dr}{\sqrt{r^۲ + z^۲}} = \frac{\sigma}{۲\varepsilon_۰}\frac{rdr}{\sqrt{r^۲ + z^۲}}$$

$$V = \frac{\sigma}{۲\varepsilon_۰}\int_{r=r}^{R}\frac{rdr}{\sqrt{r^۲ + z^۲}} = \frac{\sigma}{۲\varepsilon_۰}\left[\sqrt{r^۲ + z^۲}\right]_r^R \Rightarrow$$

$$V = \frac{\sigma}{۲\varepsilon_۰}\left[\sqrt{R^۲ + z^۲} - \sqrt{r^۲ + z^۲}\right] \Rightarrow$$

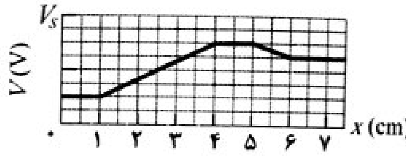
$$V = \frac{(۶/۲\times۱۰^{-۱۲})}{(۲)(۸/۸۵\times۱۰^{-۱۲})}\left[\sqrt{(۰/۱۳)^۲ + (۰/۲۶)^۲} - \sqrt{(۰/۰۲۶)^۲ + (۰/۲۶)^۲}\right]$$

$$= ۱/۰۵\times۱۰^{-۲} \text{ V}$$



۷۱- *الکترون در چاه.* شکل ۲۰-۵۷ پتانسیل الکتریکی V را در امتداد محور x نشان می‌دهد. مقیاس محور قائم با $V_s = ۸/۰V$ مشخص شده است. الکترونی در $x = ۴/۵\text{cm}$ با انرژی جنبشی اولیهٔ ۳/۰۰eV رها می‌شود. (الف) اگر جهت حرکت اولیهٔ

الکترون به طرف منفی محور x باشد، آیا به نقطهٔ برگشت می‌رسد، (اگر می‌رسد، مختصهٔ x آن نقطه چیست) یا از ناحیهٔ رسم شده می‌گریزد (اگر می‌گریزد، تندی آن در $x = ۰$ چقدر است)؟ (ب) اگر الکترون در ابتدا در جهت مثبت محور x حرکت کند، آیا به نقطهٔ برگشت می‌رسد، (اگر می‌رسد، مختصهٔ x آن نقطه چیست) یا از ناحیهٔ رسم شده می‌گریزد (اگر می‌گریزد، تندی آن در $x = ۷/۰\ \text{cm}$ چقدر است)؟ (پ) بزرگی F و (ت) جهت (مثبت یا منفی محور x) میدان الکتریکی وارد بر الکترون در صورتی که الکترون فقط در طرف $x = ۴/۰\text{cm}$ حرکت کند چیست؟ (ث) F و (ج) جهت آن در صورتی که الکترون فقط در سمت راست $x = ۵/۰۰\text{cm}$ حرکت کند چیست؟



شکل ۲۰-۵۷ مسئلهٔ ۷۱

حل: (الف) انرژی کل الکترون برابر است با:

$E = -۶ + ۳ = -۳\ \text{eV}$

اگر خط $E = -۳\ \text{eV}$ را رسم کنیم (یعنی خط $V = ۳$ در منحنی پتانسیل) منحنی را در $x = ۱/۵\ \text{cm}$ قطع می‌کند. پس اگر الکترون در جهت منفی محور x حرکت کند این نقطه، نقطه برگشت است.

(ب) خط $V = ۳$ منحنی را در هیچ نقطه‌ای در جهت مثبت محور x قطع نمی‌کند و نقطه برگشتی وجود ندارد.

$$E_{(۷/۰)} = E_{(v)} \Rightarrow -۳ = -۵ + k \Rightarrow k = ۲(eV) = ۳/۲\times۱۰^{-۱۹}\ \text{J}$$

$$K = \frac{۱}{۲}mv^۲ \Rightarrow ۳/۲\times۱۰^{-۱۹} = \left(\frac{۱}{۲}\right)(۹/۱\times۱۰^{-۳۱})(v^۲) \Rightarrow$$

$$v = ۸/۳۹\times۱۰^{۵}\ \text{m/s}$$

(ب)

$$E = -\frac{\Delta V}{\Delta x} = -\frac{۶-۲}{(۴-۱)\times۱۰^{-۲}} = -۱۳۳/۳\ \text{N/C}$$

$$F = eE = (-۱/۶\times۱۰^{-۱۹})(-۱۳۳/۳) = ۲/۱۲۸\times۱۰^{-۱۷}\ \text{N}$$

(ت) جهت نیرو در جهت مثبت محور x است.

(ث)

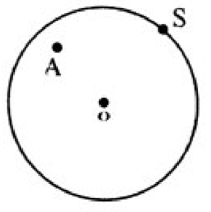
$$E = -\frac{\Delta V}{\Delta x} = -\frac{۵-۶}{(۶-۵)\times۱۰^{-۲}} = ۱۰۰\ \text{N/C}$$

(ج) جهت نیرو در خلاف جهت محور x است.

$$F = eE = (-۱/۶\times۱۰^{-۱۹})(۱۰۰) = -۱/۶\times۱۰^{-۱۷}\ (N)$$

۷۲- کرهٔ رسانای توپری به شعاع $۳/۰\text{cm}$ دارای بار $۳۰\ \text{nC}$ است که به طور یکنواخت روی سطح آن توزیع شده است. A را نقطه‌ای به فاصلهٔ $۱/۰\ \text{cm}$ از مرکز کره، S را نقطه‌ای روی سطح کره، و B را نقطه‌ای به فاصلهٔ $۵/۰\text{cm}$ از مرکز کره در نظر می‌گیریم. اختلاف پتانسیلهای الکتریکی (الف) $V_S - V_B$ و (ب) $V_A - V_B$ چقدر است؟

حل: (الف) میدان الکتریکی درون رسانا صفر است و پتانسیل داخل آن ثابت و برابر پتانسیل روی سطح آن است.



$$V_s = \frac{kq}{R} = \frac{(۹\times۱۰^{۹})(۳۰\times۱۰^{-۹})}{۰/۰۳} = ۹\times۱۰^{۳}\ \text{V} = V_A$$

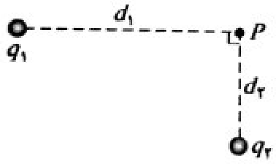
$$V_B = \frac{kq}{r} = \frac{(۹\times۱۰^{۹})(۳۰\times۱۰^{-۹})}{۰/۰۵} = ۵/۴\times۱۰^{۳}\ \text{V}$$

$$V_s - V_B = ۹\times۱۰^{۳} - ۵/۴\times۱۰^{۳} = ۳/۶\times۱۰^{۳}\ \text{V}$$

(ب)

$$V_A - V_B = V_s - V_B = ۳/۶\times۱۰^{۳}\ \text{V}$$

۷۳- در شکل ۲۰-۵۸، نقطهٔ P در فاصلهٔ $d_۱ = ۴/۰۰\text{m}$ از ذرهٔ ۱ $(q_۱ = -۲e)$ و در فاصلهٔ $d_۲ = ۲/۰۰\text{m}$ از ذرهٔ ۲ $(q_۲ = +۲e)$ قرار دارد و هر دو ذره در مکانهای خود ثابت‌اند. (الف) به ازای $V = ۰$ در بینهایت، V در نقطهٔ P چقدر است؟ اگر ذره‌ای به بار $q_۲ = +۲e$ را از بینهایت به نقطهٔ P بیاوریم، (ب) چقدر کار باید انجام دهیم؟ و (پ) انرژی پتانسیل این دستگاه سه ذره‌ای چقدر است؟



شکل ۲۰-۵۸ مسئلهٔ ۷۳

حل: (الف)

$$V = \frac{kq_۱}{d_۱} + \frac{kq_۲}{d_۲} \Rightarrow$$

$$V = \frac{(۹\times۱۰^{۹})(-۲)(۱/۶\times۱۰^{-۱۹})}{۴} + \frac{(۹\times۱۰^{۹})(۲)(۱/۶\times۱۰^{-۱۹})}{۲} \Rightarrow$$

$$V = -۷/۲\times۱۰^{-۱۰} + ۱/۴۴\times۱۰^{-۹} = ۷/۲\times۱۰^{-۱۰}\ \text{V}$$

(ب)

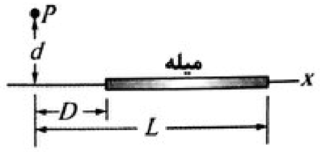
$$w = q_۲V = (۲)(۱/۶\times۱۰^{-۱۹})(۷/۲\times۱۰^{-۱۰}) = ۲/۳۰۴\times۱۰^{-۲۸}\ \text{J}$$

(پ)

$$V = \frac{kq_۱q_۲}{\sqrt{d_۱^۲ + d_۲^۲}} + w = \frac{(۹\times۱۰^{۹})(-۲\times۱/۶\times۱۰^{-۱۹})(۲\times۱/۶\times۱۰^{-۱۹})}{\sqrt{۱۶+۴}} + ۲/۳۰۴\times۱۰^{-۲۸} \Rightarrow$$

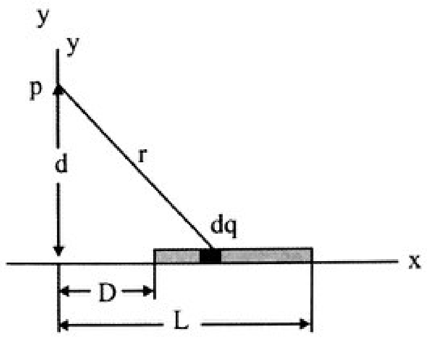
$$V = ۲/۴۳\times۱۰^{-۲۹}\ \text{J}$$

۷۴- شکل ۲۰-۵۹ میلهٔ باریکی با چگالی بار یکنواخت $۲/۰۰\mu\text{C/m}$ را نشان می‌دهد. در صورتی که $d = D = L/۴/۰۰$ باشد، پتانسیل الکتریکی را در نقطهٔ P محاسبه کنید. GO



شکل ۲۰-۵۹ مسئلهٔ ۷۴

حل:



$$dV=\frac{kdq}{r}=\frac{k\lambda dx}{\sqrt{x^{۲}+d^{۲}}}$$

$$V=k\lambda\int_{x=D}^{L}\frac{dx}{\sqrt{x^{۲}+d^{۲}}}=$$

$$k\lambda\left[\ln\left(x+\sqrt{x^{۲}+d^{۲}}\right)\right]_{D}^{L}=k\lambda\times\ln\frac{L+\sqrt{L^{۲}+d^{۲}}}{D+\sqrt{D^{۲}+d^{۲}}}\Rightarrow$$

$$V=(۹\times۱۰^{۹})(۲\times۱۰^{-۶})\ln\left[\frac{۴D+\sqrt{۱۶D^{۲}+D^{۲}}}{D+\sqrt{۲D^{۲}}}\right]$$

$$=(۱۸۰۰)\ln\left[\frac{۸/۱۲}{۲/۴۱}\right]=۲/۱۸۶\times۱۰^{۳}\text{ V}$$

۷۵- سه بار $+۰/۱۲\text{ C}$ تشکیل مثلث متساوی الاضلاعی به ضلع $۱/۷\text{ m}$ را می‌دهند. با استفاده از انرژی وارد شده با آهنگ $۰/۸۳\text{ kW}$، چند روز لازم است تا یکی از بارها به نقطهٔ میانی خط واصل دو بار دیگر آورده شود؟ **SSM**

حل:

$$W=\Delta U\ ,\ U_i=(۳)(۹\times۱۰^{۹})\frac{(۰/۱۲)^{۲}}{۱/۷}=۲/۲۸۷\times۱۰^{۸}\text{ J}$$

$$U_f=(۲)(۹\times۱۰^{۹})\frac{(۰/۱۲)^{۲}}{۰/۸۶}+(۹\times۱۰^{۹})\frac{(۰/۱۲)^{۲}}{۱/۷}=۳/۷۸\times۱۰^{۸}\text{ J}$$

$$W=۳/۸۷\times۱۰^{۸}-۲/۲۸۷\times۱۰^{۸}=۱/۴۹\times۱۰^{۸}\text{ J}$$

$$t=\frac{W}{p}=\frac{۱/۴۹\times۱۰^{۸}}{۰/۸۳\times۱۰^{۳}}=۱/۸\times۱۰^{۵}\text{ s}=۲/۱\ (\text{روز})$$

۷۶- بزرگی E یک میدان الکتریکی، با رابطهٔ $E=A/r^{۴}$ به فاصلهٔ شعاعی r بستگی دارد، که در آن A ثابتی با یکای ولت-متر مکعب است. برحسب مضربی از A، بزرگی اختلاف پتانسیل الکتریکی میان $r=۲/۰۰\text{m}$ و $r=۳/۰۰\text{m}$ چقدر است؟

حل:

$$V_{۲}-V_{۱}=-\int_{r_۱}^{r_۲}\vec{E}.\vec{dr}=-\int_{۲}^{۳}\frac{A}{r^{۴}}dr=A\left(\frac{۱}{۳r^{۳}}\right)_{۲}^{۳}=$$

$$\frac{A}{۳}\left(\frac{۱}{۲۷}-\frac{۱}{۸}\right)=۲/۹۳\times۱۰^{-۲}A\ \ \text{V}$$

۷۷- استوانهٔ رسانای توپر و بلندی دارای شعاع $۲/۰\text{cm}$ است. میدان الکتریکی روی سطح استوانه برابر با ۱۶۰ N/C و جهت آن به طور شعاعی به طرف بیرون است. A، B، و C را نقطه‌هایی در نظر می‌گیریم که به ترتیب در فاصلهٔ $۱/۰\text{cm}$، $۲/۰\text{cm}$ و $۵/۰\text{cm}$ از محور مرکزی استوانه قرار دارند. (الف) بزرگی میدان الکتریکی در C و اختلاف پتانسیلهای الکتریکی (ب) V_B-V_C و (پ) V_A-V_B چقدر است؟

حل: (الف)

$$\oint_S\vec{E}\cdot\hat{n}ds=\frac{q}{\varepsilon_\circ}\Rightarrow E۲\pi r\ell=\frac{\sigma۲\pi R\ell}{\varepsilon_\circ}\Rightarrow E=\frac{\sigma R}{\varepsilon\cdot r}$$

در نقطه B (روی سطح استوانه) $r=R$ است:

$$۱۶۰=\frac{(\sigma)(۰/۰۲)}{(\varepsilon_\circ)(۰/۰۲)}\Rightarrow\sigma=۱/۴۱۶\times۱۰^{-۹}\text{ C/m}^{۲}$$

$$E_C=\frac{\sigma R}{\varepsilon_\circ r}=\frac{(۱/۴۱۶\times۱۰^{-۹})(۰/۰۲)}{(۸/۸۵\times۱۰^{-۱۲})(۰/۰۵)}=۶۴\text{ V/m}$$

(ب)

$$V_C-V_B=-\int_{r_B}^{r_C}\vec{E}\cdot\vec{dr}=-\int_{۰/۰۲}^{۰/۰۵}\frac{\sigma R}{\varepsilon_\circ r}dr=\frac{-\sigma R}{\varepsilon_\circ}\ln r\Big]_{۰/۰۲}^{۰/۰۵}$$

$$=\frac{-(۱/۴۱۶\times۱۰^{-۹})(۰/۰۲)}{(۸/۸۵\times۱۰^{-۱۲})}\ln\frac{۰/۰۵}{۰/۰۲}=-۲/۹۳\text{ V}$$

$$\Rightarrow V_B-V_C=۲/۹۳\text{ V}$$

(پ) چون میدان الکتریکی در تمام نقاط درون استوانه صفر است، پتانسیل درون آن یکنواخت است و برابر پتانسیل در سطح استوانه می‌باشد.

$$V_A-V_B=۰$$

۷۸- (الف) اگر کرهٔ زمین دارای چگالی بار سطحی خالص $۱/۰\text{ electron/m}^{۲}$ باشد (یک فرض بسیار غیر واقعی)، پتانسیل آن چقدر خواهد بود؟ (فرض کنید در بینهایت $V=۰$ است.) (ب) بزرگی و (پ) جهت (به طور شعاعی به طرف درون یا به طرف بیرون) میدان الکتریکی ناشی از کرهٔ زمین درست در بیرون سطح آن چگونه می‌شد؟

حل: (الف)

$$V=\frac{kq}{R}=\frac{k\sigma\varepsilon\pi R^{۲}}{R}=k\sigma\varepsilon\pi R=$$

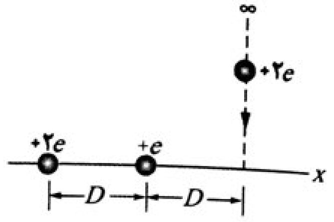
$$۴\pi(۹\times۱۰^{۹})(-۱\times۱/۶\times۱۰^{-۱۹})(۶/۴\times۱۰^{۶})=-۰/۱۱۶\text{V}$$

(ب)

$$E=\frac{kq}{R^{۲}}=\frac{V}{R}=\frac{-۰/۱۱۶}{۶/۴\times۱۰^{۶}}=-۱/۸۱\times۱۰^{-۸}\text{ V/m}$$

(پ) چون بار منفی است جهت میدان الکتریکی به طور شعاعی و رو به داخل است.

۷۹- در شکل ۲۰-۶۰، ذره‌ای به بار $+۲e$ را از بینهایت تا محور x حرکت می‌دهیم. چقدر کار باید انجام دهیم؟ فاصلهٔ D برابر با $۴/۰۰\text{m}$ است.

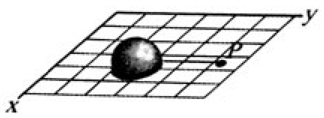


شکل ۲۰-۶۰ مسئلهٔ ۷۹

حل: ابتدا پتانسیل بارهای $q_۱$ و $q_۲$ را در نقطه O به دست می‌آوریم.

$$V=\frac{kq_۱}{۲D}+\frac{kq_۲}{D}=\frac{(۹\times۱۰^۹)(-۱/۶\times۱۰^{-۱۹})}{(۲)(۴)}+\frac{(۹\times۱۰^۹)(-۱/۶\times۱۰^{-۱۹})}{۴}$$
$$=-۷/۲\times۱۰^{-۱۰}\ (V)$$
$$W=q_۳V=(۲)(-۱/۶\times۱۰^{-۱۹})(-۷/۲\times۱۰^{-۱۰})$$
$$=۲/۳۰۴\times۱۰^{-۲۸}\ \text{J}$$

۸۰- شکل ۲۰-۶۱ نیمکره‌ای با بار $۴/۰۰\mu C$ را نشان می‌دهد که این بار به طور یکنواخت در سرتاسر حجم آن توزیع شده است. این نیمکره مثل گریپ فروت نصفه‌ای که ممکن است طرف صاف آن روی میز آشپزخانه باشد، در صفحهٔ xy قرار دارد. نقطهٔ P که روی صفحه واقع شده است در امتداد یک خط شعاعی از مرکز خمیدگی نیمکره، به فاصلهٔ شعاعی ۱۵ cm قرار دارد. انرژی پتانسیل ناشی از نیمکره در نقطهٔ P چقدر است؟



شکل ۲۰-۶۱ مسئلهٔ ۸۰

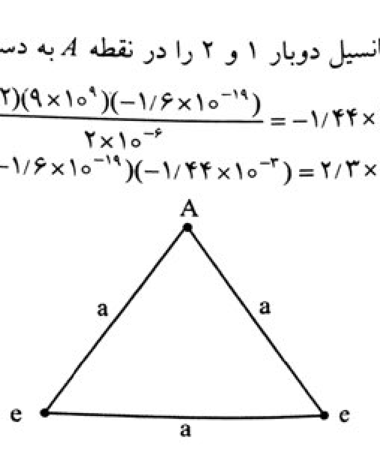
حل: پتانسیل نیمکره نصف پتانسیل کره کامل است (چون پتانسیل یک کمیت نرده‌ای است) که بار $۸\mu c$ دارد.

$$V=\frac{۱}{۲}\frac{kq}{r}=\left(\frac{۱}{۲}\right)\frac{(۹\times۱۰^۹)(۸\times۱۰^{-۶})}{۰/۱۵}=۲/۴\times۱۰^۵\ \text{V}$$

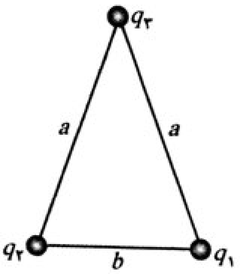
۸۱- در ابتدا دو الکترون به فاصلهٔ $۲/۰۰\mu m$ در مکان‌های خود ثابت شده‌اند. برای آنکه بار سومی را برای تشکیل یک مثلث متساوی الاضلاع از بینهایت بیاوریم، چه مقدار کار باید انجام دهیم؟

حل: ابتدا پتانسیل دوبار ۱ و ۲ را در نقطه A به دست می‌آوریم.

$$V=\frac{۲ke}{a}=\frac{(۲)(۹\times۱۰^۹)(-۱/۶\times۱۰^{-۱۹})}{۲\times۱۰^{-۶}}=-۱/۴۴\times۱۰^{-۳}\ \text{V}$$
$$W=qV=(-۱/۶\times۱۰^{-۱۹})(-۱/۴۴\times۱۰^{-۳})=۲/۳\times۱۰^{-۲۲}\ \text{J}$$



۸۲- سه ذره با بارهای $q_۱=+۱۰\mu C$ ، $q_۲=-۲۰\mu C$ و $q_۳=+۳۰\mu C$ در گوشه‌های مثلث متساوی الساقین نشان داده شده در شکل ۲۰-۶۲ قرار گرفته‌اند. اگر $a=۱۰\text{cm}$ و $b=۶/۰\text{cm}$ باشد، یک عامل خارجی چقدر کار باید انجام دهد تا جای بارهای (الف) $q_۱$ و $q_۳$ ، و (ب) $q_۱$ و $q_۲$ را با هم عوض کند؟



شکل ۲۰-۶۲ مسئلهٔ ۸۲

حل:

$$W_i=\frac{kq_۱q_۲}{b}+\frac{kq_۱q_۳}{a}+\frac{kq_۲q_۳}{a}$$
$$=\frac{(۹\times۱۰^۹)(۱۰\times۱۰^{-۶})(-۲۰\times۱۰^{-۶})}{۰/۰۶}$$
$$+\frac{(۹\times۱۰^۹)(۱۰\times۱۰^{-۶})(-۲۰\times۱۰^{-۶})}{۰/۱}$$
$$+\frac{(۹\times۱۰^۹)(-۲۰\times۱۰^{-۶})(-۳۰\times۱۰^{-۶})}{۰/۱}$$
$$=-۳۰+۲۷-۵۴=-۵۷\ \text{J}$$

(الف)
$$W_f=\frac{kq_۱q_۲}{a}+\frac{kq_۱q_۳}{a}+\frac{kq_۲q_۳}{b}$$
$$=\frac{(۹\times۱۰^۹)(۱۰\times۱۰^{-۶})(-۲۰\times۱۰^{-۶})}{۰/۱}$$
$$+\frac{(۹\times۱۰^۹)(۱۰\times۱۰^{-۶})(۳۰\times۱۰^{-۶})}{۰/۱}$$
$$+\frac{(۹\times۱۰^۹)(-۲۰\times۱۰^{-۶})(۳۰\times۱۰^{-۶})}{۰/۰۶}$$
$$=-۱۸+۲۷-۹۰=-۸۱\ \text{J}$$
$$W=W_f-W_i=-۸۱-(-۵۷)=-۲۴\ \text{J}$$

(ب)
$$W=W_f-W_i=۰$$

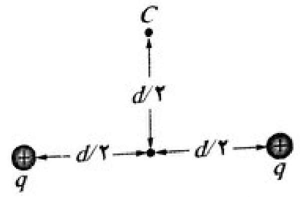
۸۳- (الف) اگر بار خالص یک کرهٔ رسانای منزوی به شعاع ۱۰cm برابر با $۴/۰\mu C$ و در بینهایت $V=۰$ باشد، پتانسیل روی سطح این کره چقدر است؟ (ب) با فرض اینکه هوای اطراف این کره وقتی که بزرگی میدان الکتریکی از ۳/۰ MV/m تجاوز کند دچار فروریزش الکتریکی شود، آیا این وضعیت واقعاً رخ می‌دهد؟

حل: (الف)
$$V=\frac{kq}{r}=\frac{(۹\times۱۰^۹)(۴\times۱۰^{-۶})}{۰/۱}=۳/۶\times۱۰^۵\ \text{V}$$

(ب)
$$E=\frac{kq}{r^۲}=\frac{(۹\times۱۰^۹)(۴\times۱۰^{-۶})}{(۰/۱)^۲}$$
$$=۳/۶\times۱۰^۶\ \text{V/m}>۳\times۱۰^۶\ \text{V/m}$$

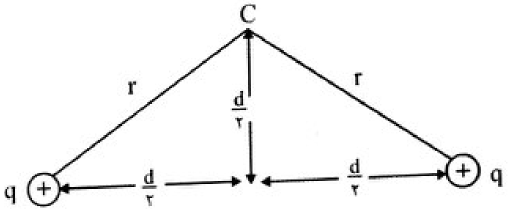
پس این وضعیت رخ نمی‌دهد.

۸۴- دو بار $q=+2.0\,\mu C$ در فاصلهٔ $d=2.0\,\text{cm}$ از یکدیگر ثابت شده‌اند (شکل ۲۰-۶۳). (الف) به ازای $V=0$ در بینهایت، پتانسیل الکتریکی در نقطهٔ C چقدر است؟ (ب) بار سوم $q=+2.0\,\mu C$ را از بینهایت به نقطهٔ C می‌آوریم. برای این منظور، چقدر کار باید انجام دهیم؟ (پ) انرژی پتانسیل U پیکربندی سه بار هنگامی که بار سوم در مکان خود قرار گیرد، چقدر است؟



شکل ۲۰-۶۳ مسئلهٔ ۸۴

حل: (الف)



$$r=\frac{\sqrt{2}d}{2}$$

$$V_C=\frac{2kq}{r}=\frac{(2)(9\times10^{9})(2\times10^{-6})}{\left(\frac{0.02\sqrt{2}}{2}\right)}=2.55\times10^{6}\ \text{V}$$

(ب)

$$W=qV=(2\times10^{-6})(2.55\times10^{6})=5.1\ \text{J}$$

(پ)

$$W=5.1+\frac{(9\times10^{9})(2\times10^{6})}{0.02}=6.9\ \text{J}$$

۸۵- بار یکنواخت $+16.0\,\mu C$ روی حلقهٔ دایره‌ای باریکی، واقع بر صفحهٔ xy و به مرکز مبداء آن صفحه، قرار گرفته است. شعاع حلقه $3.00\,\text{cm}$ است. اگر نقطهٔ A در مبدأ و نقطهٔ B روی محور z در $z=4.00\,\text{cm}$ باشد، V_B-V_A چقدر است؟ SSM

حل: پتانسیل یک حلقه با توزیع بار یکنواخت روی محور آن از رابطه مقابل به دست می‌آید.

$$V=\frac{kq}{\sqrt{z^2+R^2}}$$

در نقطه A (مرکز حلقه) $z=0$ است.

$$V_A=\frac{kq}{R}=\frac{(9\times10^{9})(16\times10^{-6})}{0.03}=4.8\times10^{6}\ \text{V}$$

$$V_B=\frac{(9\times10^{9})(16\times10^{-6})}{\sqrt{(0.04)^2+(0.03)^2}}=2.88\times10^{6}\ \text{V}$$

$$V_B-V_A=2.88\times10^{6}-4.8\times10^{6}=-1.92\times10^{6}\ \text{V}$$

۸۶- بارها و مختصات دو بار نقطه‌ای که در صفحهٔ xy قرار دارند عبارت‌اند از $q_1=+3.00\times10^{-6}\ \text{C}$ ، $x=+3.50\,\text{cm}$ ، $y=+5.00\,\text{cm}$ و $q_2=-4.00\times10^{-6}\ \text{C}$ ، $x=-2.00\,\text{cm}$ ، $y=+1.50\,\text{cm}$. چقدر کار باید انجام گیرد تا این بارها با شروع از فاصلهٔ نامتناهی در مکانهای خود قرار گیرند؟

حل: ابتدا فاصله دوبار را به دست می‌آوریم.

$$r=\sqrt{\Delta x^2+\Delta y^2}=\sqrt{(5.5)^2+(3.5)^2}=6.52\,\text{cm}$$

$$W=W_1+W_2=0+\frac{kq_1q_2}{r}=\frac{(9\times10^{9})(3\times10^{-6})(-4\times10^{-6})}{0.0652}$$
$$=1.66\ \text{J}$$

۸۷- دو صفحهٔ رسانای تخت، موازی و باردار که به فاصلهٔ $d=1.00\,\text{cm}$ از یکدیگر قرار گرفته‌اند، اختلاف پتانسیلی برابر با $\Delta V=625\ \text{V}$ میان صفحه‌ها ایجاد می‌کنند. یک الکترون از سطح یکی از صفحه‌ها به طور مستقیم به طرف دیگری پرتاب می‌شود. اگر این الکترون درست روی سطح صفحهٔ دوم متوقف شود، تندی اولیهٔ آن چقدر است؟

حل:

$$K=\Delta U=e\Delta V=(1.6\times10^{-19})(625)=1\times10^{-16}\ \text{J}$$

$$K=\frac{1}{2}mv^2\Rightarrow 1\times10^{-16}=\left(\frac{1}{2}\right)(9.1\times10^{-31})v^2$$

$$\Rightarrow v=1.48\times10^{7}\ \text{m/s}$$

۸۸- ذره‌ای با بار مثبت Q در نقطهٔ P ثابت شده است. ذرهٔ دومی به جرم m و بار $-q$ با تندی ثابت روی دایره‌ای به شعاع r_1 و به مرکز P حرکت می‌کند. عبارتی برای کار W که باید توسط یک عامل خارجی روی ذرهٔ دوم انجام گیرد تا شعاع دایرهٔ حرکت آن به r_2 افزایش یابد، به دست آورید.

حل: ذره با بار $-q$ هم انرژی پتانسیل و هم انرژی جنبشی دارد. نیروی جانب مرکز برابر نیروی جاذبه کولنی است.

$$F=\frac{mv^2}{r}=\frac{kqQ}{r^2}\Rightarrow mv^2=\frac{kqQ}{r}$$

$$K=\frac{1}{2}mv^2=\frac{kqQ}{2r}=\frac{qQ}{8\pi\varepsilon_0 r}\ ,\ U=\frac{-qQ}{4\pi\varepsilon_0 r}$$

$$E=K+U=\frac{qQ}{8\pi\varepsilon_0 r}-\frac{qQ}{4\pi\varepsilon_0 r}=-\frac{qQ}{8\pi\varepsilon_0 r}$$

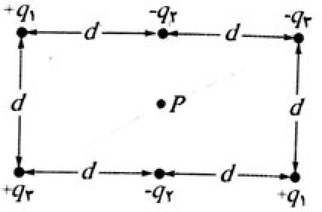
$$W=E_2-E_1=\frac{-qQ}{8\pi\varepsilon_0 r_2}-\frac{-qQ}{8\pi\varepsilon_0 r_1}=\frac{qQ}{8\pi\varepsilon_0}\left(\frac{1}{r_1}-\frac{1}{r_2}\right)$$

۸۹- میدان الکتریکی که غالباً در نزدیکی سطح کرهٔ زمین مشاهده می‌شود تقریباً برابر با $100\ \text{V/m}$ است. اگر این میدان روی کل سطح زمین باشد، پتانسیل الکتریکی نقطه‌ای روی این سطح چقدر است؟ (در بینهایت $V=0$ اختیار کنید.)

حل:

$$V=\frac{kq}{r}=Er=(100)(6.4\times10^{6})=6.4\times10^{8}\ \text{V}$$

۹۰- در شکل ۲۰-۶۴، نقطهٔ P در مرکز مستطیل قرار دارد. به ازای $V=0$ در بینهایت، $q_1=5/00\ fC$ ، $q_2=2/00\ fC$ ، $q_3=3/00\ fC$ و $d=2/54\ cm$. پتانسیل الکتریکی خالص ناشی از شش ذرهٔ باردار در نقطهٔ P چقدر است؟



شکل ۲۰-۶۴ مسئلهٔ ۹۰

حل:

$$V=\frac{kq_1}{\sqrt{d^2+d^2/4}}-\frac{kq_2}{\frac{d}{2}}+\frac{-kq_3}{\sqrt{d^2+d^2/4}}+\frac{kq_1}{\sqrt{d^2+d^2/4}}-\frac{kq_2}{\frac{d}{2}}+\frac{kq_3}{\sqrt{d^2+d^2/4}}=\frac{2kq_1}{\sqrt{5}d}-\frac{2kq_2}{d}-\frac{2kq_3}{\sqrt{5}d}+\frac{2kq_1}{\sqrt{5}d}-\frac{2kq_2}{d}+\frac{2kq_3}{\sqrt{5}d}=$$

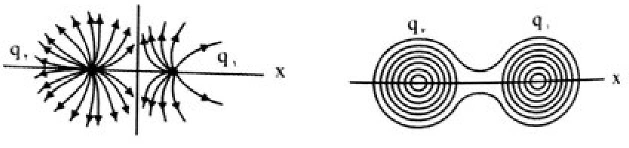
$$\frac{4kq_1}{\sqrt{5}d}-\frac{4kq_2}{d}=\frac{(4)(9\times10^{9})(5\times10^{-15})}{(\sqrt{5})(2/54\times10^{-2})}-\frac{(4)(9\times10^{9})(2\times10^{-15})}{(2/54\times10^{-2})}\Rightarrow$$

$$V=3/17\times10^{-3}-2/83\times10^{-3}=3/4\times10^{-4}\ \text{V}$$

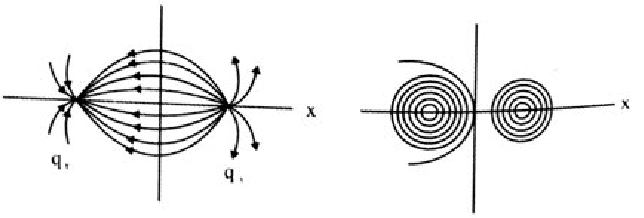
۹۱- شکل ۲۰-۳۳، دو ذرهٔ باردار را روی یک محور نشان می‌دهد. خطهای میدان الکتریکی و سطحهای هم‌پتانسیل را در صفحهٔ کاغذ به ازای (الف) $q_1=+q$ ، $q_2=+2q$ و (ب) $q_1=+q$ ، $q_2=-3q$ رسم کنید.

حل: سطوح هم پتانسیل عمود بر خطوط میدان هستند.

(الف)



(ب)



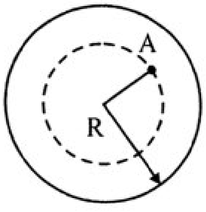
۹۲- بار q به طور یکنواخت در سرتاسر یک حجم کروی به شعاع R توزیع شده است. فرض کنید در بینهایت $V=0$ باشد. (الف) V در فاصلهٔ شعاعی $r<R$ و (ب) اختلاف پتانسیل میان نقطه‌های واقع بر $r=R$ و نقطهٔ $r=0$ چقدر است؟

حل: (الف)

$$E=\frac{\rho r}{3\varepsilon_0}=\frac{qr}{4\pi\varepsilon_0 R^3}$$

$$V_{(r)}-V_{(A)}=-\int_{r=R}^{r}\vec{E}.\vec{dr}=-\int_{R}^{r}\frac{qrdr}{4\pi\varepsilon_0 R^3}\Rightarrow$$

$$V_{(r)}-\frac{q}{4\pi\varepsilon_0 R}=-\frac{q(r^2-R^2)}{8\pi\varepsilon_0 R^3}\Rightarrow V_{(r)}=\frac{q(3R^2-r^2)}{8\pi\varepsilon_0 R^3}$$



(ب)

$$V_{(0)}=\frac{3q}{8\pi\varepsilon_0 R}\Rightarrow V_{(R)}-V_{(0)}=\frac{q}{4\pi\varepsilon_0 R}-\frac{3q}{8\pi\varepsilon_0 R}=\frac{-q}{8\pi\varepsilon_0 R}$$

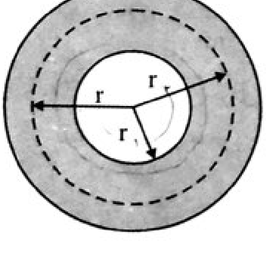
۹۳- یک پوستهٔ کروی ضخیم با بار Q و چگالی بار حجمی یکنواخت ρ در شعاعهای r_1 و $r_2>r_1$ محدود شده است. به ازای $V=0$ در بینهایت، پتانسیل الکتریکی V را برحسب تابعی از فاصلهٔ r از مرکز این توزیع بار، با در نظر گرفتن ناحیه‌های (الف) $r>r_2$ ، (ب) $r_2>r>r_1$ ، و (پ) $r<r_1$ ، به دست آورید. (ت) آیا این پاسخها در $r=r_2$ و $r=r_1$ با یکدیگر سازگارند؟ (*راهنمایی:* بخش ۱۹-۹ را ببینید.)

حل: (الف)

$$r>r_2\Rightarrow E=\frac{kQ}{r^2}$$

$$V_{(r)}-V_{(\infty)}=-\int_{r=\infty}^{r}\vec{E}.\vec{dr}=$$

$$-\int_{\infty}^{r}\frac{kQ}{r^2}dr\Rightarrow V_{(r)}=\frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 r}=\frac{\rho(r_2^3-r_1^3)}{3\varepsilon_0 r}$$



(ب)

$$r_1<r<r_2\ ,\ V_{(r_2)}=\frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 r_2}\ ,\ \oint_S E\cdot nds=\frac{q}{\varepsilon_0}\Rightarrow$$

$$E\varepsilon\pi r^2=\frac{\rho\frac{4}{3}\pi(r^3-r_1^3)}{\varepsilon_0}\Rightarrow E_{(r)}=\frac{\rho(r^3-r_1^3)}{3\varepsilon_0 r^2}$$

$$V_{(r)}-V_{(r_2)}=-\int_{r_2}^{r}\frac{\rho(r^3-r_1^3)}{3\varepsilon_0 r^2}dr\Rightarrow$$

$$V_{(r)}-\frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 r_2}=\frac{-\rho}{3\varepsilon_0}\int_{r_2}^{r}\left(r-\frac{r_1^3}{r^2}\right)dr=\frac{-Q}{\frac{4}{3}\pi(r_2^3-r_1^3)\times3\varepsilon_0}\left[\frac{r^2}{2}+\frac{r_1^3}{r}\right]_{r_2}^{r}$$

$$\frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 r_2}-\frac{Q}{4\pi\varepsilon_0(r_2^3-r_1^3)}\left(\frac{r^2}{2}+\frac{r_1^3}{r}-\frac{r_2^2}{2}-\frac{r_1^3}{r_2}\right)=$$

$$\frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 r_2(r_2^3-r_1^3)}\left(r_2^3-r_1^3-\frac{r_2 r^2}{2}-\frac{r_2 r_1^3}{r}+\frac{r_2^3}{2}+r_1^3\right)\Rightarrow$$

$$V_{(r)}=\frac{Q}{4\pi\varepsilon_0(r_2^3-r_1^3)}\left(\frac{3}{2}r_2^2+\frac{r^2}{2}-\frac{r_1^3}{r}\right)=\frac{\rho}{3\varepsilon_0}\left(\frac{3r_2^2}{2}-\frac{r^2}{2}-\frac{r_1^3}{r}\right)$$

(ب) ابتدا پتانسیل را در $r=r_1$ به دست می‌آوریم.

$$V_{(r_1)}=\frac{Q}{4\pi\varepsilon_0(r_2^3-r_1^3)}\left(\frac{3}{2}r_2^2-\frac{r_1^2}{2}-r_1^2\right)\Rightarrow$$

$$V_{(r_1)}=\frac{3Q(r_2^2-r_1^2)}{8\pi\varepsilon_0(r_2^3-r_1^3)}=\frac{\rho}{2\varepsilon_0}\left(r_2^2-r_1^2\right)$$

در ناحیه $r<r_1$ هیچ باری وجود ندارد و $E=0$ است. پس پتانسیل ثابت و برابر مقدار بالا است.

(ت) بله. به ازای $r=r_2$ پاسخ قسمت‌های الف و ب هر دو برابر $V=\frac{\rho}{3\varepsilon_0}\left(r_2^2-\frac{r_1^3}{r_2}\right)$ می‌شود و به ازای $r=r_1$ پاسخ قسمت‌های ب و پ $V=\frac{\rho}{2\varepsilon_0}\left(r_2^2-r_1^2\right)$ می‌شود.

۹۴- یک ذرهٔ آلفا (که دارای دو پروتون است) به طور مستقیم به طرف هستهٔ هدفی که شامل ۹۲ پروتون است پرتاب می‌شود. انرژی جنبشی اولیهٔ ذرهٔ آلفا برابر با 0.48 pJ است. با فرض اینکه هستهٔ هدف حرکت نکند، کمترین فاصلهٔ مرکز به مرکزی که ذرهٔ آلفا به هستهٔ هدف می‌رسد چقدر است؟

حل: ذره α آنقدر به هسته هدف نزدیک می‌شود که به طور لحظه‌ای می‌ایستد.

$$E_i=E_f\Rightarrow k_i+0=0+\frac{k(2e)(ze)}{r}\Rightarrow$$

$$0.48\times10^{-12}=\frac{(9\times10^9)(2)(92)(1.6\times10^{-19})^2}{r}$$

$$\Rightarrow r=8.83\times10^{-14}\ \text{m}$$

۹۵- با شروع از معادلهٔ ۲۰-۳۰، عبارتی برای میدان الکتریکی ناشی از یک دوقطبی در نقطه‌ای روی محور دوقطبی به دست آورید.

حل: روی محور دوقطبی $\theta=0$ است.

$$V=\frac{P}{4\pi\varepsilon_0 r^2}$$

$$E_{(r)}=-\frac{dV}{dr}=\frac{-P}{4\pi\varepsilon_0 r^3}\frac{d}{dr}\left(\frac{1}{r^2}\right)=\frac{P}{2\pi\varepsilon_0 r^3}$$

۹۶- بار 1.50×10^{-8} C روی یک کرهٔ فلزی منزوی به شعاع 16.0 cm قرار گرفته است. به ازای $V=0$ در بینهایت، پتانسیل الکتریکی در نقطه‌های روی سطح این کره چقدر است؟

حل:

$$V=\frac{kq}{r}=\frac{(9\times10^9)(1.5\times10^{-8})}{0.16}=843.8\ \text{V}$$

۹۷- در آزمایش قطرهٔ روغن *میلیکان* (بخش ۱۸-۸)، میدان الکتریکی یکنواختی به بزرگی 1.92×10^5 N/C در ناحیهٔ میان دو صفحه که به فاصلهٔ 1.50 cm از هم قرار دارند، ایجاد می‌شود. اختلاف پتانسیل الکتریکی میان صفحه‌ها را به‌دست آورید.

حل:

$$\Delta V=Ed=(1.92\times10^5)(0.015)=2.88\times10^3\ \text{V}$$

۹۸- بار نقطه‌ای $q=1.50\times10^{-8}$ C را در نظر بگیرید و فرض کنید در بینهایت $V=0$ است. (الف) شکل و ابعاد سطح هم‌پتانسیل به پتانسیل 30.0 V ناشی از فقط بار q، چیست؟ (ب) آیا سطحهایی که پتانسیل آنها به مقدار ثابتی با هم تفاوت دارند (مثلاً 1.0 V) به فاصلهٔ یکسانی از هم قرار گرفته‌اند؟

حل: (الف) سطوح هم پتانسیل یک بار نقطه‌ای، کروی می‌باشد.

$$V=\frac{kq}{r}\Rightarrow 30=\frac{(9\times10^9)(1.5\times10^{-8})}{r}\Rightarrow r=4.5\ \text{m}$$

(ب) اگر پتانسیل تابعی خطیِ از r بود آنگاه سطوحی که به اندازه مقدار ثابتی تفاوت داشتند به فاصله یک نی واقع بودند.

ولی $V\propto\frac{1}{r}$ است و بنابراین با افزایش r فاصله آنها بیشتر می‌شود.

۹۹- در مدل کوارکی ذره‌های بنیادی، پروتون از سه کوارک تشکیل شده است: دو کوارک «بالا» ، هر یک با بار $+2e/3$ ، و یک کوارک «پایین» با بار $-e/3$. فرض کنید که این سه کوارک به فاصلهٔ یکسانی از یکدیگر قرار گرفته‌اند. این فاصله را 1.32×10^{-15} m در نظر بگیرید و انرژی پتانسیل الکتریکی دستگاه (الف) فقط شامل دو کوارک بالا و (ب) شامل هر سه کوارک را محاسبه کنید.

حل: (الف)

$$V=\frac{kq_1^2}{r}=\frac{(9\times10^9)\left(\frac{2}{3}\right)^2(1.6\times10^{-19})^2}{1.32\times10^{-15}}=7.76\times10^{-14}\ \text{J}$$

(ب)

$$V=\frac{kq_1^2}{r}+2\frac{kq_1q_2}{r}$$

$$=7.76\times10^{-14}+\frac{(2)(9\times10^9)\left(\frac{2}{3}\right)\left(\frac{-1}{3}\right)(1.6\times10^{-19})^2}{1.32\times10^{-15}}=0$$

۱۰۰- (الف) پروتونی با انرژی جنبشی 4.80 MeV به طور رودررو به طرف یک هستهٔ سرب حرکت می‌کند. با فرض اینکه پروتون به داخل هسته نفوذ نکند و اینکه تنها نیروی بین پروتون و هسته نیروی کولنی باشد، کمترین فاصلهٔ مرکز به مرکز d_p بین پروتون و هسته را هنگامی که پروتون به توقف لحظه‌ای می‌رسد، محاسبه کنید. اگر پروتون با یک ذرهٔ آلفا (که دارای دو پروتون است) با همان انرژی جنبشی اولیه جایگزین شود، ذرهٔ آلفا در فاصلهٔ مرکز به مرکز d_α متوقف خواهد شد. (ب) نسبت d_α/d_p چقدر است؟

حل: (الف) چون هیچ نیرویی از خارج سیستم بر آن وارد نمی‌شود، انرژی پایسته می‌ماند.

$$K_i+U_i=K_f+U_f$$

$$(۴/۸\times۱۰^{۶}\times۱/۶\times۱۰^{-۱۹})+۰=۰+\frac{kze^{۲}}{r}\Rightarrow$$

$$۷/۶۸\times۱۰^{-۱۳}=\frac{(۹\times۱۰^{۹})(۸۲)(۱/۶\times۱۰^{-۱۹})^{۲}}{r}$$

$$\Rightarrow r=dp=۲/۴۶\times۱۰^{-۱۴}\ \text{m}$$

(ب)

$$K_i+۰=۰+\frac{k(۸۲e)(۲e)}{r}\Rightarrow r=d_\alpha=۲d_p\Rightarrow\frac{d\alpha}{dp}=۲$$

۱۰۱- (الف) با استفاده از معادلهٔ ۲۰-۳۲ نشان دهید که پتانسیل الکتریکی در نقطه‌ای روی محور مرکزی یک حلقهٔ باریک (با بار q و شعاع R) و به فاصلهٔ z از حلقه برابر است با

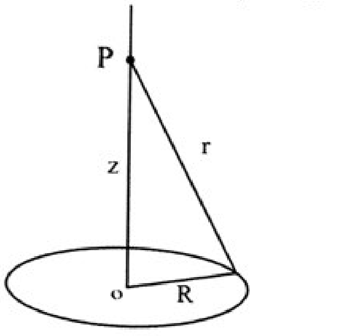
$$V=\frac{۱}{۴\pi\varepsilon_{۰}}\frac{q}{\sqrt{z^{۲}+R^{۲}}}$$

(ب) با استفاده از این نتیجه، عبارتی برای E در نقطه‌های روی محور حلقه به دست آورید؛ نتیجهٔ خود را با محاسبهٔ E در بخش ۱۸-۶ مقایسه کنید.

حل: (الف) حلقه را به قسمت‌های کوچک تقسیم می‌کنیم.

$$dV=\frac{kdq}{r}=\frac{kdq}{\sqrt{z^{۲}+R^{۲}}}\Rightarrow$$

$$V=k\int\frac{dq}{\sqrt{z^{۲}+R^{۲}}}=\frac{k}{\sqrt{z^{۲}+R^{۲}}}\int dq=\frac{kq}{\sqrt{z^{۲}+R^{۲}}}$$



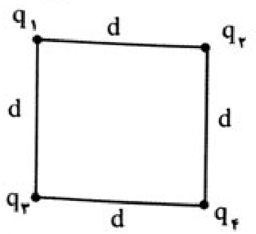
(ب)

$$E=-\frac{dV}{dz}=-kq\frac{-z}{(z^{۲}+R^{۲})^{۳/۲}}=\frac{kqz}{(z^{۲}+R^{۲})^{۳/۲}}$$

۱۰۲- انرژی پتانسیل الکتریکی پیکربندی بار شکل ۲۰-۸ (الف) چقدر است؟ از مقدارهای عددی مسئلهٔ نمونهٔ ۲۰-۳ استفاده کنید.

حل:

$q_۱=۱۲\text{nC}\ ,\ q_۲=-۲۴\text{nC}\ ,\ q_۳=۳۱\text{nC}$
$q_۴=۱۷\text{nC}\ ,\ d=۱/۳\text{m}$



(الف)

$$V=k\frac{q_۱q_۲}{d}+\frac{kq_۱q_۴}{\sqrt{۲}d}+\frac{kq_۱q_۳}{d}+\frac{kq_۲q_۴}{d}+\frac{kq_۲q_۳}{\sqrt{۲}d}+\frac{kq_۳q_۴}{d}\Rightarrow$$

$$U=\frac{(۹\times۱۰^{۹})}{۱/۳}\Big[(۱۲)(-۲۴)\times۱۰^{-۱۸}+\frac{(۱۲)(۱۷)\times۱۰^{-۱۸}}{\sqrt{۲}}+(۱۲)(۳۱)\times۱۰^{-۱۸}$$
$$(-۲۴)(۱۷)\times۱۰^{-۱۸}+\frac{(-۲۴)(۳۱)\times۱۰^{-۱۸}}{\sqrt{۲}}$$
$$+(۳۱)(۱۷)\times۱۰^{-۱۸}$$
$$=-۱/۲۴\times۱۰^{-۶}\ \text{J}$$

۱۰۳- یک کرهٔ مسی توپر به شعاع ۱/۰cm دارای پوشش سطحی نازکی از جنس نیکل است. بعضی از اتمهای نیکل پرتوزا هستند، یعنی به هنگام واپاشی یک الکترون گسیل می‌کنند. نیمی از این الکترونها وارد کرهٔ مسی می‌شوند و در آنجا هر یک ۱۰۰keV انرژی از خود به جای می‌گذارند. نیم دیگر الکترونها، هر یک با بار $-e$، می‌گریزند. پوشش نیکل دارای فعالیت $۳/۷۰\times۱۰^{۸}$ واپاشی پرتوزا در ثانیه است. این کره از تار نارسانای بلندی آویخته و از محیط اطراف خود منزوی شده است. (الف) چقدر طول می‌کشد تا پتانسیل کره به اندازهٔ ۱۰۰۰V افزایش یابد؟ (ب) چقدر طول می‌کشد تا دمای کره بر اثر انرژی به جای گذاشته شده توسط الکترونها، به اندازهٔ ۵/۰K افزایش یابد؟ ظرفیت گرمایی کره ۱۴J/K است. **SSM**

حل:

$$\frac{q}{t}=(۳/۷\times۱۰^{۸})(۱/۶\times۱۰^{-۱۹})=۵/۹۶\times۱۰^{-۱۱}\ \text{C/s}$$

(الف) نیمی از این الکترون‌ها وارد کره می‌شود.

$$V=\frac{k\frac{q}{۲}}{R}\Rightarrow\frac{V}{t}=\frac{k\frac{q}{t}}{۲R}\Rightarrow$$

$$\frac{۱۰۰۰}{t}=\frac{(۹\times۱۰^{۹})(۵/۹۲\times۱۰^{-۱۱})}{(۲)(۰/۰۱)}\Rightarrow t=۳۷/۵\ \text{s}$$

(ب) انرژیی که به کره منتقل می‌شود برابر است با:

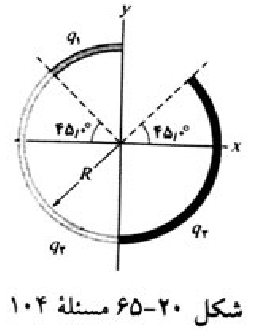
$$\frac{u}{t}=\left(\frac{۳/۷\times۱۰^{۸}}{۲}\right)\left(۱۰۰\times۱۰^{۳}\right)\left(۱/۶\times۱۰^{-۱۹}\right)$$

$$\Rightarrow\frac{u}{t}=۲/۹۶\times۱۰^{-۶}\ \text{J/s}$$

$$Q=mc\Delta\theta=(۱۴)(۵)=۷۰\ \text{J}\ ,\ \frac{u}{t}=\frac{q}{t}$$

$$\Rightarrow۲/۹۶\times۱۰^{-۶}=\frac{۷۰}{t}\Rightarrow t=۲/۳۶\times۱۰^{۷}\ \text{s}$$

۱۰۴- شکل ۲۰-۶۵ سه کمان دایره‌ای نارسانا به شعاع $R=۸/۵۰$ cm را نشان می‌دهد. بار روی کمانها عبارت‌اند از $q_۱=۴/۵۲$ pC ، $q_۲=-۲/۰۰q_۱$ ، $q_۳=+۳/۰۰q_۱$. به ازای $V=۰$ در بینهایت، پتانسیل الکتریکی خالص کمانها در مرکز مشترک خمیدگی چقدر است؟



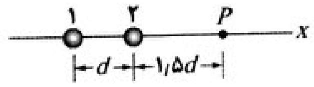
شکل ۲۰-۶۵ مسئلهٔ ۱۰۴

حل: هر سه کمان به فاصله یکسانی از مکانی هستند که می‌خواهیم پتانسیل را محاسبه کنیم. همچنین در حل مسئله ۲۴ دیدیم که پتانسیل کمان به زاویه آن بستگی ندارد.

$$V=\frac{q_۱}{۴\pi\varepsilon_۰ R}+\frac{-۲q_۱}{۴\pi\varepsilon_۰ R}+\frac{۳q_۱}{۴\pi\varepsilon_۰ R}=\frac{۲q_۱}{۴\pi\varepsilon_۰ R}\Rightarrow$$

$$V=\frac{(۹\times۱۰^{۹})(۲)(۴/۵۲\times۱۰^{-۱۲})}{۰/۰۸۵}=۰/۹۶\ V$$

۱۰۵- در شکل ۲۰-۶۶، دو ذره با بارهای $q_۱$ و $q_۲$ روی محور x ثابت شده‌اند. وقتی ذرهٔ سومی با بار $+۶/۰\mu C$ از فاصلهٔ نامتناهی به نقطهٔ P آورده شود، دستگاه سه ذره‌ای همان انرژی پتانسیل الکتریکی را خواهد داشت که دستگاه دو ذره‌ای اولیه داشته است. نسبت بار $q_۱/q_۲$ چقدر است؟



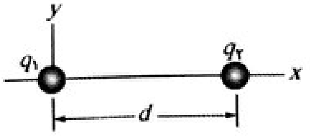
شکل ۲۰-۶۶ مسئلهٔ ۱۰۵

حل: چون انرژی مجموعه موقعی که ذره $q_۳$ به نقطه P آورده می‌شود تغییر نمی‌کند، پتانسیل دوبار $q_۱$ و $q_۲$ در نقطه P صفر است. پس:

$$V_P=\frac{kq_۱}{۲/۵d}+\frac{kq_۲}{۱/۵d}=۰$$

$$\Rightarrow\frac{q_۱}{q_۲}=\frac{-۲/۵}{۱/۵}=-\frac{۵}{۳}=-۱/۶۷$$

۱۰۶- در شکل ۲۰-۶۷، فاصلهٔ دو ذره را ۱/۰m در نظر بگیرید؛ فرض کنید بارهای آنها $q_۱=+q$ و $q_۲=+۲q$ است و پتانسیل را در بینهایت $V=۰$ اختیار کنید. در چه مختصهٔ متناهی روی محور x (الف) پتانسیل الکتریکی خالص ناشی از دو ذره صفر است؟ و (ب) میدان الکتریکی خالص ناشی از آنها صفر است؟



شکل ۲۰-۶۷ مسئلهٔ ۱۰۶

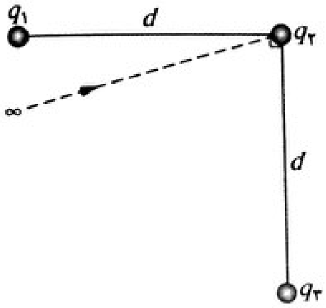
حل: (الف) چون دو بار مثبت هستند نقطه‌ای وجود ندارد که پتانسیل در آن صفر باشد.
(ب) چون دو بار مثبت هستند، این نقطه روی محور x و بین دو بار و نزدیکتر به بار با اندازه کوچکتر است.

$$E_A=\frac{kq_۱}{x^۲}-\frac{kq_۲}{(d-x)^۲}=۰\Rightarrow\frac{q}{x^۲}=\frac{۲q}{(d-x)^۲}\Rightarrow$$

$$۲x^۲=(d-x)^۲\Rightarrow\sqrt{۲}x=d-x$$

$$\Rightarrow x=\frac{d}{\sqrt{۲}+۱}=\frac{۱}{\sqrt{۲}+۱}=۰/۴۱۴\,m$$

۱۰۷- در شکل ۲۰-۶۸، ذره‌ای با بار $q_۲=+۵e$ در امتداد خط‌چین از بینهایت به نقطهٔ نشان داده شده در نزدیکی دو بار ثابت شدهٔ $q_۱=+۲e$ و $q_۳=-q_۱$ آورده می‌شود. نسبت پتانسیل الکتریکی این دستگاه سه ذره‌ای به دستگاه دو ذره‌ای اولیه چقدر است؟



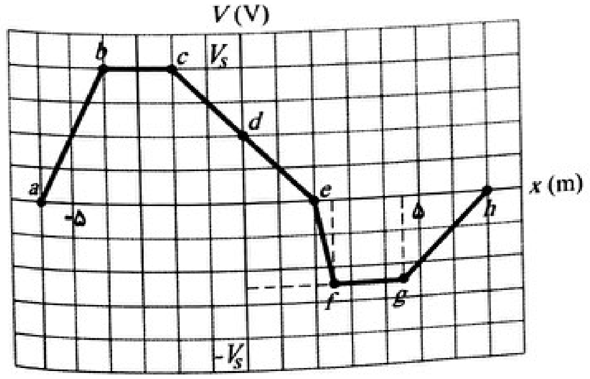
شکل ۲۰-۶۸ مسئلهٔ ۱۰۷

حل: ابتدا پتانسیل ناشی از $q_۱$ و $q_۳$ را در محل $q_۲$ به دست می‌آوریم.

$$V=\frac{kq_۱}{d}+\frac{kq_۳}{d}=\frac{kq_۱}{d}-\frac{kq_۱}{d}=۰$$

چون پتانسیل این نقطه صفر است، هیچ کاری باری تغییر مکان $q_۲$ لازم نیست چون پتانسیل خالص ناشی از $q_۱$و $q_۳$ درهر دو مکان ابتدایی و انتهایی بار متحرک صفر است. بنابراین تغییر انرژی پتانسیل سیستم برابر صفر است. پس نسبت موردنظر برابر ۱ است.

۱۰۸- در وضعیت معینی، پتانسیل الکتریکی در امتداد محور x مانند نمودار نشان داده شده در شکل ۲۰-۶۹ تغییر می‌کند.مقیاس محور قائم با $V_s=۱۲/۰V$ مشخص شده است. برای بازه‌های (الف) ab، (ب) bc، (پ) cd، (ت) de، (ث) ef، (ج) fg، (چ) gh، مؤلفهٔ x میدان الکتریکی را تعیین کنید، و سپس E_x را برحسب x رسم کنید. (از رفتار میدان در نقطه‌های انتهایی هر بازه چشمپوشی کنید.)



شکل ۲۰-۶۹ مسئلهٔ ۱۰۸

حل: (الف)

$$ab:-۶<x<-۴\Rightarrow E_x=-\frac{\Delta V}{\Delta x}=-\frac{۱۲-۰}{-۴-(-۶)}=-۶\ V/m$$

(ب)

$$bc:-۴<x<-۲\Rightarrow E_x=-\frac{\Delta V}{\Delta x}=۰$$

(پ)

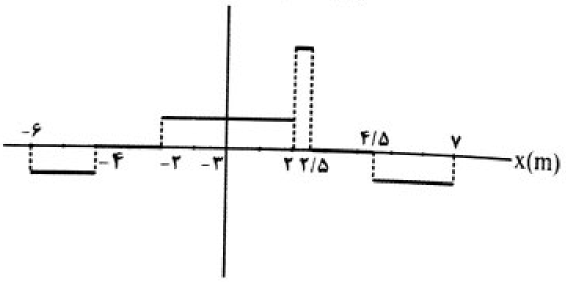
$$cd:-۲<x<۰\Rightarrow E_x=-\frac{۶-۱۲}{۰-(-۲)}=۳\ V/m$$

(ت) $de: ۰ < x < ۲ \Rightarrow E_x = -\frac{۰-۶}{۲-۰} = ۳\,V/m$

(ث) $ef: ۲ < x < ۲/۵ \Rightarrow E_x = -\frac{-۷/۵-۰}{۲/۵-۲} = ۳\,V/m$

(ج) $fg: ۲/۵ < x < ۴/۵ \Rightarrow E_x = ۰$

(چ) $gh: ۴/۵ < x < ۷ \Rightarrow E_x = -\frac{۰-(۷/۵)}{۷-۴/۵} = -۳\,V/m$

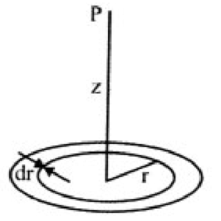


۱۰۹- شعاع قرصی برابر با $R = ۲/۲۰\,cm$ است. چگالی بار سطحی آن از $r = ۰$ تا $r = R/۲$ برابر با $۱/۵۰ \times ۱۰^{-۶}\,C/m^۲$، و از $r = R/۲$ تا $r = R$ برابر با $۸/۰۰ \times ۱۰^{-۷}\,C/m^۲$ است. (الف) بار کل روی قرص چقدر است؟ (ب) به ازای $V = ۰$ در بینهایت، پتانسیل الکتریکی در نقطه‌ای روی محور مرکزی عمودی قرص، به فاصلهٔ $z = R/۲$ از مرکز قرص چقدر است؟

حل: المان سطح را حلقه‌ای به شعاع r و ضخامت dr می‌گیریم.

$dA = ۲\pi r dr$

$dq = \sigma dA = \sigma ۲\pi r dr$



(الف)

$$Q = \int \sigma dA = \int_{r=۰}^{۰/۰۱۱} (۱/۵ \times ۱۰^{-۶}) ۲\pi r dr + \int_{۰/۰۱۱}^{۰/۰۲۲} (۸ \times ۱۰^{-۷}) ۲\pi r dr$$

$$= ۵/۷ \times ۱۰^{-۱۰} + ۹/۱۲ \times ۱۰^{-۱۰} = ۱/۴۸۲ \times ۱۰^{-۹}\,C$$

(ب) پتانسیل ناشی از حلقه در نقطه‌ای روی محور آن از این رابطه به دست می‌آید.

$$V = \frac{kq}{\sqrt{z^۲ + R^۲}}$$

پتانسیل المان dA در نقطه P برابر است با:

$$dV = \frac{kdq}{\sqrt{z^۲ + r^۲}} = \frac{k\sigma ۲\pi r dr}{\sqrt{r^۲ + z^۲}}$$

$$V = k۲\pi\sigma_۱ \int_{r=۰}^{R/۲} \frac{rdr}{\sqrt{r^۲ + z^۲}} + k۲\pi\sigma_۲ \int_{R/۲}^{R} \frac{rdr}{\sqrt{r^۲ + z^۲}} =$$

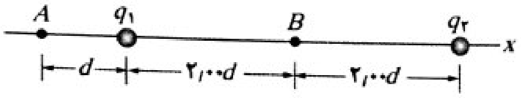
$$۲k\pi\sigma_۱ \sqrt{r^۲ + R^۲/۴}\,\Big]_{r=۰}^{R/۲} + ۲k\pi\sigma_۲ \sqrt{r^۲ + R^۲/۴}\,\Big]_{R/۲}^{R} =$$

$$۲k\pi\sigma_۱ \left[\frac{R}{\sqrt{۲}} - \frac{R}{۲}\right] + ۲k\pi\sigma_۱ \left[\frac{R\sqrt{۵}}{۲} - \frac{R}{\sqrt{۲}}\right] \Rightarrow$$

$$V = ۲\pi(۹ \times ۱۰^۹)(۱/۵ \times ۱۰^{-۶}) \left[\frac{۰/۰۲۲}{\sqrt{۲}} - \frac{۰/۰۲۲}{۲}\right] + ۲\pi(۹ \times ۱۰^۹)(۸ \times ۱۰^{۷})$$

$$\left[\frac{۰/۰۲۲}{۲} - \frac{۰/۰۲۲}{\sqrt{۲}}\right] = ۷۹۵\,V$$

۱۱۰- در شکل ۲۰-۷۰، ذرهٔ ۱ با بار $q_۱ = +e$ و ذرهٔ ۲ با بار $q_۲ = -5e$ روی محور x قرار دارند. فاصلهٔ $d = ۵/۶۰\,\mu m$ است. اختلاف پتانسیل الکتریکی $V_A - V_B$ چقدر است؟



شکل ۲۰-۷۰ مسئلهٔ ۱۱۰

حل:

$$V_A = \frac{kq_۱}{d} + \frac{kq_۲}{۵d} \quad , \quad V_B = \frac{kq_۱}{۲d} + \frac{kq_۲}{۲d}$$

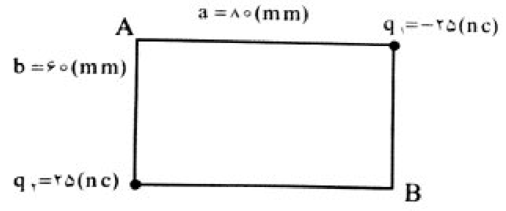
$$V_A - V_B = \left(\frac{kq_۱}{d} + \frac{kq_۲}{۵d}\right) - \left(\frac{kq_۱}{۲d} + \frac{kq_۲}{۲d}\right) = \frac{kq_۱}{۲d} - \frac{۳kq_۲}{۱۰d} \Rightarrow$$

$$V_A - V_B = \frac{ke}{۲d} - \frac{-۱۵ke}{۱۰d} = \frac{۵ke + ۱۵ke}{۱۰d} = \frac{۲ke}{d} \Rightarrow$$

$$V_A - V_B = \frac{(۲)(۹ \times ۱۰^۹)(۱/۶ \times ۱۰^{-۱۹})}{۵/۶ \times ۱۰^{-۶}} = ۵/۱۴ \times ۱۰^{-۴}\,V$$

۱۱۱- بارهای نقطه‌ای با بزرگیهای یکسان ($۲۵\,nC$) و علامتهای مخالف به طور قطری روی گوشه‌های مقابل مستطیل $۶۰\,cm \times ۸۰\,cm$ قرار گرفته‌اند. نقطهٔ A آن گوشهٔ اشغال نشده‌ای است که در نزدیکترین فاصله به بار مثبت قرار دارد، و نقطهٔ B گوشهٔ اشغال نشدهٔ دیگر است. اختلاف پتانسیل $V_B - V_A$ را تعیین کنید.

حل:



$$V_A = \frac{kq_۱}{a} + \frac{kq_۲}{b}$$

$$V_B = \frac{kq_۱}{b} + \frac{kq_۲}{a}$$

$$V_B - V_A = \left(\frac{kq_۱}{b} + \frac{kq_۲}{a}\right) - \left(\frac{kq_۱}{a} + \frac{kq_۲}{b}\right) =$$

$$\frac{-kq}{b} + \frac{kq}{a} - \frac{-kq}{a} - \frac{kq}{b} = -\frac{۲kq}{b} + \frac{۲kq}{a} = \frac{۲kq}{a}\left(\frac{۱}{a} - \frac{۱}{b}\right) \Rightarrow$$

$$V_B - V_A = (۲)(۹ \times ۱۰^۹)(۲۵ \times ۱۰^{-۹})\left(\frac{۱}{۰/۸} - \frac{۱}{۰/۶}\right) = -۱۸۷/۵\,V$$

۱۱۲- یک دهه پیش از آنکه *اینشتین* نظریهٔ نسبیت خود را منتشر کند، *تامسون* پیشنهاد کرد که الکترون ممکن است شامل اجزای کوچکی باشد و جرم m الکترون را می‌توان به انرژی پتانسیل برهم کنش این اجزا نسبت داد. بعلاوه، او پیشنهاد کرد که این انرژی برابر $mc^۲$ است، که در آن c تندی نور است.

برآوردی تقریبی از جرم الکترون به روش زیر انجام دهید: فرض کنید الکترون از سه جزء یکسان تشکیل شده است که این اجزا از بینهایت آورده شده‌اند و در گوشه‌های مثلث متساوی الاضلاعی با ضلعی برابر با *شعاع کلاسیکی الکترون*، یعنی $۲/۸۲\times۱۰^{-۵}$ m، قرار داده شده‌اند. (الف) انرژی پتانسیل الکتریکی کل این پیکربندی را پیدا کنید. (ب) سپس آن را بر $c^۲$ تقسیم و نتیجهٔ خود را با جرم پذیرفته شده برای الکترون مقایسه کنید. (این نتیجه وقتی بهتر می‌شود که اجزای بیشتری در نظر گرفته شوند.)

حل: (الف)

$$V=۳\frac{k\left(\frac{e}{۳}\right)^۲}{r}=\frac{ke^۲}{۳r}=\frac{(۹\times۱۰^۹)(۱/۶\times۱۰^{-۱۹})^۲}{(۳)(۲/۸۲\times۱۰^{-۱۵})}=۲/۷۲\times۱۰^{-۱۴}\ \mathrm{J}$$

(ب)

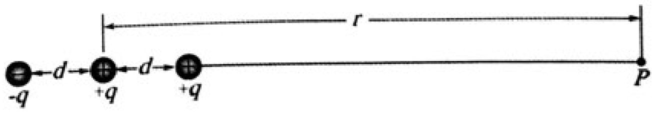
$$m=\frac{V}{c^۲}=\frac{۲/۷۲\times۱۰^{-۱۴}}{۹\times۱۰^{۱۶}}=۳/۰۳\times۱۰^{-۳۱}\ \mathrm{kg}$$

که حدوداً یک سوم جرم واقعی الکترون است.

۱۱۳- شکل ۲۰-۷۱، سه ذرهٔ باردار را نشان می‌دهد که روی یک محور افقی قرار گرفته‌اند. برای نقطه‌هایی (از قبیل P) روی این محور با $r \gg d$، نشان دهید که پتانسیل الکتریکی $V(r)$ با رابطهٔ زیر داده می‌شود

$$V=\frac{۱}{۴\pi\varepsilon_۰}\frac{q}{r}\left(۱+\frac{۲d}{r}\right)$$

(*راهنمایی*. این پیکربندی بار را می‌توان به صورت مجموع یک بار منزوی و یک دو قطبی در نظر گرفت.)



شکل ۲۰-۷۱ مسئلهٔ ۱۱۳

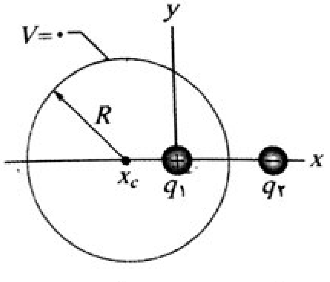
حل:

$$V=\frac{kq}{r-d}+\frac{kq}{r}+\frac{-kq}{r+d}=kq\left[\frac{۱}{r-d}+\frac{۱}{r}-\frac{۱}{r+d}\right]=$$

$$\frac{q}{۴\pi\varepsilon_۰}\frac{r^۲+rd+r^۲-d^۲-r^۲+rd}{r(r-d)(r+d)}=\frac{q}{۴\pi\varepsilon_۰}\frac{۲rd+r^۲-d^۲}{r(r-d)(r+d)}$$

$$r>>d\Rightarrow V=\frac{q}{۴\pi\varepsilon_۰}\frac{r^۲+۲rd}{r^۳}=\frac{qr^۲\left(۱+\frac{۲d}{r}\right)}{۴\pi\varepsilon_۰ r^۳}=\frac{q}{۴\pi\varepsilon_۰ r}\left(۱+\frac{۲d}{r}\right)$$

۱۱۴- بار نقطه‌ای $q_۱=+۶/۰e$ در مبداء یک دستگاه مختصات راستگوشه، و بار نقطه‌ای $q_۲=-۱۰e$ در $x=۸/۶\mathrm{nm}$ و $y=۰$ ثابت شده‌اند. همان‌طور که در شکل ۲۰-۷۲ نشان داده شده است، مکان هندسی همهٔ نقطه‌های واقع بر صفحهٔ xy که برای آنها $V=۰$ است (غیر از بینهایت)، دایره‌ای است که مرکز آن روی محور x قرار دارد. (الف) مکان x_c مرکز دایره و (ب) شعاع R دایره را پیدا کنید. (پ) آیا مقطع xy سطح هم پتانسیل ۵V نیز دایره است؟

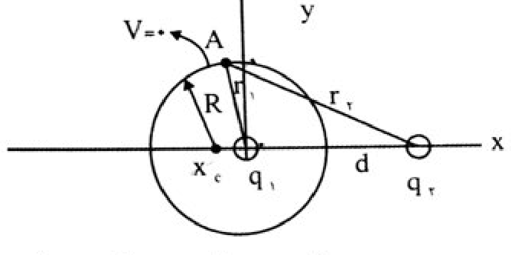


شکل ۲۰-۷۲ مسئلهٔ ۱۱۴

حل:

$$V=\frac{kq_۱}{\sqrt{x^۲+y^۲}}+\frac{kq_۲}{\sqrt{(x-d)^۲=y^۲}}=۰$$

$$q_۱^۲\left[(x-d)^۲+y^۲\right]=q_۲^۲(x^۲+y^۲)$$



$$۳۶(x-d)^۲+۳۶y^۲=۱۰۰x^۲+۱۰۰y^۲$$

$$\Rightarrow ۱۰۰x^۲+۱۰۰y^۲-۳۶x^۲-۳۶d^۲=۷۲xd-۳۶y^۲=۰$$

$$\Rightarrow ۶۴x^۲+۷۲xd+۶۴y^۲=۳۶d^۲\Rightarrow x^۲+\frac{۹}{۸}xd+y^۲=\frac{۳۶}{۶۴}d^۲$$

$$\Rightarrow\left(x+\frac{۹}{۱۶}d\right)^۲-\frac{۸۱}{۲۵۶}d^۲+y^۲=\frac{۳۶}{۶۴}d^۲$$

$$\Rightarrow\left(x+\frac{۹}{۱۶}d\right)^۲+y^۲=\frac{۲۲۵}{۲۵۶}d^۲$$

که معادله دایره است

(الف) مرکز دایره برابر است با:

$$y=۰,\ x_c=\frac{-۹}{۱۶}d=-۴/۸۴\times۱۰^{-۹}\ \mathrm{m}$$

(ب)

$$R=\sqrt{\frac{۲۲۵}{۲۵۶}d^۲}=\frac{۱۵}{۱۶}d=\frac{۱۵}{۱۶}(۸/۶\times۱۰^{-۹})=۸/۰۶\times۱۰^{-۹}\ \mathrm{m}$$

(پ) برای سطح پتانسیل ۵V داریم:

$$\frac{kq_۱}{\sqrt{x^۲+y^۲}}+\frac{kq_۲}{\sqrt{(x-d)^۲+y^۲}}=۵\ \mathrm{V}$$

که دیگر معادله دایره نیست.

۱۱۵- بار $q_۱=-۱/۲\times۱۰^{-۹}\ \mathrm{C}$ در مبدأ، و بار $q_۲=۲/۵\times۱۰^{-۹}\mathrm{C}$ روی محور y در $y=۰/۵۰\mathrm{m}$ قرار دارد. پتانسیل الکتریکی را در فاصله‌ای دور از هر دو بار صفر در نظر بگیرید. (الف) مقطع سطح هم‌پتانسیل $V=۵/۰\mathrm{V}$ را با صفحهٔ xy رسم کنید. این سطح، یکی از دو بار را دربر می‌گیرد. (ب) دو سطح هم‌پتانسیل وجود دارند که به $V=۳/۰\mathrm{V}$ مربوطاند.

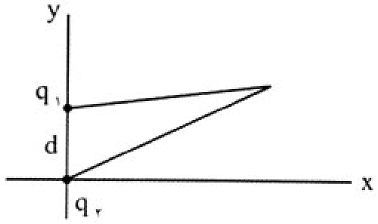
یکی، یک بار و دیگری هر دو بار را در بر دارد. مقطع آنها را با صفحهٔ xy رسم کنید. (پ) آن مقداری از پتانسیل را بیابید که به ازای آن، نقش پتانسیل الکتریکی از یک سطح هم‌پتانسیل به دو سطح هم‌پتانسیل تبدیل شود.

حل: (الف)

$$V=\frac{kq_1}{\sqrt{x^2+y^2}}+\frac{kq_2}{\sqrt{x^2+(y-d)^2}}\Rightarrow$$

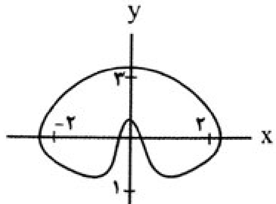
$$V=\frac{(9\times10^9)(-1/2\times10^{-9})}{\sqrt{x^2+y^2}}+\frac{(9\times10^9)(2/5\times10^{-9})}{\sqrt{x^2+(y-0/5)^2}}=5$$

$$\Rightarrow\frac{-10/8}{\sqrt{x^2+y^2}}+\frac{22/5}{\sqrt{x^2+(y-0/5)^2}}=5$$



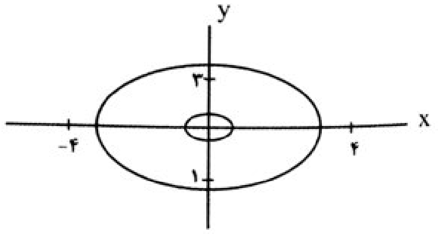
(ب)

$$\frac{-10/8}{\sqrt{x^2+y^2}}+\frac{22/5}{\sqrt{x^2+(y-0/5)^2}}=3$$



(پ)

$$\frac{-10/8}{\sqrt{x^2+y^2}}+\frac{22/5}{\sqrt{x^2+(y-0/5)^2}}=V_0$$



با تبدیل x به $x-$ معادله تغییر نمی‌کند پس محور y محور تقارن منحنی است. در جایی که منحنی به دو قطعه تبدیل می‌شود، محور y مماس بر منحنی است و طول نقطه جدایی (نقطه A) صفر است.

چون y منفی است بعد از جذر علامت منفی می‌گیرد.

$$\frac{-10/8}{-y}+\frac{22/5}{-(y-0/5)}=V_0$$

$$\frac{-10/8(y-0/5)+22/5y}{y(y-0/5)}=V_0$$

$$\Rightarrow V_0y^2+(11/7-0/5V_0)y+5/4=0$$

شرط وجود جواب این است که $\Delta\geq0$ باشد.

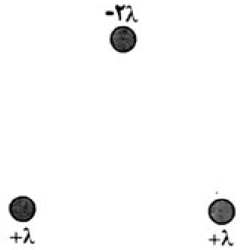
$$(11/7-0/5V_0)^2-4V_0(5/4)=0$$

$$\Rightarrow 0/25V_0^2-33/3V_0+136/89=0$$

$$\Rightarrow V_0=128/94\,V\ ,\ 4/26\,V$$

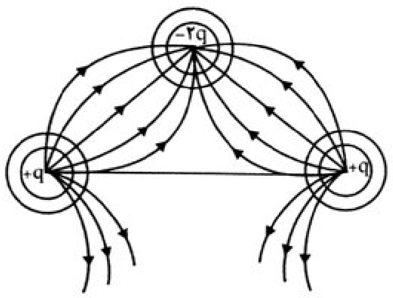
حداقل پتانسیل لازم $4/26\,V$ می‌باشد.

۱۱۶- در شکل ۲۰-۷۳، سه خط بار موازی و بلند، با چگالیهای بار خطی نشان داده شده، در هر دو جهت به طور عمود بر صفحه امتداد دارند. چند خط میدان الکتریکی را رسم کنید؛ همچنین مقطع چند سطح هم پتانسیل را در صفحهٔ شکل رسم کنید.



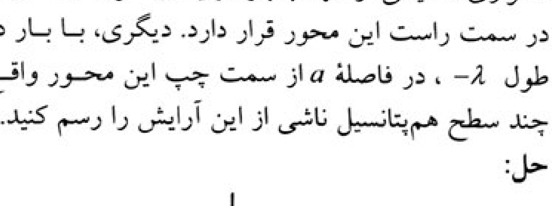
شکل ۲۰-۷۳ مسئلهٔ ۱۱۶

حل:



۱۱۷- دو خط بار نامتناهی در یک صفحه قرار دارند و با محور z موازی‌اند. یکی از آنها، با بار در یکای طول $+\lambda$، به فاصلهٔ a در سمت راست این محور قرار دارد. دیگری، با بار در یکای طول $-\lambda$، در فاصلهٔ a از سمت چپ این محور واقع است. چند سطح هم‌پتانسیل ناشی از این آرایش را رسم کنید.

حل:



۱۱۸- در سال ۱۹۱۱، ارنست راترفورد مدل اتم را به صورت نقطه‌ای با بار مثبت Ze که توسط بار منفی $-Ze$ که به طور یکنواخت روی کره‌ای به شعاع R به مرکز واقع در آن نقطه توزیع شده است درنظر گرفت. در فاصلهٔ r داخل کره میدان الکتریکی عبارت است از

$$E=\frac{ze}{4\pi}\left(\frac{1}{r^2}-\frac{r}{R^3}\right)$$

او همچنین پتانسیل الکتریکی را به صورت زیر به دست آورد

$$V = \frac{ze}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{1}{r} - \frac{3}{2R} + \frac{r^2}{2R^3}\right)$$

(الف) نشان دهید که چگونه عبارت میدان الکتریکی از عبارت بالا برای V به دست می‌آید؟ (ب) چرا عبارت V ، وقتی $r \to \infty$ میل می‌کند، صفر نمی‌شود؟

حل:

$$V = \frac{ze}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{1}{r} - \frac{3}{2R} + \frac{r^2}{2R^3}\right)$$

(الف)

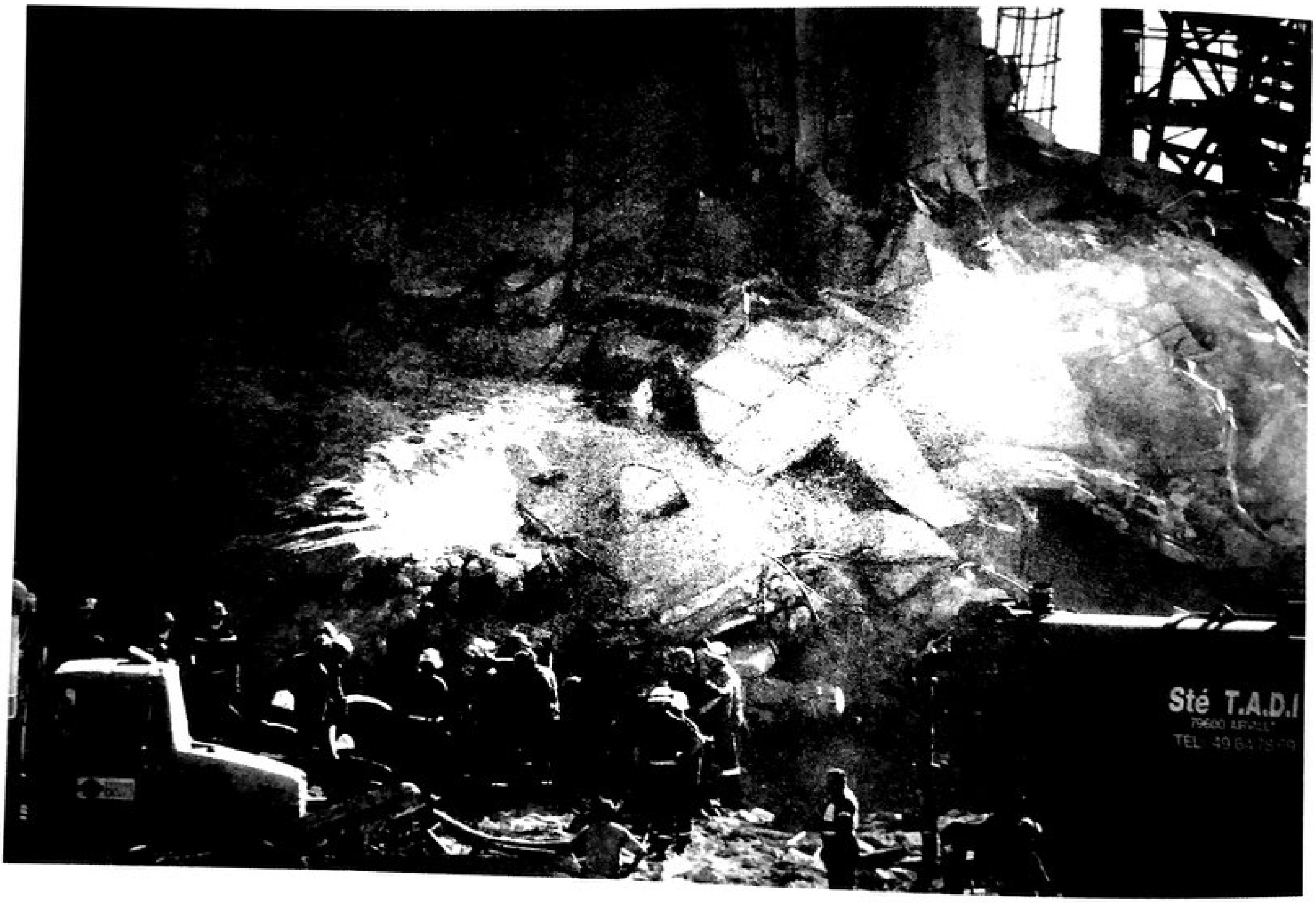
$$E(r) = -\frac{dV}{dr} = -\frac{ze}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{d}{dr}r^{-1} + 0 + \frac{1}{2R^3}\frac{d}{dr}r^2\right) \Rightarrow$$

$$E(r) = \frac{ze}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{1}{r^2} - \frac{r}{R^3}\right)$$

(ب) توجه کنید که این پتانسیل به ازای $r=R$ صفر می‌شود. زیرا نقطه صفر برای پتانسیل این دستگاه دلخواه است. بنابراین مبدأ را در سطح اتم در نظر گرفته‌ایم نه در بی‌نهایت. دلیل دوم این است که این پتانسیل برای نقاط داخل اتم $(r < R)$ صادق است.

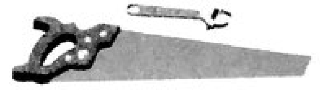
۲۱

ظرفیت



بخش ۲۱-۲ ظرفیت

●۱- دو جسم فلزی شکل ۲۱-۲۵ دارای بارهای خالص +۷۰pC و -۷۰pC هستند که منجر به اختلاف پتانسیل ۲۰V بین آنها می‌شود. (الف) ظرفیت این دستگاه چقدر است؟ (ب) اگر بارها به +۲۰۰pC و -۲۰۰pC تغییر داده شوند، این ظرفیت چقدر می‌شود؟ (پ) اختلاف پتانسیل چقدر می‌شود؟



شکل ۲۱-۲۵ مسئلهٔ ۱

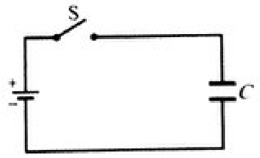
حل: (الف) ظرفیت دستگاه برابر است با:

$$C=\frac{q}{\Delta V}=\frac{۷۰}{۲۰}=۳/۵\ \text{pF}$$

(ب) ظرفیت مستقل از بار و اختلاف پتانسیل است، بنابراین ظرفیت تغییر نخواهد کرد.

(پ)
$$\Delta V=\frac{q}{C}=\frac{۲۰۰}{۳/۵}=۵۷/۱۴\text{V}$$

●۲- خازن شکل ۲۱-۲۶ دارای ظرفیت $۲۵\mu F$ و در ابتدا بدون بار است. باتری اختلاف پتانسیل ۱۲۰V را فراهم می‌کند. پس از آنکه کلید S بسته شود، چقدر بار از آن خواهد گذشت؟

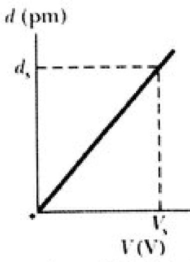


شکل ۲۱-۲۶ مسئلهٔ ۲

حل:
$$q=CV=(۲۵\times۱۰^{-۶})(۱۲۰)=۳\times۱۰^{-۳}\ \text{C}$$

بخش ۲۱-۳ محاسبه ظرفیت

۳- اگر خازن تخت (صفحه- موازی) بدون باری (با ظرفیت C) به باتری وصل شود، براثر حرکت الکترونها به روی صفحه (مساحت A) یک صفحه بار منفی پیدا می‌کند. در شکل ۲۱-۲۷، عمق d که الکترونها از صفحه خارج می‌شوند در یک خازن نوعی برحسب گسترهٔ مقدارهایی برای اختلاف پتانسیل V باتری رسم شده است. مقیاس قائم با $d_s=۱/۰۰\text{pm}$ و مقیاس افقی با $V_s=۲۰/۰V$ مشخص شده است. نسبت C/A چقدر است؟



شکل ۲۱-۲۷ مسئلهٔ ۳

حل: حجم ناحیه‌ای که الکترون‌های آن روی سطح قرار می‌گیرد برابر است با $V=Ad$ و اگر n چگالی الکترون‌های رسانا باشد، داریم

$$N=nV=nAd \quad \text{و} \quad q=Ne=nAde$$

$$C=\frac{q}{V_\circ}=\frac{nAde}{V_\circ}$$

و

$$\frac{C}{A}=\frac{nde}{V_\circ}=\frac{(۸/۵\times۱۰^{۲۸})(۱\times۱۰^{-۱۲})(۱/۶\times۱۰^{-۱۹})}{۲۰}$$
$$=۶/۸\times۱۰^{-۴}\ \text{F/m}^۲$$

●۴- می‌خواهیم با دو صفحهٔ تخت فلزی، هر یک به مساحت $۱/۰۰\text{m}^۲$، یک خازن تخت بسازیم. (الف) اگر ظرفیت این خازن ۱/۰۰F باشد، فاصلهٔ میان صفحه‌های آن باید چقدر باشد؟ (ب) آیا در عمل، این خازن را می‌توان ساخت؟

حل: (الف) با توجه به رابطه $C=\frac{\varepsilon_\circ A}{d}$ داریم:

$$d=\frac{\varepsilon_\circ A}{C}=\frac{(۸/۸۵\times۱۰^{-۱۲})(۱)}{۱}=۸/۸۵\times۱۰^{-۱۲}\ \text{m}$$

(ب) با توجه به مقدار d که حتی کوچکتر از اندازه یک اتم است، امکان ساخت وجود ندارد.

●۵- یک خازن تخت دارای صفحه‌هایی دایره‌ای به شعاع ۸/۲۰cm، و فاصلهٔ صفحه‌های آن ۱/۳۰cm است. (الف) ظرفیت این خازن را محاسبه کنید. (ب) اگر اختلاف پتانسیل ۱۲۰V بین صفحه‌ها اعمال شده باشد، چقدر بار روی صفحه‌ها ظاهر می‌شود؟ SSM

حل: (الف)

$$C=\frac{\varepsilon_\circ A}{d}=\frac{\varepsilon_\circ \pi R^۲}{d}=\frac{(۸/۸۵\times۱۰^{-۱۲})(۳/۱۴)(۰/۰۸۲)^۲}{۰/۰۰۱۳}$$
$$=۱/۴۴\times۱۰^{-۱۰}\ \text{F}$$

(ب)
$$q=CV=(۱/۴۴\times۱۰^{-۱۰})(۱۲۰)=۱/۷۳\times۱۰^{-۸}\ \text{C}$$

●۶- شعاعهای صفحه‌های یک خازن کروی ۳۸/۰mm و ۴۰/۰mm است. (الف) ظرفیت این خازن را محاسبه کنید. (ب) مساحت صفحهٔ یک خازن تخت با همان فاصلهٔ صفحه‌ها و همان ظرفیت، باید چقدر باشد؟

حل (الف) برای خازن کروی داریم:

$$C=\frac{۴\pi\varepsilon_\circ ab}{b-a}=\frac{ab}{k(b-a)}$$
$$=\frac{(۴۰)(۳۸)}{(۹\times۱۰^۹)(۴۰-۳۸)}=۸/۴۵\times۱۰^{-۱۱}\ \text{F}$$

(ب) برای خازن تخت- موازی داریم:

$$C=\frac{\varepsilon_\circ A}{d}=\frac{\varepsilon_\circ A}{b-a}$$

$$۸/۴۵\times۱۰^{-۱۱}=\frac{(۸/۸۵\times۱۰^{-۱۲})A}{۲\times۱۰^{-۳}}\Rightarrow A=۱/۹\times۱۰^{-۲}\ \text{m}^۲$$

۷●- فرض کنید یک قطرهٔ جیوه، کره‌ای منزوی است. ظرفیت خازنی که از ترکیب دو قطره هر یک به شعاع $R=2.00\,mm$ حاصل می‌شود چقدر است؟ SSM

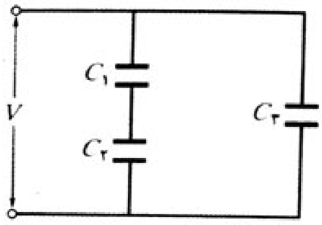
حل: پس از جمع شدن دو قطره، حجم کرهٔ حاصل دوبرابر حجم هر قطر می‌شود.

$$V'=2V \Rightarrow \frac{4}{3}\pi R'^3=(2)\left(\frac{4}{3}\pi R^3\right)\Rightarrow R'=(2)^{1/3}R$$

$$C'=4\pi\varepsilon_0 R'=(4)(3.14)(8.85\times10^{-12})(2)^{1/3}(2\times10^{-3})$$
$$=2.8\times10^{-13}\ F$$

بخش ۲۱-۴ خازنهای موازی و متوالی

۸●- در شکل ۲۱-۲۸، ظرفیت معادل ترکیب را پیدا کنید. فرض کنید C_1 برابر $10.0\,\mu F$، C_2 برابر $5.00\,\mu F$ و $C_3=4.00\,\mu F$ است.

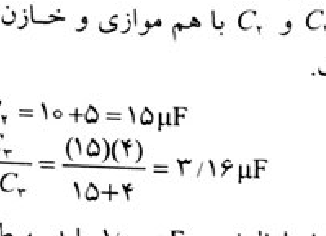


شکل ۲۱-۲۸ مسئله‌های ۸ و ۳۶

حل: خازنهای C_1 و C_2 با هم متوالی و خازن معادل آنها با خازن C_3 موازی است.

$$C_{12}=\frac{C_1C_2}{C_1+C_2}=\frac{(10)(5)}{15}=3.33\,\mu F$$
$$C_{eq}=C_{12}+C_3=3.33+4=7.33\,\mu F$$

۹●- در شکل ۲۱-۲۹، ظرفیت معادل ترکیب را پیدا کنید. فرض کنید $C_1=10.0\,\mu F$، $C_2=5.00\,\mu F$ و $C_3=4.00\,\mu F$. ILW



شکل ۲۱-۲۹ مسئله‌های ۹، ۱۳، و ۳۴

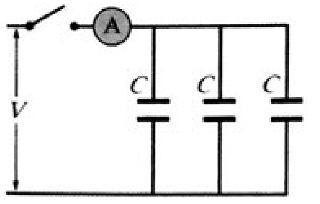
حل: خازنهای C_1 و C_2 با هم موازی و خازن معادل آنها با C_3 متوالی است.

$$C_{12}=C_1+C_2=10+5=15\,\mu F$$
$$C_{eg}=\frac{C_{12}C_3}{C_{12}+C_3}=\frac{(15)(4)}{15+4}=3.16\,\mu F$$

۱۰●- چند خازن با ظرفیت $1.00\,\mu F$ باید به طور موازی بسته شوند تا به ازای اختلاف پتانسیل ۱۱۰V در دو سرخازنها، بار ۱/۰۰C در آن ذخیره شود؟ SSM

حل:
$$C_{eq}=\frac{q}{V}=\frac{1}{110}=9\times10^{-3}\ F$$
عدد $C_{eq}=nC\Rightarrow 9.1\times10^{-3}=n\,(1\times10^{-6})\Rightarrow n=9100$

۱۱●- هر یک از خازنهای بدون بار شکل ۲۱-۳۰ دارای ظرفیت $25.0\,\mu F$ است. وقتی کلید بسته شود، اختلاف پتانسیل $V=4200\,V$ برقرار می‌گردد. چند کولن بار از سنجهٔ A می‌گذرد؟



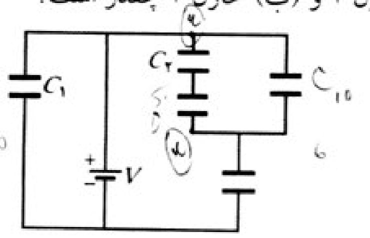
شکل ۲۱-۳۰ مسئلهٔ ۱۱

حل: سه خازن پس از بستن کلید به صورت موازی‌اند لذا داریم:

$$C_{eq}=C_1+C_2+C_3=3C=75\,\mu F$$
$$q=C_{eq}V=(75\times10^{-6})(4200)=0.315$$

همین بار از سنجه A می‌گذرد.

۱۲●●- در شکل ۲۱-۳۱، اختلاف پتانسیل باتری ۱۰V و ظرفیت هر یک از پنج خازن برابر با $10.0\,\mu F$ است. بار روی (الف) خازن ۱ و (ب) خازن ۲ چقدر است؟



شکل ۲۱-۳۱ مسئلهٔ ۱۲

حل: (الف) $q_1=C_1V_1=(10\times10^{-6})(10)=1\times10^{-4}\ C$

(ب) برای خازنهای سمت راست داریم:

$$C_{eq}=\frac{CC'}{C+C'}$$

که در آن C' برابر است با:

$$C'=C+\frac{CC}{C+C}=\frac{3}{2}C$$

لذا خواهیم داشت:

$$C_{eq}=\frac{C\left(\frac{3}{2}C\right)}{C+\frac{3}{2}C}=\frac{3}{5}C=\left(\frac{3}{5}\right)(10)=6\mu F$$

در نتیجه می‌توان بار کلی عبوری از خازن معادل را به دست آورد:

$$q_{eq}=C_{eq}V=(6\times10^{-6})(10)=6\times10^{-5}\ C$$

حال توجه خود را به مجموعهٔ خازن سه‌تایی بالا (سمت راست) با ظرفیت معادل C' متمرکز می‌کنیم.
اختلاف پتانسیل دو سر آن برابر است با:

$$V'=\frac{q_{eq}}{C'}=\frac{6\times10^{-5}}{\left(\frac{3}{2}\right)(10\times10^{-6})}=4\ V$$

در نتیجه بار روی شاخه سمت چپ این مجموعه و از جمله C_3 برابر است با:

$$q_3 = \left(\frac{C}{2}\right)V' = (5)(4) = 20\,\mu F$$

۱۳●●– در شکل ۲۱-۲۹، اختلاف پتانسیل $V = 100/0\,V$ به دو سر یک آرایش خازنی با ظرفیتهای $C_1 = 10/0\,\mu F$، $C_2 = 5/00\,\mu F$، و $C_3 = 4/00\,\mu F$ اعمال شده است. اگر خازن ۳ فروشکست الکتریکی پیدا کند، به گونه‌ای که معادل یک سیم رسانا شود، (الف) بار روی خازن ۱ و (ب) اختلاف پتانسیل دو سر خازن ۱، چقدر افزایش می‌یابد؟ GO

حل: پیش از فرو شکست الکتریکی خازن C_3، در حل مسئله ۹ ظرفیت معادل مدار را برابر با $C_{eq} = 3/16\,\mu F$ به دست آوردیم و در نتیجه بار کل در این حالت برابر است با:

$$q = C_{eq}V = (3/16)(100) = 316\,\mu C$$

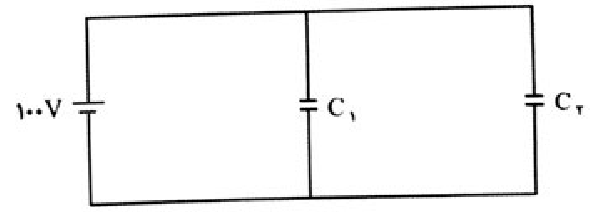
همچنین اختلاف پتانسیل دو سر C_1 و C_2 با هم برابرند و داریم:

$$V_1 = V_2 = \frac{q}{C_1 + C_2} = \frac{316}{15} = 21/1\,V$$

و

$$q_1 = C_1V_1 = (10)(21/1) = 211\,\mu C$$

حال پس از خرابی خازن C_3 و اتصال کوتاه شدن آن مدار زیر حاصل می‌شود.



لذا داریم $V_1' = V_2' = 100$.

(الف) $q_1' = C_1V_1' = (10)(100) = 1000\,\mu C$

$\Delta q_1 = q_1' - q_1 = 1000 - 211 = 789\,\mu C$

(ب) $\Delta V_1 = V_1' - V_1 = 100 - 21/1 = 78/9\,V$

۱۴●●– دو خازن تخت، هریک با ظرفیت $6/0\,\mu F$، به طور موازی به یک باتری ۱۰ ولتی بسته شده‌اند. سپس فاصلهٔ صفحه‌های یکی از این دو خازن نصف می‌شود. بر اثر این کم شدن فاصله (الف) چقدر بار اضافی توسط باتری به خازنها منتقل می‌شود؟ و (ب) افزایش بار خالص ذخیره شده در خازنها چقدر است؟

حل: با توجه به اینکه باتری از مدار خارج نشده، همواره اختلاف پتانسیل دو سر خازنهای ثابت می‌ماند و چون ظرفیتها نیز یکسان است، داریم:

$$q_1 = q_2 = C_1V = (6)(10) = 60\,\mu F$$

و بار کل برابر است با $q_{کل} = 120\,\mu C$.

وقتی فاصلهٔ بین دو خازن نصف می‌شود، ظرفیت آن دو برابر می‌گردد، در نتیجه داریم:

$$q_1' = C_1'V = (12)(10) = 120\,\mu C$$

و بار کل در این حالت برابر است با:

$$q'_{کل} = 60 + 120 = 180\,\mu F$$

(الف) $\Delta q = 180 - 120 = 60\,\mu F$

(ب) $\Delta q_1 = q_1' - q_1 = 120 - 60 = 60\,\mu F$

۱۵●●– خازنی با ظرفیت 100pF تا اختلاف پتانسیل 50V باردار و سپس باتری بادار کننده برداشته می‌شود. حال این خازن را به طور موازی به خازن دیگری (که در ابتدا بدون بار است) متصل می‌کنیم. اگر اختلاف پتانسیل دو سرخازن اول تا 35V افت کند، ظرفیت خازن دوم چقدر است؟ ILW SSM

حل: بار اولیهٔ خازن اول برابر است با

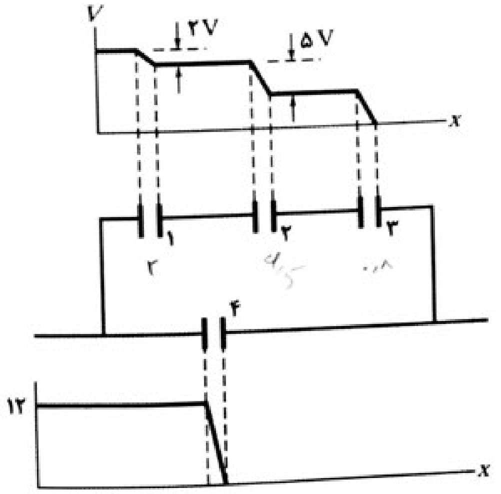
$$q = C_1V = (100\times10^{-12})(50) = 5\times10^{-9}\,C$$

وقتی این خازن به طور موازی به یک خازن بی‌بار بسته می‌شود، طبق پایستگی بار، بار اولیه بین دو خازن تقسیم می‌شود.

$$q = C_1V + C_2V = (C_1 + C_2)V$$

$$5\times10^{-9} = (100 + C_2)(35) \Rightarrow C_2 = 43\,pF$$

۱۶– شکل ۲۱-۳۲ بخشی از مدار مربوط به چهار خازن پر شده از هوا را که به مدار بزرگتری متصل شده است، نشان می‌دهد. نمودار زیر این بخش، پتانسیل الکتریکی $V(x)$ را برحسب تابعی از مکان x روی قسمت پایینتر این بخش، عبوری از خازن ۴، نشان می‌دهد. به همین ترتیب، نمودار بالای این بخش، پتانسیل الکتریکی $V(x)$ را برحسب تابعی از مکان x روی قسمت بالاتر این بخش، عبوری از خازنهای ۱، ۲، ۳، نشان می‌دهد. ظرفیت خازن ۳ برابر با $0/80\,\mu F$ است. ظرفیتهای (الف) خازن ۱ و (ب) خازن ۲ چقدر است؟



شکل ۲۱-۳۲ مسئلهٔ ۱۶

حل:

$$V_4 = V_1 + V_2 + V_3$$

$$12 = 2 + 5 + V_3 \Rightarrow V_3 = 5\,V$$

لذا بار روی این خازن برابر است با

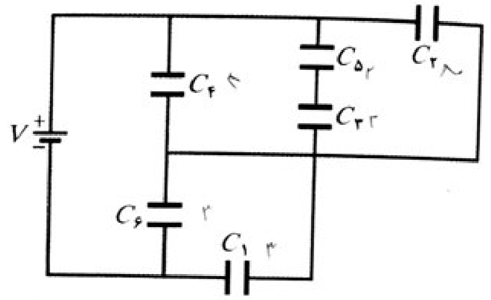
$$q_3 = C_3V_3 = (0/8\,\mu F)(5) = 4\,\mu C$$

(الف) چون خازنهای C_1، C_2 و C_3 متوالی‌اند بار روی آنها یکسان است، لذا $q_1 = q_2 = q_3 = ۴\mu C$ و در نتیجه داریم:

$$C_1 = \frac{q_1}{V_1} = \frac{۴}{۲} = ۲\mu C$$

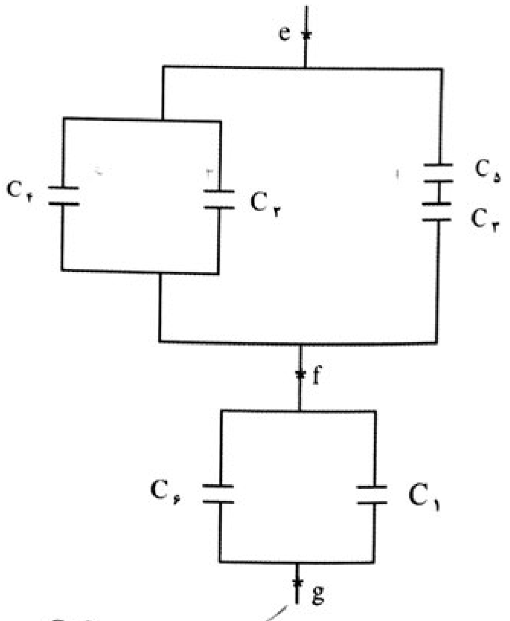
(ب)
$$C_2 = \frac{q_2}{V_2} = \frac{۴}{۵} = ۰/۸\ \mu C$$

۱۷●●- در شکل ۲۱-۳۳، یک باتری ۲۰ ولتی به دو سر خازنهایی به ظرفیتهای $C_1 = C_6 = ۳/۰۰\,\mu F$ و $C_3 = C_5 = ۲/۰۰ C_4 = ۴/۰۰\,\mu F$، بسته شده است. (الف) ظرفیت معادل C_{eq} خازنها و (ب) بار ذخیره شده توسط C_{eq} چقدر است؟ (پ) V_1 و(ت) q_1 خازن ۱، (ث) V_2 و (ج) q_2 خازن ۲، (چ) V_3 و (ح) q_3 خازن ۳ چقدر است؟ GO



شکل ۲۱-۳۳ مسئلهٔ ۱۷

حل: (الف)



(الف)
$$C_{35} = \frac{C_3C_5}{C_3 + C_5} = ۲\mu F$$
$$C_{ef} = ۲ + ۲ + ۲ = ۶\mu F$$
$$C_{fg} = C_{16} = ۳ + ۳ = ۶\mu F$$
$$C_{eq} = \frac{C_{ef}C_{fg}}{C_{eq} + C_{fg}} = ۳\mu F$$

(ب)
$$q_{eq} = C_{eq}V = (۳)(۲۰) = ۶۰\mu C$$

(پ)
$$V_1 = V_{fg} = \frac{q_{eq}}{C_{16}} = \frac{۶۰}{۶} = ۱۰\ V$$

(ت)
$$q_1 = C_1V_1 = (۳)(۱۰) = ۳۰\mu C$$

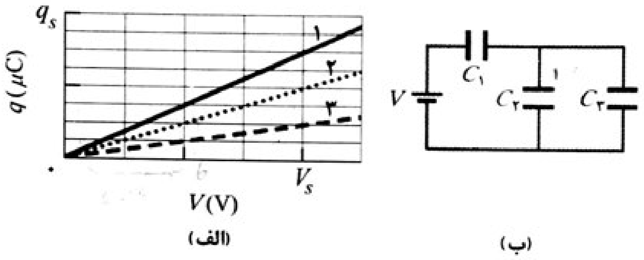
(ث)
$$V_2 = V_{ef} = \frac{q_{eq}}{C_{ef}} = \frac{۶۰}{۶} = ۱۰\ V$$

(ج)
$$q_2 = C_2V_2 = (۲)(۱۰) = ۲۰\mu C$$

(چ)
$$V_3 = \frac{۱}{۲}V_{ef} = ۵V$$

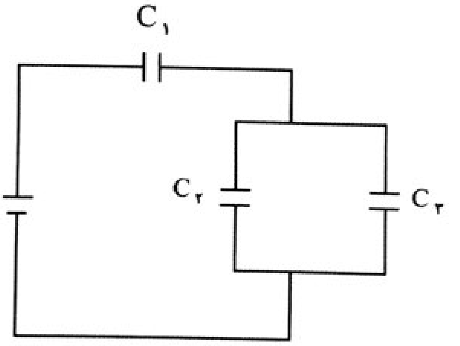
(ح)
$$q_3 = C_3V_3 = (۴)(۵) = ۲۰\mu C$$

۱۸●●- نمودار ۱ در شکل ۲۱-۳۴ الف، بار q را که می‌تواند در خازن ۱ ذخیره شود برحسب پتانسیل الکتریکی V برقرار شده در دو سر آن، به دست می‌دهد. مقیاس قائم با $q_s = ۱۶/۰\,\mu C$ و مقیاس افقی با $V_s = ۲/۰\,V$ مشخص شده است. نمودارهای ۲ و ۳، نمودارهای مشابهی به ترتیب برای خازنهای ۲ و ۳ هستند. شکل ۲۱-۳۴ ب مداری با این سه خازن و یک باتری ۶/۰V را نشان می‌دهد. چه باری در خازن ۲ در این مدار ذخیره شده است؟



شکل ۲۱-۳۴ مسئلهٔ ۱۸

حل: ظرفیت هر خازن را می‌توان با استفاده از شیب منحنی‌های داده شده به دست آورید.

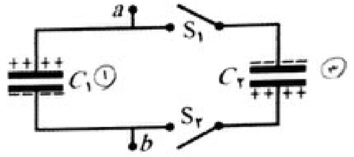


$$C_1 = \frac{\Delta q_1}{\Delta V_1} = \frac{۱۲}{۲} = ۶\mu F$$
$$C_2 = \frac{\Delta q_2}{\Delta V_2} = \frac{۸}{۲} = ۴\mu F$$
$$C_3 = \frac{\Delta q_3}{\Delta V_3} = \frac{۴}{۲} = ۲\mu F$$
$$C_{23} = C_2 + C_3 = ۴ + ۲ = ۶\mu F$$
$$C_{eq} = \frac{C_1C_{23}}{C_1 + C_{23}} = ۳\mu F$$
$$q_{eq} = q_1 = q_{23} = C_{eq}V$$
$$q_{23} = (۳)(۶) = ۱۸\ \mu F$$

$V_2 = V_{23} = \frac{q_{23}}{C_{23}} = \frac{18}{6} = 3\,V$

$q_2 = C_2V_2 = (4)(3) = 12\,\mu F$

●●۱۹- در شکل ۲۱-۳۵، ظرفیتها عبارت‌اند از $C_1 = 1/0\,\mu F$ و $C_2 = 3/0\,\mu F$، و هر دو خازن تا اختلاف پتانسیل $V = 100\,V$، ولی به ترتیبی که نشان داده شده است با قطبیدگی مخالف، باردار شده‌اند. کلیدهای S_1 و S_2 بسته می‌شوند. (الف) اکنون اختلاف پتانسیل میان نقطه‌های a و b چقدر است؟ در این موقع بار روی خازن (ب) ۱ و (پ) ۲ چقدر است؟ WWW SSM



شکل ۲۱-۳۵ مسئلهٔ ۱۹

حل: بار هر خازن پیش از اتصال کلیدها برابر است با

$q_1 = C_1V_1 = (1)(100) = 100\,\mu F$

$q_2 = C_2V_2 = (3)(100) = 300\,\mu F$

پس از اتصال کلیدها بار خنثی نشده برابر است با

$q = q_2 - q_1 = 300 - 100 = 200\,\mu F$

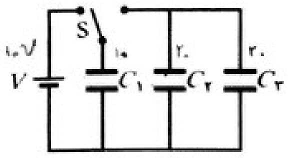
(الف) پس از اتصال کلیدها، دو خازن داریم که به صورت موازی بسته شده‌اند.

$V_{ab} = \frac{q}{C_1 + C_2} = \frac{200}{1+3} = 50\,V$

(ب) $q_1' = C_1V_{ab} = (1)(50) = 50\,\mu C$

(پ) $q_2' = C_2V_{ab} = (3)(50) = 150\,\mu C$

۲۰- در شکل ۲۱-۳۶، $V = 10\,V$، $C_1 = 10\,\mu F$، و $C_2 = C_3 = 20\,\mu F$ است. کلید S نخست به طرف چپ زده می‌شود تا خازن ۱ به وضعیت تعادل برسد. سپس کلید به طرف راست زده می‌شود. وقتی وضعیت تعادل دوباره به دست آید، چقدر بار روی خازن ۱ است؟



شکل ۲۱-۳۶ مسئلهٔ ۲۰

حل: در حالتی که کلید s به طرف چپ زده شده و خازن C_1 به تعادل می‌رسد، داریم:

$Q = C_1V = (10)(10) = 100\,\mu C$

پس از آنکه کلید به سمت راست زده می‌شود بار Q بین خازنها تقسیم می‌شود (پایستگی بار)

$Q = q_1 + q_2 + q_3$

چون $C_2 = C_3$ است لذا $q_2 = q_3$ خواهد بود. خازنها موازی‌اند در نتیجه می‌توان نوشت

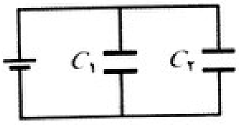
$\frac{q_1}{C_1} = \frac{q_2}{C_2} \Rightarrow \frac{q_1}{10} = \frac{q_2}{20} \Rightarrow q_1 = \frac{1}{2}q_2$

$Q = \frac{1}{2}q_2 + q_2 + q_2 = \frac{5}{2}q_2 \Rightarrow 100 = \frac{5}{2}q_2$

$\Rightarrow 100 = \frac{5}{2}q_2 \Rightarrow q_2 = 40\,\mu C$

و در نتیجه $C_1 = 20\,\mu C$ است.

●●۲۱- در شکل ۲۱-۳۷، دو خازن تخت (با هوا در میان صفحه‌های آن) به یک باتری وصل شده است. خازن ۱ دارای مساحت صفحهٔ $1/5\,cm^2$ و یک میدان الکتریکی (میان صفحه‌های آن) به بزرگی $2000\,V/m$ است. خازن ۲ دارای مساحت صفحهٔ $0/70\,cm^2$ و یک میدان الکتریکی به بزرگی $1500\,V/m$ است. بار کل روی دو خازن چقدر است؟



شکل ۲۱-۳۷ مسئلهٔ ۲۱

حل:

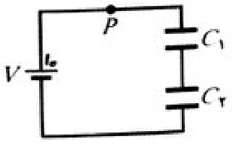
$E_1 = \frac{V}{d_1} \Rightarrow d_1 = VE_1 \quad , \quad d_2 = VE_2$

$C_1 = \varepsilon_0\frac{A_1}{d_1} = \varepsilon_0\frac{A_1}{VE_1} \quad , \quad C_2 = \varepsilon_0\frac{A_2}{d_2} = \varepsilon_0\frac{A_2}{VE_2}$

$C_{eq} = C_1 + C_2 = \frac{\varepsilon_0}{V}\left(\frac{A_1}{E_1} + \frac{A_2}{E_2}\right)$

$q = C_{eq}V = \varepsilon_0\left(\frac{A_1}{E_1} + \frac{A_2}{E_2}\right) \Rightarrow q = 3/58\times10^{-12}\,C$

●●۲۲- شکل ۲۱-۳۸ دو خازن استوانه‌ای پر از هوا را نشان می‌دهد که به طور متوالی به دو سر یک باتری با پتانسیل $V = 10\,V$ بسته شده‌اند. خازن ۱ دارای یک صفحهٔ داخلی به شعاع $5/0\,mm$، یک صفحهٔ خارجی به شعاع $1/5\,cm$، و طول $5/0\,cm$ است. خازن ۲ دارای یک صفحهٔ داخلی به شعاع $2/5\,mm$، یک صفحهٔ خارجی به شعاع $1/0\,cm$، و طول $9/0\,cm$ است. صفحهٔ خارجی خازن ۲ از جنس یک غشاء آلی رساناست که می‌تواند کشیده شود، و بدین ترتیب با زیاد شدن فاصلهٔ صفحه‌ها، ظرفیت این خازن افزایش می‌یابد. اگر براثر کش آمدن، شعاع صفحهٔ خارجی تا $2/5\,cm$ افزایش یابد (الف) چه تعداد الکترون از نقطهٔ P می‌گذرند و (ب) آیا آنها به سوی باتری حرکت می‌کنند یا در جهت دورشدن از آن؟



شکل ۲۱-۳۸ مسئلهٔ ۲۲

حل: ابتدا ظرفیت هر خازن را با استفاده از رابطه ظرفیت خازن استوانه‌ای به دست آورده، سپس ظرفیت معادل آنها و بار کل را پیش و پس از کشیده شدن خازن ۲ را محاسبه می‌کنیم.

$$C_۱ = \frac{۲\pi\varepsilon_۰ L_۱}{Ln\frac{b_۱}{a_۱}} = \frac{۲(۳/۱۴)(۸/۸۵\times ۱۰^{-۱۲})(۵\times ۱۰^{-۲})}{Ln\left(\frac{۱۵}{۵}\right)} = ۲/۵۳\times ۱۰^{-۱۲}\ \text{F}$$

$$C_۲ = \frac{۲\pi\varepsilon_۰ L_۲}{Ln\frac{b_۲}{a_۲}} = ۳/۶۱\times ۱۰^{-۱۲}\ \text{F}$$

$$C_{eq} = \frac{C_۱C_۲}{C_۱+C_۲} = \frac{(۲/۵۳\times ۱۰^{-۱۲})(۳/۶۱\times ۱۰^{-۱۲})}{(۲/۵۳+۳/۶۱)\times ۱۰^{-۱۲}} = ۱/۴۹\times ۱۰^{-۱۲}\ \text{F}$$

$$q = C_{eq}V = (۱/۴۹\times ۱۰^{-۱۲})(۱۰) = ۱۴/۹\times ۱۰^{-۱۲}\ \text{C}$$

پس از کشیدن خازن ۲ نیز داریم:

$$C'_۲ = \frac{۲\pi\varepsilon_۰ L_۲}{Ln\left(\frac{b'_۲}{a_۲}\right)} = ۲/۱۷\times ۱۰^{-۱۲}\ \text{F}$$

$$C'_{eq} = \frac{C_۱C'_۲}{C_۱+C'_۲} = ۱/۱۷\times ۱۰^{-۱۲}\ \text{F}$$

$$q' = C'_{eq}V = (۱/۱۷\times ۱۰^{-۱۲})(۱۰) = ۱۱/۷\times ۱۰^{-۱۲}\ \text{C}$$

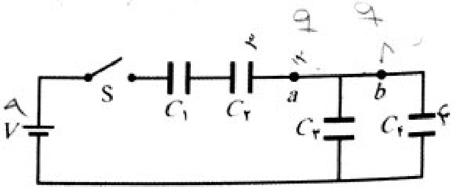
(الف)

$$\Delta q = q' - q = ۱۱/۷\times ۱۰^{-۱۲} - ۱۴/۹\times ۱۰^{-۱۲} = -۳/۲\times ۱۰^{-۱۲}\ \text{C}$$

$$n = \frac{\Delta q}{e} = \frac{۳/۲\times ۱۰^{-۱۲}}{۱/۶\times ۱۰^{-۱۹}} = ۲\times ۱۰^{۷}$$ عدد

(ب) با توجه به اینکه Δq منفی است لذا همین مقدار بار مثبت از نقطه p به سمت باتری می‌روند. یعنی تعداد n الکترون از باتری حرکت کرده و به طرف سمت راست نقطه P می‌روند.

●۲۳●●-در شکل ۲۱-۳۹، باتری دارای اختلاف پتانسیل $V = ۹/۰\text{V}$، $C_۲ = ۳/۰\mu\text{F}$، $C_۴ = ۴/۰\mu\text{F}$، و همهٔ خازنها در ابتدا بدون بارند. وقتی کلید S بسته شود، بار کل $۱۲\mu\text{C}$ از نقطهٔ a و بار کل $۸/۰\mu\text{C}$ از نقطهٔ b عبور می‌کند. (الف) $C_۱$ و (ب) $C_۳$ چقدر است؟



شکل ۲۱-۳۹ مسئلهٔ ۲۳

حل: بار روی $C_۴$ برابر $q_۴ = ۸\mu\text{C}$ و در نتیجه اختلاف پتانسیل دو سر آن برابر است با

$$V_۴ = \frac{q_۴}{C_۴} = \frac{۸}{۴} = ۲\text{V}$$

بار روی خازن $C_۳$ نیز برابر است با $q_۳ = ۱۲ - ۸ = ۴\mu\text{C}$ و داریم $V_۳ = V_۴ = ۲V$ در نتیجه $C_۳$ برابر است با

$$C_۳ = \frac{q_۳}{V_۳} = \frac{۴}{۲} = ۲\mu\text{F}$$

برای به دست آوردن $C_۱$، ابتدا ظرفیت معادل را با توجه به بار کل و اختلاف پتانسیل محاسبه می‌کنیم

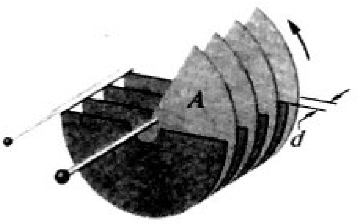
$$C_{eq} = \frac{q_{کل}}{V_{\text{bat}}} = \frac{۱۲}{۹} = \frac{۴}{۳}\mu\text{F}$$

از طرفی می‌توان ظرفیت معادل را از طریق مدار بازنویسی کرد. $C_۳$ و $C_۴$ موازی‌اند و خازن معادل آنها با $C_۱$ و $C_۲$ متوالی‌اند لذا می‌توان نوشت.

$$\frac{۱}{C_{eq}} = \frac{۱}{C_۳+C_۴} + \frac{۱}{C_۲} + \frac{۱}{C_۱}$$

$$\frac{۱}{\frac{۴}{۳}} = \frac{۱}{۲+۴} + \frac{۱}{۳} + \frac{۱}{C_۱} \Rightarrow C_۱ = ۴\mu\text{F}$$

۲۴- شکل ۲۱-۴۰ خازن متغیری «با فاصلهٔ هوا» را نشان می‌دهد که برای میزان کردن دستی رادیوها به کار می‌رود. صفحه‌ها به طور یک درمیان به یکدیگر متصل شده‌اند: یک دسته از صفحه‌ها در مکان خود ثابت‌اند، و دسته‌ای دیگر می‌توانند بچرخند. خازنی با $n = ۸$ صفحه با قطبیت یک در میان، هر یک به مساحت $A = ۱/۲۵\text{cm}^۲$ و فاصلهٔ صفحه‌های مجاور برابر $d = ۳/۴۰\text{mm}$ را در نظر بگیرید. ظرفیت بیشینهٔ این خازن چقدر است؟



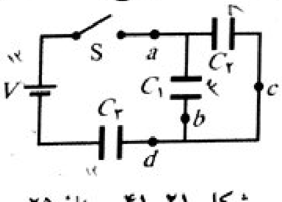
شکل ۲۱-۴۰ مسئلهٔ ۲۴

حل: وقتی که صفحات دقیقاً روبه‌روی هم قرار گیرند ظرفیت بیشینه حاصل می‌شود. در این حالت $(n-۱)$ تک خازن داریم که ظرفیت هر یک $C_۰ = \varepsilon_۰ A/d$ است لذا ظرفیت کل این آرایش خازنی برابر است با

$$C = (n-۱)C_۰ = \frac{(n-۱)\varepsilon_۰ A}{d}$$

$$= \frac{(۸-۱)(۸/۸۵\times ۱۰^{-۱۲})(۱/۲۵\times ۱۰^{-۴})}{۳/۴\times ۱۰^{-۳}} = ۲/۲۸\times ۱۰^{-۱۲}\ \text{F}$$

●●۲۵- خازنها در شکل ۲۱-۴۱ در ابتدا بدون بارند. ظرفیتها عبارت‌اند از: $C_۱ = ۴/۰\mu\text{F}$، $C_۲ = ۸/۰\mu\text{F}$، و $C_۳ = ۱۲\mu\text{F}$ و اختلاف پتانسیل باتری $V = ۱۲\text{V}$ است. وقتی کلید S بسته شود، چه تعداد الکترون از (الف) نقطهٔ a، (ب) نقطهٔ b، (پ) نقطهٔ c، و (ت) نقطهٔ d می‌گذرد؟ در شکل، آیا الکترونها به طرف بالا یا به طرف پایین از (ث) نقطهٔ b و (ج) نقطهٔ c می‌گذرند؟



شکل ۲۱-۴۱ مسئلهٔ ۲۵

حل: ظرفیت معادل کل برابر است با

$$C_{eq} = \frac{C_۳(C_۱+C_۲)}{C_۳+(C_۱+C_۲)} = ۶\mu\text{F}$$

(الف) باری که از نقطه a می‌گذرد برابر است با

$$q_a = q_{eq} = C_{eq}V = (6)(12) = 72\mu C$$

عدد $$n_a = \frac{q_a}{e} = \frac{72\times10^{-6}}{1.6\times10^{-19}} = 4.5\times10^{14}$$

این الکترونها رو به سمت چپ یعنی به سمت قطب مثبت باتری حرکت می‌کنند.

(ب) $$C_{12} = C_1 + C_2 = 4+8 = 12\mu F$$

$$V_{12} = \frac{q_{eq}}{C_{12}} = \frac{72}{12} = 6V$$

این هم اختلاف پتانسیل دو سر C_1 و هم اختلاف پتانسیل دو سر C_2 است. بار روی خازن C_1 برابر است با $q_1 = (4)(6) = 24\mu C$ و تعداد الکترون از رابطه زیر به دست می‌آید:

عدد $$n_b = \frac{q_1}{e} = \frac{24\times10^{-6}}{1.6\times10^{-19}} = 1.5\times10^{14}$$

این الکترون‌ها به سمت بالا حرکت می‌کنند

(پ) $$q_c = C_2V_{12} = (8)(6) = 48\mu C$$

تعداد $$n_C = \frac{q_2}{e} = \frac{48\times10^{-6}}{1.6\times10^{-19}} = 3\times10^{14}$$

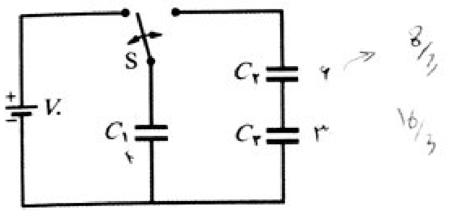
این الکترونها نیز به سمت بالا حرکت می‌کنند.

(ت) چون C_3 با باتری متوالی است، بار عبوری از آن همان بار عبوری از باتری است. در نتیجه تعداد 4.5×10^{14} الکترون رو به سمت راست از نقطه d می‌گذرند.

(ث) همانطور که در قسمت (ب) دیدیم الکترونها رو به بالا حرکت می‌کنند.

(ج) با توجه به قسمت (پ) الکترونها رو به بالا از نقطه C می‌گذرند.

۲۶●●●- شکل ۲۱-۱۸، یک باتری ۱۲ ولتی و سه خازن بدون بار به ظرفیتهای $C_1 = 4.00\mu F$، $C_2 = 6.00\mu F$ و $C_3 = 3.00\mu F$ را نشان می‌دهد. کلید به طرف چپ زده می‌شود تا اینکه خازن ۱ به طور کامل باردار شود. سپس کلید به طرف راست زده می‌شود. بار نهایی روی (الف) خازن ۱، (ب) خازن ۲ و (پ) خازن ۳ چقدر است؟



شکل ۲۱-۱۸ مسئلهٔ ۲۶

حل: $$C_{23} = \frac{C_2C_3}{C_2+C_3} = \frac{(6)(3)}{6+3} = 2\mu F$$

هنگامی که کلید به سمت چپ زده می‌شود خازن C_1 شارژ می‌شود.

$$q_1 = C_1V = (4)(12) = 48\mu F \quad , \quad q_{23} = 0$$

$q = 48\mu F$

وقتی که کلید به سمت راست زده می‌شود باتری از مدار خارج شده و بار q_1 از روی خازن C_1 به خازن C_{23} منتقل شده و هم پتانسیل می‌شوند.

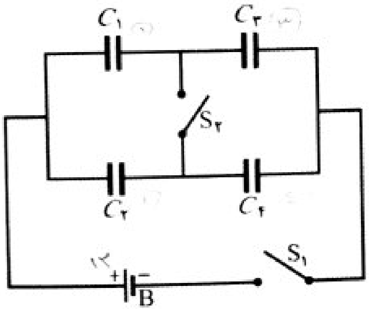
(الف) $$V' = \frac{q_1'}{C_1} = \frac{q_{23}'}{C_{23}} = \frac{q_1}{C_1 + C_{23}}$$

$$\Rightarrow \frac{q_1'}{4} = \frac{48}{4+2} \Rightarrow q_1' = 32\mu C$$

(ب) و (پ) $$\frac{q_{23}'}{2} = \frac{48}{6} \Rightarrow q_{23}' = 16\mu C$$

$$q_2' = q_3' = q_{23}' = 16\mu C$$

۲۷●●●- شکل ۲۱-۴۳ یک باتری ۱۲/۰ ولتی و چهار خازن بدون بار با ظرفیتهای $C_1 = 1.00\mu F$، $C_2 = 2.00\mu F$، $C_3 = 3.00\mu F$، و $C_4 = 4.00\mu F$ را نشان می‌دهد. اگر فقط کلید S_1 بسته شود، بار روی (الف) خازن ۱، (ب) خازن ۲، (پ) خازن ۳، و (ت) خازن ۴ چقدر می‌شود؟ اگر هر دو کلید بسته شوند، بار روی (ث) خازن ۱، (ج) خازن ۲، (چ) خازن ۳، و (ح) خازن ۴ چقدر می‌شود؟



شکل ۲۱-۴۳ مسئلهٔ ۲۷

حل: (الف) وقتی کلید S_2 باز و کلید S_1 بسته باشد، C_1 و C_3 و نیز C_2 و C_4 متوالی و معادل آنها با هم موازی‌اند.

$$C_{13} = \frac{C_1C_3}{C_1+C_3} = \frac{(1)(3)}{1+3} = 0.75\mu F$$

$$q_1 = q_3 = q_{13} = C_{13}V$$

$$q_1 = (0.75)(12) = 9\mu F$$

(ب) $$C_{24} = \frac{C_2C_4}{C_2+C_4} = \frac{(2)(4)}{2+4} = \frac{4}{3}\mu F$$

$$q_2 = q_4 = q_{24} = C_{24}V$$

$$q_2 = \left(\frac{4}{3}\right)(12) = 16\mu C$$

(پ) $$q_3 = q_1 = 9\mu F$$

(ت) $$q_4 = q_2 = 16\mu F$$

(ث) و (ج) حال اگر کلید S_2 را ببندیم، خازنهای C_1 و C_2 موازی وهمچنین خازنهای C_3 و C_4 موازی و نتیجه آنها با هم متوالی می‌گردند. در اینصورت داریم:

$$C_{12} = C_1 + C_2 = 3\mu F$$

$$C_{34} = C_3 + C_4 = 7\mu F$$

$$C_{eq} = \frac{C_{۱۲}C_{۳۴}}{C_{۱۲}+C_{۳۴}} = \frac{(۳)(۷)}{۳+۷} = ۲/۱\ \mu F$$

$$q_{eq} = q_{۱۲} = q_{۳۴} = C_{eq}V = (۲/۱)(۱۲) = ۲۵/۲\ \mu C$$

$$V_۱ = V_۲ = \frac{q_{۱۲}}{C_{۱۲}} = \frac{۲۵/۲}{۳} = ۸/۴V$$

$$q_۱ = C_۱V_۱ = (۱)(۸/۴) = ۸/۴\ \mu C$$

$$q_۲ = C_۲V_۲ = (۲)(۸/۴) = ۱۶/۸\ \mu C$$

$$V_{۳۴} = V - V_{۱۲} = ۱۲ - ۸/۴ = ۳/۶V$$

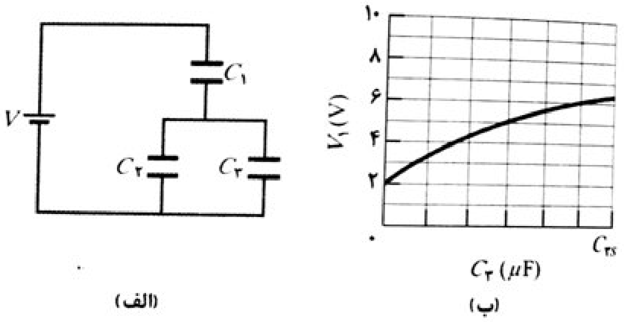
(چ) و (ح)

چون خازنهای $C_۳$ و $C_۴$ موازی‌اند $V_۳ = V_۴ = V_{۳۴} = ۳/۶V$ بوده و بار روی خازنها $C_۳$ و $C_۴$ عبارتند از

$$q_۳ = C_۳V_۳ = (۳)(۳/۶) = ۱۰/۸\ \mu C$$

$$q_۴ = C_۴V_۴ = (۴)(۳/۶) = ۱۴/۴\ \mu C$$

۲۸•••- خازن ۳ در شکل ۲۱-۴۴ الف یک *خازن متغیر* است (ظرفیت $C_۳$ آن می‌تواند تغییر کند). شکل ۲۱-۴۴ ب، پتانسیل الکتریکی $V_۱$ در دو سر خازن ۱ را برحسب $C_۳$ به دست می‌دهد.



شکل ۲۱-۴۴ مسئلهٔ ۲۸

مقیاس محور افقی با $C_{۳s} = ۱۲/۰\ \mu F$ مشخص شده است. پتانسیل الکتریکی $V_۱$ وقتی $C_۳ \to \infty$ میل کند به مجانب ۱۰V می‌رسد. (الف) پتانسیل الکتریکی V در دو سر باتری، (ب) $C_۱$، و (پ) $C_۲$ چقدر است؟

حل: خازن معادل مدار را به دست می‌آوریم.

$$C_{eq} = \frac{C_۱C_{۲۳}}{C_۱+C_{۲۳}} = \frac{C_۱(C_۲+C_۳)}{C_۱+(C_۲+C_۳)}$$

حال می‌توان نوشت $q = C_{eq}V$ و از طرفی $q = q_۱ = C_۱V_۱$ است که از اینجا می‌توان $V_۱$ اختلاف پتانسیل دو سر خازن $C_۱$ را به دست آورد.

$$V_۱ = \frac{C_۲+C_۳}{C_۱+C_۲+C_۳}V$$

(الف) وقتی $C_۳ \to \infty$ میل کند داریم $V_۱ = V$ و چون در این حالت پتانسیل الکتریکی $V_۱$ به تعداد مجانبی ۱۰V میل می‌کند لذا پتانسیل دو سر باتری $V = ۱۰V$ است.

(ب) و (پ) از منحنی می‌بینیم که در $C_۳ = ۰$ داریم $V_۱ = ۲V$، لذا با توجه به رابطه فوق داریم:

$$۲ = \frac{C_۲}{C_۱+C_۲}(۱۰) \Rightarrow C_۱ = ۴C_۲$$

همچنین از نمودار مشاهده می‌شود که در $C_۳ = ۶\mu F$ و $V_۱ = \frac{۱}{۲}V$ است لذا داریم

$$\frac{۱}{۲}V = \frac{C_۲+۶}{C_۱+C_۲+۶}V \Rightarrow \frac{۱}{۲} = \frac{C_۲+۶}{۴C_۲+C_۲+۶} \Rightarrow C_۲ = ۲\mu F$$

و در نتیجه برای $C_۱$ از رابطه $C_۱ = ۴C_۲$ خواهیم داشت $C_۱ = ۸\mu F$.

بخش ۲۱-۵ انرژی ذخیره شده در میدان الکتریکی

۲۹•- خازنی به ظرفیت $۲/۰\mu F$ با خازن دیگری به ظرفیت $۴/۰\mu F$ به طور موازی به اختلاف پتانسیل ۳۰۰V بسته شده‌اند. انرژی کل ذخیره شده در خازنها را محاسبه کنید. **SSM**

حل:

$$C_{eq} = C_۱ + C_۲ = ۶\ \mu F$$

$$U = \frac{۱}{۲}C_{eq}V^۲ = \frac{۱}{۲}(۶\times۱۰^{-۶})(۳۰۰)^۲ = ۰/۲۷J$$

۳۰•- یک خازن تخت پر از هوا به مساحت $۴۰cm^۲$ و فاصلهٔ صفحه‌های ۱/۰mm تا اختلاف پتانسیل ۶۰۰V باردار شده است. مطلوب است (الف) ظرفیت، (ب) بزرگی بار روی هرصفحه، (پ) انرژی ذخیره شده، (ت) میدان الکتریکی میان صفحه‌ها و (ث) چگالی انرژی میان صفحه‌ها.

حل: (الف)

$$C = \frac{\varepsilon_۰ A}{d} = \frac{(۸/۸۵\times۱۰^{-۱۲})(۴۰\times۱۰^{-۴})}{۱\times۱۰^{-۳}}$$

$$= ۳/۵۴\times۱۰^{-۱۱}\ F = ۳۵/۴\ \mu F$$

(ب)

$$q = CV = (۳/۵۴\times۱۰^{-۱۱})(۶۰۰)$$

$$= ۲/۱۲\times۱۰^{-۸}\ C = ۲۱/۲nC$$

(پ)

$$U = \frac{۱}{۲}CV^۲ = \frac{۱}{۲}(۳/۵۴\times۱۰^{-۱۱})(۶۰۰)^۲$$

$$= ۶/۳۷\times۱۰^{-۶}\ J$$

(ت)

$$E = \frac{V}{d} = \frac{۶۰۰}{۱\times۱۰^{-۳}} = ۶\times۱۰^۵\ V/m$$

(ث)

$$u = \frac{۱}{۲}\varepsilon_۰E^۲ = \frac{۱}{۲}(۸/۸۵\times۱۰^{-۱۲})(۶\times۱۰^۵)^۲$$

$$= ۱/۶\ J/m^۳$$

۳۱•- برای آنکه ۱۰kW.h انرژی با اختلاف پتانسیل ۱۰۰۰V ذخیره شود، به چه ظرفیتی نیاز است؟

حل:

$$۱۰\ kW\cdot h = (۱۰)(۱۰^۳)(۳۶۰۰) = ۳/۶\times۱۰^۷\ J$$

$$U = \frac{۱}{۲}CV^۲ \Rightarrow ۳/۶\times۱۰^۷ = \frac{۱}{۲}C(۱۰۰۰)^۲ \Rightarrow C = ۷۲F$$

۳۲•- چقدر انرژی در $۱/۰۰m^۳$ هوا، بر اثر میدان الکتریکی در «هوای صاف» به بزرگی ۱۵۰V/m ذخیره می‌شود؟

حل:

$$u = \frac{۱}{۲}\varepsilon_۰E^۲ = \frac{۱}{۲}(۸/۸۵\times۱۰^{-۱۲})(۱۵۰)^۲$$

$$= ۹/۹۶\times۱۰^{-۸}\ J/m^۳$$

$$U = uV = (۹/۹۶\times۱۰^{-۸})(۱) = ۹/۹۶\times۱۰^{-۸}\ J$$

W.h = ۳۶۰۰J

●●۳۳- فرض کنید یک الکترون ساکن، باری نقطه‌ای است. مطلوب است چگالی u میدان الکتریکی آن در فاصله‌های شعاعی (الف) $r=1/00\,\text{mm}$، (ب) $r=1/00\,\mu\text{m}$، (پ) $r=1/00\,\text{nm}$، و (ت) $r=1/00\,\text{pm}$. (ث) u در حد $r\to 0$ چقدر است؟

حل:

$$u=\frac{1}{2}\varepsilon_0 E^2=\frac{1}{2}\varepsilon_0\left(\frac{e}{4\pi\varepsilon_0 r^2}\right)^2=\frac{e^2}{32\pi^2\varepsilon_0 r^4}=\frac{9/17\times10^{-30}}{r^4}$$

(الف) به ازای $r=1\times10^{-3}\,\text{m}$ داریم $u=9/16\times10^{-18}\,\text{J/m}^3$.

(ب) به ازای $r=1\times10^{-6}\,\text{m}$ داریم $u=9/16\times10^{-6}\,\text{J/m}^3$.

(پ) به ازای $r=1\times10^{-9}\,\text{m}$ داریم $u=9/16\times10^{6}\,\text{J/m}^3$.

(ت) به ازای $r=1\times10^{-12}\,\text{m}$ داریم $u=9/16\times10^{18}\,\text{J/m}^3$.

(ث) به ازای $r\to 0$ داریم $u\to\infty$.

●●۳۴- در شکل ۲۱-۲۹، اختلاف پتانسیل $V=100\text{V}$ به دو سر یک آرایش خازنی با ظرفیتهای $C_1=10/0\,\mu\text{F}$، $C_2=5/00\,\mu\text{F}$، و $C_3=15/00\,\mu\text{F}$ اعمال شده است. مطلوب است (الف) بار q_3، (ب) اختلاف پتانسیل V_3، و (پ) انرژی ذخیره شدهٔ U_3 در خازن ۳، (ت) q_1، (ث) V_1 و (ج) U_1 برای خازن ۱، و (چ) q_2، (ح) V_2، و (خ) U_2 برای خازن ۲.

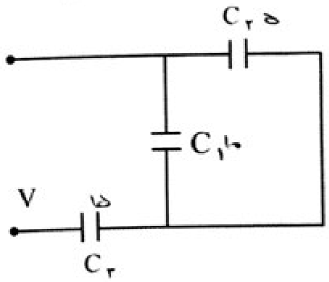
حل:

$$C_{12}=C_1+C_2=10+5=15\,\mu\text{F}$$

$$C_{eq}=\frac{C_3C_{12}}{C_3+C_{12}}=\frac{(15)(15)}{15+15}=7/5\,\mu\text{F}$$

$$q_{eq}=q_{12}=q_3=C_{eq}V=(7/5)(100)=750\,\mu\text{C}$$

$$V_1=V_2=V_{12}=\frac{q_{12}}{C_{12}}=\frac{750}{15}=50\,\text{V}$$



(الف) با توجه به محاسبات فوق $q_3=750\,\mu\text{C}$ است.

(ب) $V_3=\frac{q_3}{C_3}=\frac{750}{15}=50\,\text{V}$

(پ) $U_3=\frac{1}{2}C_3V_3^2=\frac{1}{2}(15)(50)^2=1/88\times10^{-2}\,\text{J}$

(ت) $q_1=C_1V_1=(10)(50)=500\,\mu\text{C}$

(ث) قبلاً محاسبه شده است $V_1=50\,\text{V}$.

(ج) $U_1=\frac{1}{2}C_1V_1^2=\frac{1}{2}(10\times10^{-6})(50)^2=1/25\times10^{-2}\,\text{J}$

(چ) $q_2=C_2V_2=(5)(50)=250\,\mu\text{C}$

(ح) قبلاً محاسبه شده است $V_2=50\,\text{V}$.

(خ) $U_2=\frac{1}{2}C_2V_2^2=\frac{1}{2}(5\times10^{-6})(50)^2=6/25\times10^{-3}\,\text{J}$

●●۳۵- صفحه‌های موازی یک خازن، با مساحت $8/50\,\text{cm}^2$ و فاصلهٔ پر از هوا برابر $3/00\,\text{mm}$، توسط یک باتری $6/00\text{V}$ باردار شده است. سپس باتری برداشته شده و صفحه‌ها (بدون تخلیه) در فاصلهٔ $8/00\,\text{mm}$ از یکدیگر قرار داده می‌شوند. با چشمپوشی از اثر لبه‌ها (الف) اختلاف پتانسیل میان صفحه‌ها، (ب) انرژی ذخیره شدهٔ اولیه و (پ) انرژی ذخیره شدهٔ نهایی، و (ت) کار لازم برای جداکردن صفحه‌ها را به دست آورید؟
WWW ILW SSM

حل: بار روی صفحه‌ها ثابت می‌ماند، لذا داریم

$$q=CV=C'V'\Rightarrow\frac{\varepsilon_0A}{d}V=\frac{\varepsilon_0A}{d'}V'\Rightarrow\frac{V}{d}=\frac{V'}{d'}$$

(الف) $\frac{6}{3\times10^{-3}}=\frac{V'}{8\times10^{-3}}\Rightarrow V'=16\text{V}$

(ب)

$$C=\frac{\varepsilon_0A}{d}=\frac{(8/85\times10^{-12})(8/5\times10^{-4})}{3\times10^{-3}}=2/51\times10^{-12}\,\text{F}$$

$$U=\frac{1}{2}CV^2=\frac{1}{2}(2/51\times10^{-12})(6)^2=4/52\times10^{-11}\,\text{J}$$

(پ)

$$C'=\frac{\varepsilon_0A}{d'}=\frac{(8/85\times10^{-12})(8/5\times10^{-4})}{8\times10^{-3}}=9/4\times10^{-13}\,\text{F}$$

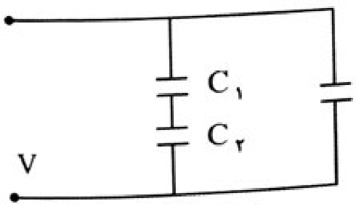
$$U'=\frac{1}{2}C'V'^2=\frac{1}{2}(9/4\times10^{-13})(16)^2=12\times10^{-11}\,\text{J}$$

(ت)

$$W=U'-U=12\times10^{-11}-4/52\times10^{-11}=7/48\times10^{-11}\,\text{J}$$

●●۳۶- در شکل ۲۱-۲۸، اختلاف پتانسیل $V=100\text{V}$ به دو سر یک آرایش خازنی با ظرفیتهای $C_1=10/0\,\mu\text{F}$، $C_2=5/00\,\mu\text{F}$، و $C_3=4/0\,\mu\text{F}$ اعمال شده است. مطلوب است (الف) بار q_3، (ب) اختلاف پتانسیل V_3، و (پ) انرژی ذخیره شدهٔ U_3 در خازن ۳، (ت) q_1، (ث) V_1، و (ج) U_1 برای خازن ۱، و (چ) q_2، (ح) V_2، و (خ) U_2 برای خازن ۲.

حل:



(الف) $q_3=C_3V=(4)(100)=400\,\mu\text{C}$

(ب) $V_3=V=100\text{V}$

(پ) $U_3=\frac{1}{2}C_3V_3^2=\frac{1}{2}(4\times10^{-6})(100)^2=0/02\text{J}$

(ت)

$$C_{12}=\frac{C_1C_2}{C_1+C_2}=\frac{(10)(5)}{10+5}=3/33\,\mu\text{F}$$

$$q_1=q_2=q_{12}=C_{12}V=(3/33)(100)=333\,\mu\text{C}$$

(ث) $V_۱ = \frac{q_۱}{C_۱} = \frac{۳۳۳}{۱۰} = ۳۳/۳\,V$

(ج) $U_۱ = \frac{۱}{۲}C_۱V_۱^۲ = \frac{۱}{۲}(۱۰)(۳۳/۳)^۲ = ۵/۵۵\times۱۰^{-۳}\,J$

(چ) قبلاً به دست آمده است.

$q_۲ = q_۱ = ۳۳۳\,\mu C$

(ح) $V_۲ = \frac{q_۲}{C_۲} = \frac{۳۳۳}{۵} = ۶۶/۶V$

(خ) $U_۲ = \frac{۱}{۲}C_۲V_۲^۲ = \frac{۱}{۲}(۵\times۱۰^{-۶})(۶۶/۶)^۲ = ۱/۱۱\times۱۰^{-۲}\,J$

••۳۷- در شکل ۲۱-۴۵، $C_۱=۱۰/۰\mu F$ ، $C_۲=۲۰/۰\mu F$ ، و $C_۳=۲۵/۰\mu F$ است. اگر هیچ خازنی نتواند اختلاف پتانسیلی بیش از ۱۰۰V را بدون فروشکست الکتریکی تاب بیاورد، (الف) بزرگی اختلاف پتانسیل بیشینه‌ای که می‌تواند میان نقطه‌های A و B به‌وجود آید و (ب) انرژی بیشینه‌ای که می‌تواند در این آرایش سه خازنی ذخیره شود، چقدر است؟

شکل ۲۱-۴۵ مسئلهٔ ۳۷

حل: چون خازنها به طور متوالی بسته شده‌اند بار روی آنها یکسان است. خازنی که ظرفیت کمتری دارد اختلاف پتانسیل بیشتری دارد. پس بیشترین اختلاف پتانسیل یعنی ۱۰۰ ولت روی دو سر خازن $C_۱$ قرار می‌گیرد.

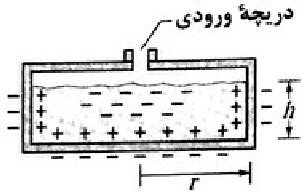
$$q_{eq} = q_۱ = q_۲ = q_۳ = C_۱V_۱ = (۱۰)(۱۰۰) = ۱۰۰۰\mu C$$

$$\frac{۱}{C_{eq}} = \frac{۱}{C_۱} + \frac{۱}{C_۲} + \frac{۱}{C_۳} = \frac{۱}{۱۰} + \frac{۱}{۲۰} + \frac{۱}{۲۵} \Rightarrow C_{eq} = ۵/۲۶\mu F$$

(الف) $V_{eq} = \frac{q_{eq}}{C_{eq}} = \frac{۱۰۰۰}{۵/۲۶} = ۱۹۰\,V$

(ب) $U_{max} = \frac{۱}{۲}C_{eq}V_{eq}^۲ = \frac{۱}{۲}(۵/۲۶)(۱۹۰)^۲ = ۰/۰۹۵J$

۳۸- به عنوان یک مهندس ایمنی، شما باید عمل ذخیره‌سازی مایعات رسانای قابل اشتعال را در یک محفظهٔ نارسانا ارزیابی کنید. شرکت تولید کنندهٔ یک مایع معین، از یک محفظهٔ کوتاه و ضخیم پلاستیکی به شعاع $r=۰/۲۰\,m$ استفاده کرده است و آن را تا بلندی $h=۱۰cm$ ، که ارتفاع کامل سطح داخلی محفظه نیست، پر می‌کند (شکل ۲۱-۴۶). بررسیهای شما نشان می‌دهد که در حین جابه‌جایی محفظه در شرکت، سطح خارجی آن، یک چگالی بار منفی به بزرگی $۲/۰\,\mu C/m^۲$ (تقریباً یکنواخت) به دست می‌آورد. چون مایع یک مادهٔ رساناست، بار روی محفظه باعث جدایی بار در داخل مایع می‌شود. (الف) چقدر بار منفی در بخش مرکزی مایع القا شده است؟ (ب) فرض کنید ظرفیت بخش مرکزی مایع نسبت به زمین ۳۵ pF است. انرژی پتانسیل وابسته به بار منفی در این خازن مؤثر چقدر است؟ (پ) اگر جرقه‌ای میان زمین و بخش مرکزی مایع (از طریق دریچهٔ ورودی) رخ دهد، این انرژی پتانسیل می‌تواند جرقه را تقویت کند. کمینهٔ انرژی جرقه که برای مشتعل ساختن مایع لازم است برابر با ۱۰mJ است. در این وضعیت، آیا جرقه می‌تواند مایع را مشتعل کند؟



شکل ۲۱-۴۶ مسئلهٔ ۳۸

حل: (الف) مساحت سطح باردار شده برابر است با

$$A = \pi r^۲ + ۲\pi r h = \pi(۰/۲)^۲ + ۲\pi(۰/۲)(۰/۱)$$
$$= ۰/۲۵m^۲$$

از روی شکل مشاهده می‌شود که گرچه پایین این حجم استوانه‌ای باردار شده است ولی بالای آن بدون بار است. بنابراین بار منفی $q = \sigma A = (۲\times۱۰^{-۶})(۰/۲۵) = ۰/۵\mu C$ روی سطح خارجی قرار می‌گیرد و در نتیجه و با توجه به فرضی مسئله همان بار q در سطح داخلی مایع القاء می‌شود.

(ب) $U = \frac{q^۲}{۲C} = \frac{(۰/۵)^۲}{(۲)(۳۵\times۱۰^{-۱۲})} = ۳/۶\times۱۰^{-۳}\,J = ۳/۶mJ$

(پ) چون انرژی ذخیره شده کمتر از انرژی لازم برای اشتعال است، جرقه باعث اشتعال نمی‌شود.

••۳۹- یک کرهٔ فلزی منزوی باردار به قطر ۱۰cm دارای پتانسیل ۸۰۰۰V نسبت به $V=۰$ در بینهایت است. چگالی انرژی را در میدان الکتریکی نزدیک به سطح کره محاسبه کنید.

حل: پتانسیل و میدان الکتریکی روی سطح کره عبارتند از

$$V = k\frac{q}{R} \quad , \quad E = k\frac{q}{R^۲}$$

لذا داریم $E = \frac{V}{R}$ ، در نتیجه می‌توان نوشت:

$$u = \frac{۱}{۲}\varepsilon_۰E^۲ = \frac{۱}{۲}\varepsilon_۰\left(\frac{V}{R}\right) = \frac{۱}{۲}(۸/۸۵\times۱۰^{-۱۲})\left(\frac{۸۰۰۰}{۰/۰۵}\right)^۲$$
$$= ۰/۱۱۳\,J/m^۳$$

بخش ۲۱-۶ خازن با دی‌الکتریک

•۴۰- یک خازن تخت پر از هوا دارای ظرفیت ۵۰pF است. (الف) اگر مساحت هر یک از صفحه‌ها $۰/۳۵\,m^۲$ باشد، فاصلهٔ آنها چقدر است؟ (ب) اگر اکنون ناحیهٔ میان صفحه‌ها با ماده‌ای با ثابت دی‌الکتریک $\kappa=۵/۶$ پرشود، ظرفیت خازن چقدر می‌شود؟

حل: (الف) $C = \frac{\kappa\varepsilon_۰A}{d} \Rightarrow \quad d = \frac{\kappa\varepsilon_۰A}{C}$

$$d = \frac{(۱)(۸/۸۵\times۱۰^{-۱۲})(۰/۳۵)}{۵۰\times۱۰^{-۱۲}} = ۶/۲\times۱۰^{-۲}\,m$$

(ب) $C' = \kappa C = (۵/۶)(۵۰) = ۲۸۰\,pF$

●۴۱- از شما خواسته شده است که یک خازن پر از هوا به ظرفیت ۷/۴ pF را به خازنی تبدیل کنید که با اختلاف پتانسیل بیشینهٔ ۶۵۲V تا انرژی ۷/۴ μJ را ذخیره کند. اگر هیچ‌گونه شبههٔ کناره‌ای وجود نداشته باشد از کدام دی‌الکتریک در جدول ۲۱-۱ باید برای پرکردن فضای بین صفحه‌های خازن استفاده کنید؟ SSM

حل:

$$U=\frac{۱}{۲}CV^{۲}=\frac{۱}{۲}\kappa C_{\circ}V^{۲}\Rightarrow \kappa=\frac{۲U}{C_{\circ}V^{۲}}$$

$$\kappa=\frac{۲(۷/۴\times ۱۰^{-۶})}{(۷/۴\times ۱۰^{-۱۲})(۶۵۲)^{۲}}=۴/۷$$

●۴۲- یک خازن تخت پر از هوا دارای ظرفیت ۱/۳ pF است. فاصلهٔ صفحه‌ها را دو برابر می‌کنیم و میان آنها موم قرار می‌دهیم. ظرفیت جدید ۲/۶ pF است. ثابت دی‌الکتریک موم را به دست آورید.

حل

$$C_{۱}=\frac{\kappa\varepsilon_{\circ}A}{d_{۱}}\qquad C_{۲}=\frac{\kappa_{۲}\varepsilon_{\circ}A}{d_{۲}}=\frac{\kappa_{۲}\varepsilon_{\circ}A}{۲d_{۱}}$$

$$\frac{C_{۲}}{C_{۱}}=\frac{\kappa_{۲}}{۲\kappa_{۱}}\Rightarrow\frac{۲/۶}{۱/۳}=\frac{\kappa_{۲}}{۲(۱)}\Rightarrow\kappa_{۲}=۴$$

●۴۳- کابل هم‌محوری که در یک خط انتقال به کار گرفته می‌شود دارای شعاع داخلی ۰/۱۰ mm و شعاع خارجی ۰/۶۰ mm است. ظرفیت به ازای متر را برای این کابل محاسبه کنید. فرض کنید فضای میان رساناها با پلی استیرن پر شده است؟ SSM

حل: ظرفیت خازن استوانه‌ای از رابطهٔ زیر به دست می‌آید.

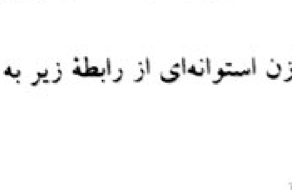
$$C=\frac{۲\pi k\varepsilon_{\circ}L}{Ln\left(\frac{b}{a}\right)}$$

ظرفیت بر متر کابل برابر است با

$$\frac{C}{L}=\frac{۲(۳/۱۴)(۲/۶)(۸/۸۵\times ۱۰^{-۱۲})}{Ln\left(\frac{۰/۶}{۰/۱}\right)}$$

$$=۸/۱\times ۱۰^{-۱۱}\ F/m=۸۱\ pF/m$$

●●۴۴- در شکل ۲۱-۴۷، چقدر بار توسط باتری ۱۲/۰ ولتی روی خازنهای تخت ذخیره شده است؟ یکی از آنها با هوا، و دیگری با دی‌الکتریکی با ثابت $\kappa=۳/۰۰$ پر شده است. مساحت صفحهٔ دو خازن $۵/۰۰\times ۱۰^{-۳}\ m^{۲}$ و فاصلهٔ صفحه‌ها ۲/۰۰ mm است.



شکل ۲۱-۴۷ مسئلهٔ ۴۴

حل:

$$C_{۲}=\frac{\varepsilon_{\circ}A}{d}=\frac{(۸/۸۵\times ۱۰^{-۱۲})(۵\times ۱۰^{-۳})}{۲\times ۱۰^{-۳}}$$

$$=۲/۲۱\times ۱۰^{-۱۱}\ F=۲۲/۱pF$$

$$C_{۱}=\frac{\kappa\varepsilon_{\circ}A}{d}=\kappa C_{۲}=(۳)(۲/۲۱\times ۱۰^{-۱۱})$$

$$=۶/۶۳\times ۱۰^{-۱۱}\ F=۶۶/۳pF$$

$$q_{۱}=C_{۱}V=(۶۶/۳)(۱۲)=۷۹۷/۶pC$$

$$q_{۲}=C_{۲}V=(۲۲/۱)(۱۲)=۲۶۵/۲pC$$

●●۴۵- مادهٔ معینی دارای ثابت دی‌الکتریک ۲/۸ و استحکام دی‌الکتریک ۱۸MV/m است. اگر از این ماده به عنوان دی‌الکتریک در خازن تخت استفاده شود، مساحت کمینهٔ صفحه‌های خازن باید چقدر باشد تا ظرفیت $۷/۰\times ۱۰^{-۲}\mu F$ به دست آید و تضمین شود که خازن می‌تواند اختلاف پتانسیل ۴/۰kV را تاب بیاورد؟ ILW SSM

حل:

$$E_{m}=\frac{V_{m}}{d}\Rightarrow ۱۸\times ۱۰^{۶}=\frac{۴\times ۱۰^{۳}}{d}\Rightarrow d=۲/۲۲\times ۱۰^{-۴}\ m$$

$$C=\frac{\kappa\varepsilon_{\circ}A}{d}\Rightarrow A=\frac{Cd}{k\varepsilon_{\circ}}$$

$$A=\frac{(۷\times ۱۰^{-۲}\times ۱۰^{-۶})(۲/۲۲\times ۱۰^{-۴})}{(۲/۸)(۸/۸۵\times ۱۰^{-۱۲})}=۰/۶۲۷\ m^{۲}$$

●●۴۶- از شما خواسته شده است که خازنی با ظرفیت نزدیک به ۱nF و پتانسیل فروشکست بیش از ۱۰۰۰۰V را بسازید. به نظرتان می‌رسد که از یک لیوان پیرکس بلند به عنوان دی‌الکتریک استفاده کنید و سطحهای خمیدهٔ داخلی و خارجی آن را با ورقه‌های آلومینیومی به عنوان صفحه‌های خازن بپوشانید. بلندی لیوان ۱۵cm، شعاع داخلی آن ۳/۶cm و شعاع خارجی آن ۳/۸ cm است. (الف) ظرفیت و (ب) پتانسیل فروشکست این خازن چقدر است؟

حل: (الف) این مجموعه یک خازن استوانه‌ای با دی‌الکتریک را تشکیل می‌دهد. ظرفیت چنین خازنی برابر است با:

$$C=\frac{۲\pi\kappa\varepsilon_{\circ}L}{Ln\left(\frac{b}{a}\right)}=\frac{۲\pi(۴/۷)(۸/۸۵\times ۱۰^{-۱۲})(۰/۱۵m)}{Ln\left(\frac{۳/۸}{۳/۶}\right)}$$

$$=۰/۷۳\times ۱۰^{-۹}\ F=۰/۷۳nF$$

(ب) قدرت دی‌الکتریک پیرکس، یعنی بیشینه مقدار میدان الکتریکی‌ای که پیرکس می‌تواند بدون سوختن عمل کند برابر ۱۴kV/mm است، بنابراین پتانسیل شکست برابر خواهد بود با:

$$V_{m}=\int_{a}^{b}E_{m}dr=E_{m}(b-a)=(۱۴)(۳۸-۳۶)$$

$$=۲۸kV$$

●●۴۷- خازن تخت معینی با دی‌الکتریکی با ثابت $\kappa=۵/۵$ پر شده است. مساحت هر صفحهٔ آن $۰/۰۳۴m^{۲}$ است و صفحه‌ها ۲/۰mm از یکدیگر فاصله دارند. اگر میدان الکتریکی میان

صفحه‌ها از ۲۰۰kN/C تجاوز کند، خازن فرو می‌ریزد (اتصال کوتاه شده و می‌سوزد). انرژی بیشینه‌ای که می‌تواند در خازن ذخیره شود چقدر است؟

حل:

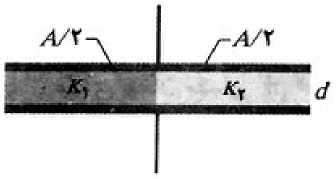
$$C=\frac{\kappa\varepsilon_0 A}{d}=\frac{(5/5)(8/85\times10^{-12})(0/034)}{2\times10^{-3}}$$

$$=8/27\times10^{-10}\ \text{F}$$

$$V_m=E_m d=(200\times10^{3})(2\times10^{-3})=400\text{V}$$

$$U_m=\frac{1}{2}CV_m^2=\frac{1}{2}(8/27\times10^{-10})(400)^2=6/62\times10^{-5}\ \text{J}$$

۴۸●●- شکل ۲۱-۴۸ یک خازن تخت با مساحت صفحهٔ $A=5/56\text{cm}^2$ و فاصلهٔ صفحه‌های $d=56/5$ mm را نشان می‌دهد. نیمهٔ سمت چپ فضای خالی میان صفحه‌ها با ماده‌ای با ثابت دی‌الکتریک $\kappa_1=7/00$ و نیمهٔ سمت راست آن با ماده‌ای با ثابت دی‌الکتریک $\kappa_2=12/0$ پر شده است. ظرفیت این خازن چقدر است؟



شکل ۲۱-۴۸ مسئلهٔ ۴۸

حل:

$$C_1=\frac{\kappa_1\varepsilon_0 A_1}{d_1}\ ,\ C_2=\frac{\kappa_2\varepsilon_0 A_2}{d_2}\ ,\ A_1=A_2=\frac{A}{2}$$

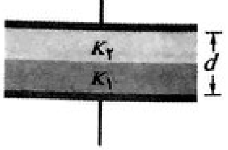
$$C_1=\kappa_1\frac{\varepsilon_0 A}{2d}\ ,\ C_2=\frac{\kappa_2\varepsilon_0 A}{2d}\ ,\ d_1=d_2=d$$

چون خازنها به صورت موازی بسته شده‌اند ظرفیت معادل آنها برابر است با

$$C=C_1+C_2=\frac{\varepsilon_0 A}{2d}(\kappa_1+\kappa_2)$$

$$=\frac{(8/85\times10^{-12})(5/56\times10^{-4})}{(2)(5/5\times10^{-3})}(7+12)=8/41\times10^{-12}\ \text{F}$$

۴۹●●●- شکل ۲۱-۴۹ یک خازن تخت با مساحت صفحهٔ $A=7/89\text{cm}^2$ و فاصلهٔ صفحه‌ها برابر $d=4/62$ mm را نشان می‌دهد. نیمهٔ بالایی فضای خالی میان صفحه‌ها با ماده‌ای با ثابت دی‌الکتریک $\kappa_1=11/0$ و نیمهٔ پایینی آن با ماده‌ای با ثابت دی الکتریک $\kappa_2=12/0$ پر شده است. ظرفیت این خازن چقدر است؟



شکل ۲۱-۴۹ مسئلهٔ ۴۹

حل: روش اول: با اینکه توجیه فیزیکی تحمیلی برای در نظر گرفتن این آرایش به عنوان دو خازن متوالی نداریم با این حال به نظر می‌رسد که می‌توان این آرایش را به صورت مجموع دو خازن متوالی درنظر گرفت.

$$C_1=\frac{\kappa_1\varepsilon_0 A_1}{d_1}\ ,\ C_2=\frac{\kappa_2\varepsilon_0 A_2}{d_2}\ ,\ A_1=A_2=A$$

$$C_1=\frac{2\kappa_1\varepsilon_0 A_1}{d}\ ,\ C_2=\frac{2\kappa_2\varepsilon_0 A_2}{d}\ ,\ d_1=d_2=\frac{d}{2}$$

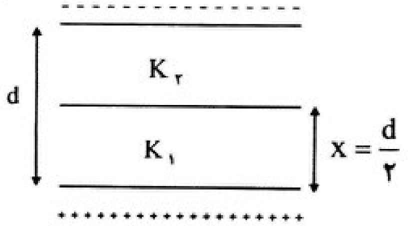
چون دو خازن به صورت متوالی درنظر گرفته شده‌اند ظرفیت معادل آنها برابر است با

$$C=\frac{C_1C_2}{C_1+C_2}=\frac{\left(\frac{2\varepsilon_0 A}{d}\right)^2\kappa_1\kappa_2}{\left(\frac{2\varepsilon_0 A}{d}\right)\kappa_1+\kappa_2}=\frac{2\varepsilon_0 A}{d}\left(\frac{\kappa_1\kappa_2}{\kappa_1+\kappa_2}\right)$$

$$=\frac{(2)(8/85\times10^{-12})(11)(12)}{(4/62\times10^{-3})(11+12)}=1/73\times10^{-11}\ \text{F}$$

روش دوم: روش منطقی برای حل چنین مسئله‌هایی این است که ظرفیت را به روش معمول محاسبه کنیم، یعنی از تعریف ظرفیت $(C=q/\Delta V)$ استفاده کنیم در نتیجه باید ابتدا ΔV را محاسبه کرد.

$$\Delta V=-\int_d^x E_2 ds-\int_x^0 E_1 ds$$



که داریم:

$$E_1=\frac{E_0}{\kappa_1}=\frac{q}{\kappa_1\varepsilon_0 A}\quad ,\ E_2=\frac{E_0}{\kappa_2}=\frac{q}{\kappa_2\varepsilon_0 A}$$

$$\Delta V=-\int_d^{d/2}\frac{q}{\kappa_2\varepsilon_0 A}ds-\int_{d/2}^{0}\frac{q}{\kappa_1\varepsilon_0 A}ds$$

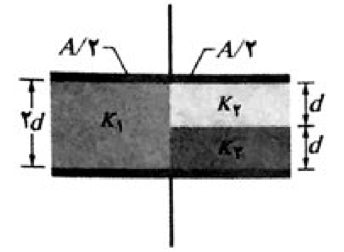
$$=-\frac{q}{\varepsilon_0 A}\left[\frac{1}{\kappa_2}\left[\frac{d}{2}-d\right]+\frac{1}{\kappa_1}\left(0-\frac{d}{2}\right)\right]$$

$$=\frac{qd}{2\varepsilon_0 A}\left[\frac{\kappa_1+\kappa_2}{\kappa_1\kappa_2}\right]$$

بنا به تعریف ظرفیت داریم:

$$C=\frac{q}{\Delta V}=\frac{2\varepsilon_0 A}{d}\left(\frac{k_1k_2}{k_1+k_2}\right)=1/73\times10^{-11}\ \text{F}$$

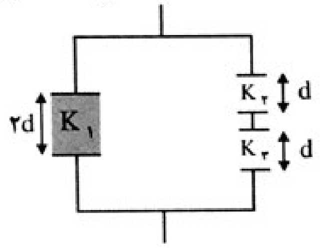
۵۰●●●- شکل ۲۱-۵۰ یک خازن تخت با مساحت صفحهٔ $A=10/5\text{cm}^2$ و فاصلهٔ صفحه‌های $2d=7/12$ mm را نشان می‌دهد. نیمهٔ سمت چپ فضای خالی میان صفحه‌ها با ماده‌ای با ثابت دی‌الکتریک $\kappa_1=21/0$ و نیمهٔ بالایی سمت راست آن با ماده‌ای با ثابت دی‌الکتریک $\kappa_2=42/0$، و نیمهٔ پایینی سمت راست آن با ماده‌ای با ثابت دی‌الکتریک $\kappa_3=58/0$ پر شده است. ظرفیت این خازن چقدر است؟ GO



شکل ۲۱-۵۰ مسئلهٔ ۵۰

حل: چنین آرایشی را می‌توان به صورت زیر درنظر گرفت. و ظرفیت خازنها برابر است با:

$$C_۱ = \kappa_۱\varepsilon_\circ \frac{A/۲}{۲d} = \frac{\kappa_۱\varepsilon_\circ A}{۴d}$$
$$C_۲ = \kappa_۲\varepsilon_\circ \frac{A/۲}{d} = \frac{\kappa_۲\varepsilon_\circ A}{۲d}$$
$$C_۳ = \kappa_۳\varepsilon_\circ \frac{A/۲}{d} = \frac{\kappa_۳\varepsilon_\circ A}{۲d}$$



برای دو خازن متوالی $C_۲$ و $C_۳$ ظرفیت معادل برابر است با

$$C_{۲۳} = \frac{C_۲C_۳}{C_۲+C_۳} = \frac{\left(\frac{\varepsilon_\circ A}{۲d}\right)^۲ \kappa_۲\kappa_۳}{\left(\frac{\varepsilon_\circ A}{۲d}\right)(\kappa_۲+\kappa_۳)} = \frac{\varepsilon_\circ A}{۲d}\left(\frac{\kappa_۲\kappa_۳}{\kappa_۲+\kappa_۳}\right)$$

$C_{۲۳}$ و $C_۱$ با هم موازی‌اند و ظرفیت معادل کل آرایش عبارت است از

$$C = C_۱ + C_{۲۳} = \frac{\kappa_۱\varepsilon_\circ A}{۴d} + \frac{\varepsilon_\circ A}{۲d}\left(\frac{\kappa_۲\kappa_۳}{\kappa_۲+\kappa_۳}\right)$$
$$= \frac{\varepsilon_\circ A}{۴d}\left(\kappa_۱ + \frac{۲\kappa_۲\kappa_۳}{\kappa_۲+\kappa_۳}\right)$$

با قرار دادن مقادیر عددی خواهیم داشت

$$C = ۴/۵۵\times۱۰^{-۱۱}\ \text{F}$$

بخش ۲۱-۸ دی‌الکتریک‌ها و قانون گاوس

●**۵۱-** یک خازن تخت دارای ظرفیت ۱۰۰pF، مساحت صفحهٔ $۱۰۰\text{cm}^۲$ ، و دی الکتریکی از جنس میکا $(\kappa=۵/۴)$ است که فضای میان صفحه‌ها را به طور کامل پر کرده است. در اختلاف پتانسیل ۵۰V ، (الف) بزرگی میدان الکتریکی E در میکا، (ب) بزرگی بار آزاد روی صفحه‌ها و (پ) بزرگی بار القا شده روی میکا را محاسبه کنید. WWW SSM

حل: (الف) برای ظرفیت داریم

$$C = \frac{\kappa\varepsilon_\circ A}{d} \Rightarrow \quad d = \frac{\kappa\varepsilon_\circ A}{C}$$

و میدان الکتریکی برابر است با $E = V/d$ که با قرار دادن d از رابطه بالا داریم

$$E = \frac{VC}{\kappa\varepsilon_\circ A} = \frac{(۵۰)(۱۰۰\times۱۰^{-۱۲})}{(۵/۴)(۸/۸۵\times۱۰^{-۱۲})(۱۰۰\times۱۰^{-۴})}$$
$$= ۱\times۱۰^۴\ \text{V/m}$$

(ب) بار آزاد روی صفحه‌ها برابر است با:

$$q_f = CV = (۱۰۰\times۱۰^{-۱۲})(۵۰) = ۵\times۱۰^{-۹}\ \text{C}$$

(پ) بار القایی برابر است با:

$$q' = q_f\left(۱-\frac{۱}{\kappa}\right) = (۵\times۱۰^{-۹})\left(۱-\frac{۱}{۵/۴}\right) = ۴\times۱۰^{-۹}\ \text{C}$$

●●**۵۲-** در مسئلهٔ نمونهٔ ۲۱-۷، فرض کنید در حالی که تیغهٔ دی‌الکتریک قرار داده می‌شود، باتری متصل بماند. (الف) ظرفیت، (ب) بار روی صفحه‌های خازن، (پ) میدان الکتریکی در فضای خالی، و (ت) میدان الکتریکی در تیغهٔ را، پس از آنکه تیغهٔ قرار داده شد محاسبه کنید.

حل: در حالی که باتری کماکان متصل است ولتاژ دو سر خازن ثابت می‌ماند ولی بار تغییر می‌کند. ولی در هر صورت ظرفیت خازن ثابت می‌ماند. بنابراین خواهیم داشت:

(الف) ظرفیت خازن دارای همان مقدار $۱۳/۴\text{pF}$ خواهد بود.

(ب) بار روی صفحه‌های خازن برابر است با

$$q = CV_\circ = (۱۳/۴\times۱۰^{-۱۲})(۸۵/۵) = ۱/۱۵\times۱۰^{-۹}\ \text{C} = ۱/۱۵\text{nC}$$

(پ) از قانون گاوس داریم:

$$\varepsilon_\circ\oint \vec{E}\cdot d\vec{A} = q \Rightarrow E_\circ = \frac{q}{\varepsilon_\circ A}$$
$$E_\circ = \frac{۱/۱۵\times۱۰^{-۹}\ C}{(۸/۸۵\times۱۰^{-۱۲})(۱۱۵\times۱۰^{-۴})} = ۱/۱۳\times۱۰^۴\ \text{N/C}$$

(ت) میدان در حضور دی‌الکتریک برابر است با

$$E = \frac{E_\circ}{\kappa} = \frac{۱/۱۳\times۱۰^۴}{۲/۶۱} = ۴/۳۲\times۱۰^۳\ \text{N/C}$$

●●**۵۳-** فضای میان دو پوستهٔ کروی رسانای هم‌مرکز به شعاعهای $b=۱/۷۰\text{cm}$ و $a=۱/۲۰\text{cm}$ با ماده‌ای با ثابت دی‌الکتریک $\kappa=۲۳/۵$ پرشده است. اختلاف پتانسیل $V=۷۳/۰\text{V}$ بین پوسته‌های داخلی و خارجی برقرار شده است. (الف) ظرفیت دستگاه، (ب) بار آزاد q روی پوستهٔ داخلی، و (پ) بار q' که روی سطح پوستهٔ داخلی القا شده است را تعیین کنید. SSM

حل: (الف) در اینجا خازن کروی داریم و ظرفیت خازن کروی از رابطهٔ زیر به دست می‌آید:

$$C = \frac{۴\pi\kappa\varepsilon_\circ ab}{b-a} = \frac{\kappa(ab)}{k(b-a)}$$
$$= \frac{(۲۳/۵)(۱/۲\times۱۰^{-۲})(۱/۷\times۱۰^{-۲})}{(۹\times۱۰^۹)(۱/۷-۱/۲)\times۱۰^{-۲}} = ۱/۱\times۱۰^{-۱۰}\ \text{F}$$

(ب)
$$q = CV = (۱/۱\times۱۰^{-۱۰})(۷۳) = ۸/۰۳\times۱۰^{-۹}\ \text{C}$$

(پ)
$$q' = q\left(۱-\frac{۱}{\kappa}\right) = (۸/۰۳\times۱۰^{-۹})\left(۱-\frac{۱}{۲۳/۵}\right)$$
$$= ۷/۶۹\times۱۰^{-۹}\ \text{C}$$

۵۴۰۰- به دو صفحهٔ موازی به مساحت $۱۰۰cm^۲$ بارهایی به بزرگی $۸/۹\times۱۰^{-۷}C$ و علامتهای مخالف داده شده‌اند. میدان الکتریکی در داخل مادهٔ دی‌الکتریکی که فضای میان صفحه‌ها را پرکرده است برابر با $۱/۴\times۱۰^{۶} V/m$ است. (الف) ثابت دی الکتریک این ماده را محاسبه کنید. (ب) بزرگی بار القا شده روی هر سطح دی‌الکتریک را تعیین کنید.

(الف) از قانون گاوس در دی‌الکتریک داریم

$$\kappa\varepsilon_۰ \oint \vec{E}\cdot d\vec{A} = q \Rightarrow \kappa\varepsilon_۰ EA = q$$

$$\kappa = \frac{q}{\varepsilon_۰ EA} = \frac{۸/۹\times۱۰^{-۷}}{(۸/۸۵\times۱۰^{-۱۲})(۱/۴\times۱۰^{-۶})(۱۰۰\times۱۰^{-۴})} = ۷/۱۸$$

(ب)

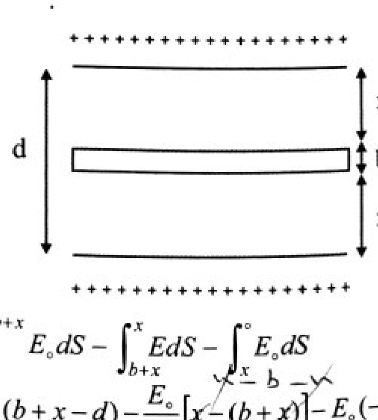
$$q' = q\left(1-\frac{1}{\kappa}\right) = (۸/۹\times۱۰^{-۷})\left(1-\frac{1}{۷/۱۸}\right) = ۷/۶۶\times۱۰^{-۷} C$$

۵۵۰۰- یک خازن تخت دارای صفحه‌هایی به مساحت $۰/۱۲m^۲$ و فاصلهٔ $۱/۲cm$ است. یک باتری صفحه‌ها را تا اختلاف پتانسیل $۱۲۰V$ باردار می‌کند و سپس برداشته می‌شود. آنگاه یک تیغهٔ دی‌الکتریک به ضخامت $۴/۰mm$ و ثابت دی‌الکتریک ۴/۸ به طور متقارن میان صفحه‌ها قرار داده می‌شود. (الف) پیش از آنکه تیغه قرار داده شود، ظرفیت خازن چقدر است؟ (ب) پس از آنکه تیغه قرارداده شد، ظرفیت خازن چقدر است؟ بار آزاد q (پ) پیش و (ت) پس از آنکه تیغه قرار داده شد چقدر است؟ بزرگی میدان الکتریکی (ث) در فضای میان صفحه‌ها و دی‌الکتریک و (ج) در خودِ دی الکتریک چقدر است؟ (چ) با وجود تیغه، اختلاف پتانسیل دو سر صفحه‌ها چقدر است؟ (ح) در حین قراردادن تیغه چقدر کار خارجی صورت گرفته است؟

حل: (الف) پیش از قرار دادن تیغه ظرفیت خازن برابر است با

$$C_۰ = \frac{\varepsilon_۰ A}{d} = \frac{(۸/۸۵\times۱۰^{-۱۲})(۰/۱۲)}{۱/۲\times۱۰^{-۲}} = ۸/۸۵\times۱۰^{-۱۱} F$$

(ب) برای به دست آوردن ظرفیت پس از قرار تیغه ابتدا اختلاف پتانسیل را محاسبه می‌کنیم (روش محاسبه ظرفیت معادل توجیه منطقی ندارد ولی پاسخ صحیح را به دست می‌دهد).



$$\Delta V = -\int_d^{b+x} E_۰ dS - \int_{b+x}^{x} E dS - \int_x^{۰} E_۰ dS$$
$$= -E_۰(b+x-d) - \frac{E_۰}{\kappa}[x-(b+x)] - E_۰(-x)$$

$$\Delta V = -\frac{\sigma}{\varepsilon_۰}\left[b-d+\frac{b}{\kappa}\right] = \frac{q}{\varepsilon_۰ A}\left[\frac{\kappa d - b(\kappa-1)}{\kappa}\right]$$

حال می‌توان ظرفیت را به دست آورد:

$$C = \frac{q}{\Delta V} = \frac{k\varepsilon_۰ A}{\kappa d - b(\kappa-1)}$$

که با قرار دادن مقادیر عددی داده شده داریم $C = ۱/۲\times۱۰^{-۱۰} F$.

(پ) با توجه به جدا کردن باتری، بار ثابت باقی مانده است

$$q = q_۰ = C_۰V_۰ = (۸/۸۵\times۱۰^{-۱۱})(۱۲۰) = ۱/۰۶\times۱۰^{-۸} C$$

(ث)
$$E_۰ = \frac{V}{d} = \frac{۱۲۰}{۱/۲\times۱۰^{-۲}} = ۱۰^{۴} V/m$$

(ج)
$$E = \frac{E_۰}{\kappa} = \frac{۱۰^{۴}}{۴/۸} = ۲/۱\times۱۰^{۳} V/m$$

(چ)
$$q = CV \Rightarrow V = \frac{q}{C} = \frac{۱/۰۶\times۱۰^{۸}}{۱/۲\times۱۰^{-۱۰}} = ۸۸/۳ V$$

(ح)
$$W_{ext} = \Delta U = \frac{q^۲}{۲C} - \frac{q^۲}{۲C_۰} = \frac{q^۲}{۲}\left(\frac{1}{C}-\frac{1}{C_۰}\right)$$
$$= \frac{(۱/۰۶\times۱۰^{-۸})^۲}{۲}\left[\frac{۱}{۱/۲\times۱۰^{-۱۰}} - \frac{۱}{۸/۸۵\times۱۰^{-۱۱}}\right]$$
$$= -۱/۶۹\times۱۰^{-۷} J$$

مسئله‌های اضافی

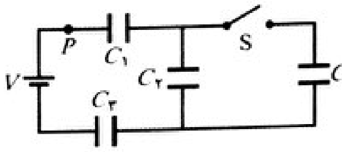
۵۶- *معمای خرده‌های شکلات*. این داستان با مسئلهٔ ۵۶ فصل ۱۹ شروع شده است. به عنوان بخشی از بررسیها در مورد دلایل انفجار کارخانهٔ بیسکویت‌سازی، پتانسیل الکتریکی کارگران در هنگام تخلیهٔ بسته‌های پودر شکلات به داخل سطل بارگیری که باعث به وجود آمدن ابری از پودر در اطراف آنها می‌شد، اندازه‌گیری شد. هر کارگر نسبت به زمین، که پتانسیل الکتریکی آن صفر در نظر گرفته شد، حدود $۷/۰kV$ پتانسیل الکتریکی داشت. (الف) با فرض اینکه هر کارگر خازن مؤثری با ظرفیت نوعی $۲۰۰\mu F$ است، انرژی ذخیره شده در این خازن مؤثر را بیابید. اگر یک جرقهٔ تنها بین کارگر و هرجسم رسانای متصل به زمین زده شود، کارگر از لحاظ بار خنثی می‌شود و این انرژی به جرقه منتقل می‌گردد. بنا بر اندازه‌گیریهای انجام شده، انرژی جرقه‌ای که بتواند باعث آتش گرفتن ابری از پودر خرده‌های شکلات و در نتیجه، انفجار شود باید دست کم $۱۵۰mJ$ باشد. (ب) آیا جرقه‌ای از یک کارگر می‌توانست باعث انفجار در ابر پودرهای اطراف سطل بارگیری شود؟ (این داستان با مسئلهٔ ۵۶ فصل ۲۲ ادامه می‌یابد.)

حل: (الف)

$$U = \frac{1}{۲}CV^۲ = \frac{1}{۲}(۲۰۰\times۱۰^{-۱۲})(۷\times۱۰^{۳})^۲ = ۴/۹\times۱۰^{-۳} J$$

(ب) چون انرژی آزاد شده به ازای هر تک جرقه توسط یک کارگر بسیار کمتر از انرژی لازم برای انفجار است لذا جرقهٔ ناشی از طرف یک نفر باعث انفجار نمی‌شود.

۵۷- شکل ۲۱-۵۱، خازن ۱ ($C_۱=۸/۰۰\mu F$)، خازن ۲ ($C_۲=۶/۰۰\mu F$)، و خازن ۳ ($C_۳=۸/۰۰\mu F$) را نشان می‌دهد که به یک باتری $۱۲/۰V$ متصل شده‌اند. وقتی کلید S بسته شده و در نتیجه خازن بدون بار ۴ ($C_۴=۶/۰۰\mu F$) به مدار متصل شود، (الف) چقدر بار به وسیلهٔ باتری از نقطهٔ P می‌گذرد؟ و (ب) چقدر بار روی خازن ۴ ظاهر می‌شود؟ (پ) توضیح دهید که چرا این دو نتیجه، متفاوت‌اند؟



شکل ۲۱-۵۱ مسئلهٔ ۵۷

حل: (الف) پیش از اتصال کلید خازنهای $C_۱$، $C_۲$ و $C_۳$ متوالی و ظرفیت معادل آنها برابر است با

$$\frac{۱}{C}=\frac{۱}{C_۱}+\frac{۱}{C_۲}+\frac{۱}{C_۳}=\frac{۱}{۸}+\frac{۱}{۶}+\frac{۱}{۸}=\frac{۱۰}{۲۴}$$

که در نتیجه $C=۲/۴\mu F$ و باری که از نقطه P می‌گذرد برابر است با

$$q_i=CV=(۲/۴)(۱۲)=۲۸/۸\mu C$$

پس از اتصال کلید، خازنهای $C_۲$ و $C_۴$ و ظرفیت معادل آنها برابر است با

$$C_{۲۴}=C_۲+C_۴=۶+۶=۱۲\mu F$$

این خازن معادل با خازنهای $C_۱$ و $C_۳$ متوالی است و ظرفیت معادل آنها برابر است با

$$\frac{۱}{C'}=\frac{۱}{C_۱}+\frac{۱}{C_{۲۴}}+\frac{۱}{C_۳}=\frac{۱}{۸}+\frac{۱}{۱۲}+\frac{۱}{۸}$$

که در نتیجه $C'=۳\mu F$ و داریم

$$q_f=C'V=(۳)(۱۲)=۳۶\mu F$$

به این ترتیب باری که پس از اتصال کلید از نقطهٔ P می‌گذرد برابر است با

$$\Delta q=q_f-q_i=۳۶-۲۸/۸=۷/۲\mu C$$

(ب)
$$V_{۲۴}=\frac{q_f}{V_{۲۴}}=\frac{۳۶}{۱۲}=۳V$$

که این همان اختلاف پتانسیل دو سر خازنهای $C_۲$ و $C_۴$ است لذا بار روی خازن $C_۴$ برابر است با:

$$q_۴=C_۴V_{۲۴}=(۶)(۳)=۱۸\mu C$$

(پ) وقتی که خازن $C_۴$ به مدار افزوده می‌شود توسط سایر خازنها تغذیه شده و بار خازنهای دیگر در مدار تغییر می‌کند. باتری صفحاتی را که به آن متصل است تغذیه می‌کند.

۵۸- دو خازن تخت، پر از هوا، نخست به طور مجزا، سپس به طور متوالی، و سرانجام به طور موازی به یک باتری $۱۰V$ بسته می‌شوند. در این آرایشها، انرژی ذخیره شده در خازنها از کمترین تا بیشترین عبارت‌اند از: $۷۵\mu J$، $۱۰۰\mu J$، $۳۰۰\mu J$، و $۴۰۰\mu J$. ظرفیت (الف) کمتر و (ب) بیشتر این دو خازن چقدر است؟

حل: می‌دانیم که در اتصال متوالی ظرفیت معادل کوچکتر از هر تک خازن است در نتیجه انرژی نیز همین وضعیت را دارد. در اتصال موازی ظرفیت معادل بزرگتر از هر تک خازن است. در نتیجه انرژی نیز همین وضعیت را دارد. لذا دو مقدار میانی داده شده مربوط به خازنهای $C_۱$ و $C_۲$ هستند و در نتیجه داریم:

$$W_۱=\frac{۱}{۲}C_۱V^۲\Rightarrow ۱۰۰=\frac{۱}{۲}C_۱(۱۰)^۲\Rightarrow C_۱=۲\mu F$$

$$W_۲=\frac{۱}{۲}C_۲V^۲\Rightarrow ۳۰۰=\frac{۱}{۲}C_۲(۱۰)^۲\Rightarrow C_۲=۶\mu F$$

۵۹- دو خازن تخت، هریک به ظرفیت $۶/۰\mu F$، به طور متوالی به یک باتری $۱۰V$ بسته شده‌اند. سپس یکی از خازنها فشرده می‌شود، به طوری که فاصلهٔ صفحه‌های آن به نصف می‌رسد. بر اثر این فشردگی، (الف) چقدر بار اضافی توسط باتری به خازنها منتقل می‌شود؟ و (ب) افزایش بار کل ذخیره شده در خازنها (بار روی صفحهٔ مثبت یک خازن بعلاوهٔ بار روی صفحهٔ مثبت خازن دیگر) چقدر می‌شود؟

حل: وقتی خازنها به باتری وصل‌اند ولتاژ آنها ثابت می‌ماند ولی بار روی آنها تغییر می‌کند. ابتدا خازن معادل را به دست می‌آوریم

$$C_{eq}=\frac{C_۱C_۲}{C_۱+C_۲}=\frac{(۶)(۶)}{۶+۶}=۳\mu F$$

بار قبل از فشردگی برابر است با:

$$q_i=C_{eq}V=(۳)(۱۰)=۳۰\mu C$$

پس از فشردگی و نصف شدن فاصله صفحه‌ها ظرفیت دو برابر می‌شود یعنی $C'_۲=۱۲\mu C$. و ظرفیت معادل جدید برابر است با

$$C'_{eq}=\frac{C_۱C'_۲}{C_۱+C'_۲}=\frac{(۶)(۱۲)}{۶+۱۲}=۴\mu F$$

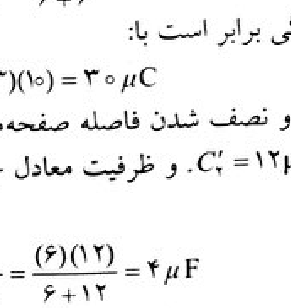
و

$$q_f=C'_{eq}V=(۴)(۱۰)=۴۰\mu C$$

(الف)
$$\Delta q=q_f-q_i=۴۰-۳۰=۱۰\mu C$$

(ب) می‌دانیم که در بهم بستن متوالی بار روی خازنها یکسان است لذا تغییر بار هر خازن همان $۱۰\mu F$ است و تغییر بار برای دو خازن $۲۰\mu C$ است.

۶۰- در شکل ۲۱-۵۲، $V=۱۲V$، $C_۱=C_۵=C_۶=۶/۰\mu F$، و $C_۲=C_۳=C_۴=۴/۰\mu F$ است. (الف) بار خالص ذخیره شده روی خازنها و (ب) بار روی خازن ۴ چقدر است؟



شکل ۲۱-۵۲ مسئلهٔ ۶۰

حل: باید ابتدا خازن معادل مدار را محاسبه کنیم و سپس بار خالص ذخیره شده روی خازنها را بدست آوریم.

$$C_{234} = C_2 + C_3 + C_4 = 12\,\mu F$$

$$C_{56} = C_5 + c_6 = 12\,\mu F$$

$$\frac{1}{C_{eq}} = \frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_{234}} + \frac{1}{C_{56}} \Rightarrow C_{eq} = 3\,\mu F$$

(الف)

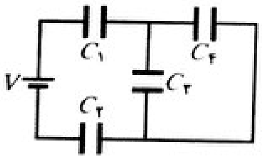
$$q_{eq} = C_{eq}V = (3)(12) = 36\,\mu F$$

$$q_{234} = q_{eq} = 36\,\mu C$$

(ب)

$$q_2 = q_3 = q_4 = \frac{q_{234}}{3} = 12\,\mu F$$

۶۱- در شکل ۲۱-۵۳، V=۹/۰V ، $C_1 = C_2$=۳۰μF ، و $C_3 = C_4$=۱۵μF است. بار روی خازن ۴ چقدر است؟



شکل ۲۱-۵۳ مسئلهٔ ۶۱

حل:

$$C_{34} = C_3 + C_4 = 30\,\mu F$$

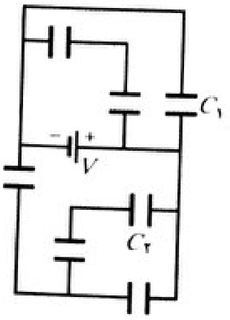
$$\frac{1}{C_{eq}} = \frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2} + \frac{1}{C_{34}} = \frac{1}{30} + \frac{1}{30} + \frac{1}{30} \Rightarrow C_{eq} = 10\,\mu F$$

$$q_{eq} = q_{34} = C_{eq}V = (10)(9) = 90\,\mu C$$

$$V_3 = V_4 = \frac{q_{34}}{C_{34}} = \frac{90}{30} = 3\,V$$

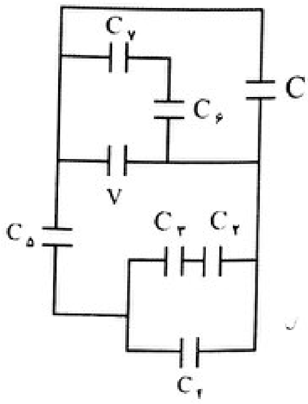
$$q_4 = C_4V_4 = (15)(3) = 45\,\mu C$$

۶۲- در شکل ۲۱-۵۴، اختلاف پتانسیل V باتری برابر با ۱۰/۰μF ، و ظرفیت هر یک از هفت خازن برابر با ۱۰/۰μF است. بار روی (الف) خازن ۱ و (ب) خازن ۲ چقدر است؟



شکل ۲۱-۵۴ مسئلهٔ ۶۲

حل:



(الف)

$$V_1 = V = 10\,V$$

$$q_1 = C_1V_1 = (10)(10) = 100\,\mu C$$

(ب)

$$C_{23} = \frac{10}{2} = 5\,\mu F$$

$$C_{234} = C_{23} + C_4 = 5 + 10 = 15\,\mu F$$

خازن معادل مجموعه پایین را می‌توان به دست آورد.

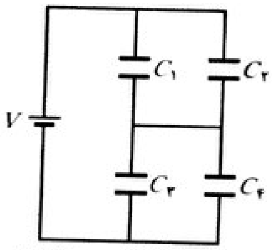
$$C_{eq} = \frac{C_5C_{234}}{C_5 + C_{234}} = \frac{(10)(15)}{10+15} = 6\,\mu F$$

$$q_{eq} = q_5 = q_{234} = C_{eq}V = (6)(10) = 60\,\mu F$$

$$V_4 = V_{23} = \frac{q_{234}}{C_{234}} = \frac{60}{15} = 4\,V$$

$$q_2 = q_{23} = C_{23}V_{23} = (5)(4) = 20\,\mu C$$

۶۳- در شکل ۲۱-۵۵، V=۱۲V ، $C_1 = C_4$=۲/۰μF ، C_2=۴/۰μF و C_3=۱/۰μF است. بار روی خازن ۴ چقدر است؟



شکل ۲۱-۵۵ مسئلهٔ ۶۳

حل:

$$C_{12} = C_1 + C_2 = 6\,\mu F \qquad C_{34} = C_3 + C_4 = 3\,\mu F$$

$$C_{eq} = \frac{C_{12}C_{34}}{C_{12} + C_{34}} = \frac{(6)(3)}{6+3} = 2\,\mu F$$

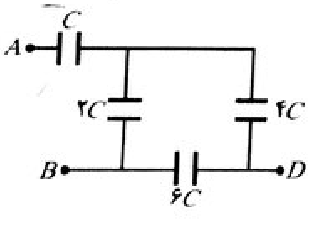
$$q_{eq} = C_{eq}V = (2)(12) = 24\,\mu C$$

$$q_{34} = q_{eq} = 24\,\mu C$$

$$V_{34} = V_3 = V_4 = \frac{q_{34}}{C_{34}} = 8\,V$$

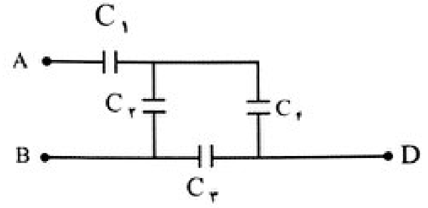
$$q_4 = C_4V_4 = (2)(8) = 16\,\mu C$$

۶۴- ظرفیتهای چهار خازن نشان‌داده شده در شکل ۲۱-۵۶ برحسب کمیت معین C داده شده‌اند. (الف) اگر C=۵۰μF باشد، ظرفیت معادل میان نقطه‌های A و B چقدر است؟ (*راهنمایی:* نخست تصور کنید که یک باتری میان این دو نقطه وصل شده است؛ سپس مدار را به یک ظرفیت معادل تبدیل کنید.) (ب) این کار را برای نقطه‌های A و D تکرار کنید.



شکل ۲۱-۵۶ مسئلهٔ ۶۴

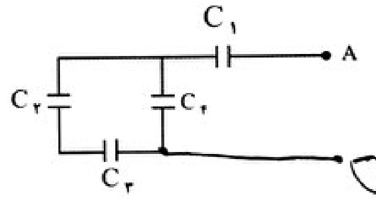
حل: (الف) از دیدگاه ورودی‌های A و B مدار به صورت زیر است:



داریم:

$$C_{24} = \frac{C_2C_4}{C_2+C_4} = \frac{(6)(4)C^2}{6C+4C} = 2/4C$$
$$C_{234} = C_3 + C_{24} = 2C + 2/4C = 4/4C$$
$$C_{eq} = \frac{C_1C_{234}}{C_1+C_{234}} = \frac{(C)(4/4C)}{C+4/4C} = 0/81C$$
$$= (0/81)(50) = 40/5\mu F$$

(ب) از دیدگاه ورودی‌هایA و D مدار به صورت زیر است:



داریم:

$$C_{23} = \frac{C_2C_3}{C_2+C_3} = \frac{(2C)(6C)}{2C+6C} = 1/5C$$
$$C_{234} = C_{23} + C_4 = 1/5C + 4C = 5/5C$$
$$C_{eq} = \frac{C_1C_{234}}{C_1+C_{234}} = \frac{(C)(5/5C)}{C+5/5C} = 0/846C$$
$$= (0/846)(50) = 42/3\mu C$$

۶۵- خازنی به ظرفیت $C_1 = 6/00\mu F$ به طور متوالی به خازنی با ظرفیت $C_2 = 4/00\mu F$ بسته شده و اختلاف پتانسیل ۲۰۰ V به دو سر این دو اعمال شده است. (الف) ظرفیت معادل را محاسبه کنید. (ب) بار q_1 و (پ) اختلاف پتانسیل V_1 دو سرخازن ۱ و (ت) q_2 و (ث) V_2 دو سرخازن ۲ چقدر است؟

حل: (الف) $C_{eq} = \frac{C_1C_2}{C_1+C_2} = \frac{(6)(4)}{6+4} = 2/4\mu F$

(ب) $q_1 = q_{eq} = C_{eq}V_{\text{باتری}} = (2/4)(200) = 480\mu C$

(پ) $V_1 = \frac{q_1}{C_1} = \frac{480}{6} = 80V$

(ت) $q_2 = q_{eq} = 480\mu C$

(ث) $V_2 = \frac{q_2}{C_2} = \frac{480}{4} = 120V$

۶۶- مسئلهٔ ۶۵ را برای همان دو خازن، که اینک به طور موازی بسته شده‌اند تکرار کنید.

حل: (الف) $C_{eq} = C_1 + C_2 = 6 + 4 = 10\mu F$

(ب) $q_1 = C_1V_{\text{باتری}} = (6)(200) = 1200\mu C$

(پ) $V_1 = V_2 = V_{\text{باتری}} = 200V$

(ت) $q_2 = C_2V_{\text{باتری}} = (4)(200) = 800\mu C$

(ث) $V_2 = 200V$

۶۷- خازنی با ظرفیت نامعلوم C تا پتانسیل 100V باردار شده و به دو سر خازنی با ظرفیت $60\mu F$ که در ابتدا بدون بار است وصل شده است. اگر اختلاف پتانسیل نهایی دوسر خازن $60\mu F$ برابر با 40V باشد، C چقدر است؟

حل:

$$q_{\text{ک}} = CV = 100C$$
$$C_{eq} = C_1 + C_2 = C + 60$$
$$V' = \frac{q_{\text{ک}}}{C_{eq}} \Rightarrow 40 = \frac{100C}{C+60} \Rightarrow C = 40\mu F$$

۶۸- یک خازن استوانه‌ای، مشابه شکل ۲۱-۶ دارای شعاعهای a و b است. نشان دهید که نیمی از انرژی پتانسیل الکتریکی در داخل استوانه‌ای به شعاع $r = \sqrt{ab}$ ذخیره شده است.

حل: با استفاده از قانون گاوس، میدان بین دو پوسته رسانای خازن استوانه‌ایی برابر است با $E = \frac{q}{2\pi\varepsilon_0 Lr}$ لذا داریم

$$u = \frac{1}{2}\varepsilon_0E^2 = \frac{q^2}{8\pi^2\varepsilon_0L^2r^2}$$

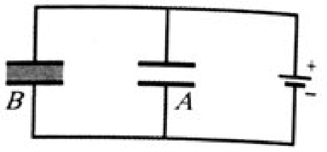
و انرژی ذخیره شده بین دو پوسته برابر است با

$$U = \int u\,dV = \int_a^b \frac{q^2}{8\pi^2\varepsilon_0L^2r^2}(2\pi r\,dr\,L)$$
$$= \frac{q^2}{4\pi\varepsilon_0L}Ln\frac{b}{a}$$

انرژی ذخیره شده از $r = a$ تا r برابر است $U_r = \frac{q^2}{4\pi\varepsilon_0L}Ln\frac{r}{a}$، با توجه به صورت مسئله شرط $U_r = \frac{1}{2}U$ طبق عملیات به دست می‌آید.

$$\frac{q^2}{4\pi\varepsilon_0L}Ln\frac{r}{a} = \left(\frac{1}{2}\right)\left(\frac{q^2}{4\pi\varepsilon_0L}\right)Ln\frac{b}{a}$$
$$\Rightarrow Ln\frac{r}{a} = \frac{1}{2}Ln\frac{b}{a} = Ln\sqrt{\frac{b}{a}} \Rightarrow \frac{r}{a} = \sqrt{\frac{b}{a}}$$
$$\Rightarrow r = \sqrt{ab}$$

۶۹- در شکل ۲۱-۵۷، دو خازن تخت A و B به طور موازی به دو سر یک باتری 600V بسته شده‌اند. مساحت هر صفحه $80/0cm^2$ و فاصلهٔ صفحه‌ها $3/00mm$ است. خازن A پر از هوا، و خازن B با دی‌الکتریکی با ثابت دی‌الکتریک $\kappa = 2/60$ پر شده است. بزرگی میدان الکتریکی در داخل (الف) دی‌الکتریک خازن B و (ب) هوای خازن A چقدر است؟ چگالیهای بار آزاد σ روی صفحهٔ با پتانسیل بالاتر (پ) خازن A و (ت) خازن B چقدر است؟ (ت) چگالی بار σ' که روی سطح بالایی دی‌الکتریک القا می‌شود چقدر است؟



شکل ۲۱-۵۷ مسئلهٔ ۶۹

حل: (الف) و (ب) چون اختلاف پتانسیل دو سر خازنها یکسان و ثابت است در نتیجه میدان در خازنها نیز ثابت و یکسان است.

$$E = \frac{V}{d} = \frac{600}{3\times10^{-3}} = 2\times10^{5}\ \text{V/m}$$

(پ)
$$\sigma_A = \varepsilon_\circ E = (8/85\times10^{-12})(2\times10^{5}) = 1/77\times10^{-6}\ \text{C/m}^2$$

(ت)
$$\sigma_B = \kappa\varepsilon_\circ E = \kappa\sigma_A = (2/6)(1/77\times10^{-6}) = 4/6\times10^{-6}\ \text{C/m}^2$$

(ث) همانطور که انتظار داشتیم چون میدان در خازنها یکسان است لذا چگالی بار روی خازن B باید بیشتر باشد که نتیجه به دست آمده این را تأیید می‌کند و مقدار بار اضافی، بار القایی می‌باشد.

$$\sigma' = \sigma_A - \sigma_B = -2/83\times10^{-6}\ \text{C/m}^2$$

۷۰- اختلاف پتانسیل ۳۰۰V به دو سر یک ترکیب متوالی شامل دو خازن با ظرفیتهای $C_1=2/00\mu F$ و $C_2=8/00\mu F$ اعمال شده است. (الف) بار q_1 و (ب) اختلاف پتانسیل V_1 دو سر خازن ۱ و (پ) q_2 و (ت) V_2 دو سر خازن ۲ چقدر است؟ سپس خازنهای *باردار شده* را از یکدیگر و از باتری جدا می‌کنیم. آنگاه با اتصال صفحه‌های هم *علامت* به یکدیگر، خازنها را دوباره به هم وصل می‌کنیم (از باتری استفاده نمی‌شود). اکنون (ث) q_1، (ج) V_1، (چ) q_2، و (ح) V_2 چقدرند؟ *به جای این* فرض کنید که خازنهای باردار شده در قسمت (الف) را با اتصال صفحه‌های با *علامت مخالف*، دوباره به هم متصل کنیم. اکنون (خ) q_1، (د) V_1، (ذ) q_2، و (ر) V_2 چقدرند؟

حل: با محاسبه ظرفیت معادل می‌توان بار کل و بار روی هر خازن را به دست آورد.

$$C_{eq} = \frac{C_1C_2}{C_1+C_2} = \frac{(2)(8)}{2+8} = 1/6\,\mu\text{F}$$

$$q_{کل} = q_1 = q_2 = C_{eq}V = (1/6)(300) = 480\,\mu\text{C}$$

(الف) و (ب)
$$q_1 = 480\,\mu\text{C}$$

$$V_1 = \frac{q_1}{C_1} = \frac{480}{2} = 240\ \text{V}$$

(پ) و (ت)
$$q_2 = 480\,\mu\text{C}$$

$$V_2 = \frac{q_2}{C_2} = \frac{480}{8} = 60\ \text{V}$$

پس از اتصال، بار کل روی مجموعه خازنها برابر است با

$$q'_{کل} = q_1 + q_2 = 480 + 480 = 960\,\mu\text{C}$$

$$V' = \frac{q'_1}{C_1} = \frac{q'_2}{C_2} = \frac{q}{C_1+C_2} = \frac{960}{2+8} = 96\ \text{V}$$

(ث) تا (ح)

$$\frac{q'_1}{2} = \frac{q'_2}{8} = 96$$

$$q'_1 = 192\,\mu\text{C} \qquad V'_1 = 96\ \text{V}$$

$$q'_2 = 768\,\mu\text{C} \qquad V'_2 = 96\ \text{V}$$

$$q = 0 \qquad q'_1 = q'_2 = 0 \qquad V'_1 = V_2 = 0$$

۷۱- خازن معینی را تا اختلاف پتانسیل V باردار می‌کنیم. اگر بخواهیم انرژی ذخیره شده در خازن را به میزان ۱۰٪ افزایش دهیم، V را باید چند درصد افزایش دهیم؟

حل:

$$U = \frac{1}{2}CV^2$$

$$U + \Delta U = \frac{1}{2}C(V+\Delta V)^2$$

$$\frac{U+\Delta U}{U} = \frac{\frac{1}{2}C(V+\Delta V)^2}{\frac{1}{2}CV^2}$$

$$1 + \frac{\Delta U}{U} = \left(1 + \frac{\Delta V}{V}\right)^2 \Rightarrow$$

$$1 + 0/1 = \left(1 + \frac{\Delta V}{V}\right)^2 \Rightarrow \frac{\Delta V}{V} = 0/049 \quad \text{یا} \quad 4/9\%$$

۷۲- دو صفحهٔ مسی، یک ورقهٔ میکا (به ضخامت ۰/۱۰mm، $\kappa=5/4$)، یک ورقهٔ شیشه‌ای (به ضخامت ۲/۰mm، $\kappa=7/0$)، و یک تیغهٔ پارافین (به ضخامت ۱/۰cm، $\kappa=2/0$) در اختیار داریم. برای ساختن یک خازن تخت با بیشترین مقدار C، کدامیک را باید میان صفحه‌های مسی قرار دهیم؟

حل: (الف) پس از قرار دادن دی‌الکتریک به ضخامت b یک مجموعه دو خازنی داریم که ظرفیت هر یک برابرند با

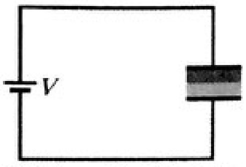
$$C_1 = \frac{\varepsilon_\circ A}{d-b} \qquad C_2 = \frac{\kappa\varepsilon_\circ A}{b}$$

$$\frac{1}{C} = \frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2} = \frac{d-b}{\varepsilon_\circ A} + \frac{b}{\kappa\varepsilon_\circ A} = \frac{1}{\varepsilon_\circ A}\left(d - b + \frac{b}{\kappa}\right)$$

$$C = \frac{\varepsilon_\circ A}{d - b\left(1 - \frac{1}{\kappa}\right)}$$

ملاحظه می‌کنیم که هرچه $b\left(1-\frac{1}{\kappa}\right)$ بیشتر باشد مخرج کوچکتر و C بزرگتر می‌شود که با توجه به مقادیر داده شده درمی‌یابیم که باید از ورقهٔ میکا استفاده کنیم.

✓ **۷۳-** در شکل ۲۱-۵۸، یک خازن تخت به مساحت صفحه $2/00\times10^{-2}\ \text{m}^2$ با دو تیغهٔ دی‌الکتریک، هر یک به ضخامت ۲/۰۰mm پرشده است. ثابت دی الکتریک یکی از تیغه‌ها ۳/۰۰ و دیگری ۴/۰۰ است. باتری ۷/۰۰V چقدر بار روی خازن ذخیره می‌کند؟ SSM



شکل ۲۱-۵۸ مسئلهٔ ۷۳

حل: این آرایش را می‌توان ترکیبی از دو خازن متوالی C_1 و C_2 با دی‌الکتریکهایی با ثابتهای k_1 و k_2 درنظر گرفت.

$$C_1 = \frac{\kappa_1 \varepsilon_0 A}{d/2} = \frac{2\kappa_1 \varepsilon_0 A}{d}$$

$$C_2 = \frac{\kappa_2 \varepsilon_0 A}{d/2} = \frac{2\kappa_2 \varepsilon_0 A}{d}$$

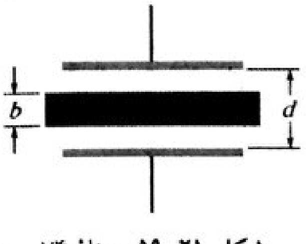
$$C_{eq} = \frac{C_1 C_2}{C_1 + C_2} = \left(\frac{\kappa_1 \kappa_2}{\kappa_1 + \kappa_2}\right)\left(\frac{2\varepsilon_0 A}{d}\right)$$

$$= \left(\frac{3\times 4}{3+4}\right)\frac{(2)(8.85\times 10^{-12})(2\times 10^{-2})}{4\times 10^{-3}} = 1.52\times 10^{-10}\ \text{F}$$

بنابراین باری که روی خازن ذخیره می‌شود برابر است با

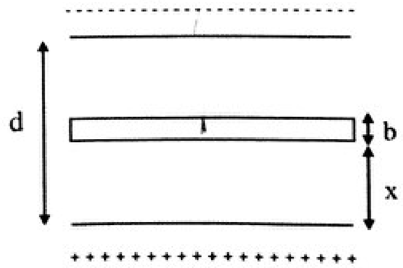
$$q = C_{eq}V = (1.52\times 10^{-10})(7) = 1.06\times 10^{-9}\ \text{C}$$

۷۴- همان‌گونه که در شکل ۲۱-۵۹ نشان داده شده است، یک تیغهٔ مسی به ضخامت $b=2.00\text{mm}$ داخل یک خازن تخت به مساحت صفحهٔ $A=2.40\text{cm}^2$ و فاصلهٔ صفحه‌های $d=5.00\text{mm}$ قرار داده شده است؛ تیغه دقیقاً در بین دو صفحه قرار دارد. (الف) ظرفیت خازن پس از آنکه تیغه گذاشته شود چقدر است؟ (ب) اگر بار $q=3.40\mu\text{C}$ روی صفحه‌ها بدون تغییر باقی بماند، نسبت انرژی ذخیره شده پیش از قرار دادن تیغه به مقدار آن پس ازقراردادن تیغه چقدر است؟ (پ) موقع قراردادن تیغه چقدر کار انجام شده است؟ (ت) آیا تیغه به داخل صفحه‌ها کشیده می‌شود یا باید آن را هل داد؟



شکل ۲۱-۵۹ مسئلهٔ ۷۴

حل:



$$\Delta V = -\int_d^{b+x} E_0 dS - \int_{b+x}^{x} E dS - \int_x^0 E_0 dS$$

که در آن $E_0 = \frac{\sigma}{\varepsilon_0}$ و $E=0$ در نتیجه داریم:

$$\Delta V = -\frac{\sigma}{\varepsilon_0}(b+x-d) - 0 - \frac{\sigma}{\varepsilon_0}(0-x) = \frac{\sigma}{\varepsilon_0}(d-b)$$

$$\Delta V = \frac{q}{\varepsilon_0 A}(d-b)$$

$$C = \frac{q}{\Delta V} = \frac{q}{\frac{q}{\varepsilon_0 A}(d-b)} = \frac{\varepsilon_0 A}{d-b}$$

$$= \frac{(8.85\times 10^{-12})(2.4\times 10^{-4})}{3\times 10^{-3}} = 7.07\times 10^{-13}\ \text{F}$$

(ب) توجه داریم که بار ثابت می‌ماند، انرژی ذخیره شده در خازن در دو حالت عبارت‌اند از:

$$C_i = \frac{\varepsilon_0 A}{d}$$

$$U_i = \frac{q^2}{2C_i} = \frac{q^2 d}{2\varepsilon_0 A} = 13.61\text{J}$$

$$C_f = \frac{\varepsilon_0 A}{d-b}$$

$$U_f = \frac{q^2}{2C_f} = \frac{q^2(d-b)}{2\varepsilon_0 A} = 8.16\text{J}$$

$$\frac{U_i}{U_f} = \frac{13.61}{8.16} = 1.67$$

(پ) کار انجام شده برابر است با

$$W = \Delta U = U_f - U_i = 8.16 - 13.61 = -5.44\text{J}$$

(ت) چون کار منفی است، لذا برای داخل کردن تیغه نه تنها انرژی از خارج سیستم صرف نمی‌شود بلکه مقداری انرژی نیز آزاد می‌شود یا به بیان دیگر تیغه به درون صفحات کشیده می‌شود.

۷۵- مسئلهٔ ۷۴ را این بار با این فرض که اختلاف پتانسیل $V=85.0\text{V}$ به جای بار ثابت بماند، تکرار کنید.

حل: (الف) ظرفیت خازن مقدار مشخصی است و تغییر نمی‌کند.

(ب)

$$\frac{U_i}{U_f} = \frac{\frac{1}{2}C_i V^2}{\frac{1}{2}C_f V^2} = \frac{C_i}{C_f} = \frac{\frac{\varepsilon_0 A}{d}}{\frac{\varepsilon_0 A}{(d-b)}} = \frac{d-b}{d} = \frac{5-2}{5} = 0.6$$

(پ) کار انجام شده برابر است با

$$W = \Delta U = U_f - U_i = \frac{1}{2}(C_f - C_i)V^2 = \frac{\varepsilon_0 A}{2}\left(\frac{1}{d-b} - \frac{1}{d}\right)V^2$$

که با قرار دادن مقادیر داده شده داریم $W = 1.02\times 10^{-9}\ \text{J}$.

(ت) چون کار مثبت است لذا تیغه را باید با صرف نیرو به داخل صفحات وارد نمود. البته می‌توان تفسیر دیگری را انجام داد و تفسیر کرد که با آنکه کار مثبت است ولی باز تیغه به درون کشیده می‌شود. در مسئله ۷۴ که خازن از باتری قطع شد

و تیغه به داخل کشیده شد F دقیقاً با $-dU/dx$ داده می‌شود. ولی وقتی باتری قطع نشده باشد این رابطه برقرار نیست چون در این حالت نیروی وارد بر تیغه پایستار نیست و در اینجا این توزیع بار در تیغه است که باعث می‌شود تیغه به فضای میان صفحه‌های خازن کشیده شود و این عمل باعث افزایش انرژی پتانسیل ذخیره شده توسط باتری در خازن می‌شود.

۷۶- چند خازن به ظرفیت $۲/۰\mu F$ در اختیار داریم، که هر یک قادرند پتانسیل $۲۰۰V$ را تحمل کنند، بدون آنکه دچار فروشکست الکتریکی شوند(وضعیتی که در آن بارها به جای ذخیره شدن، رسانش می‌یابند). چگونه می‌توانید ترکیبی از این خازنها را سوار کنید تا ظرفیت معادلی برابر با (الف) $۰/۴۰\,\mu F$ و (ب) $۱/۲\mu F$ به دست آید و هر یک از ترکیبها بتوانند $۱۰۰۰V$ را تحمل کنند؟

حل: شرط آنکه مجموعه بتواند پتانسیل ۱۰۰۰ ولت را تحمل کند این است که در هر ردیف ۵ خازن $\left(\frac{۱۰۰۰}{۲۰۰}\right)$ داشته باشیم. ظرفیت معادل هر ردیف برابر است با:

$$C_۱ = \frac{C}{N} = \frac{۳}{۵} = ۰/۴\,\mu F$$

اگر n ردیف مشابه داشته باشیم که با هم موازی باشند ظرفیت معادل کل برابر است با

$$C_{eq} = nC_۱ = ۰/۴\,n$$

(الف) $C_{eq} = ۰/۴\,\mu F$

$$۰/۴ = ۰/۴\,n \Rightarrow n = ۱$$

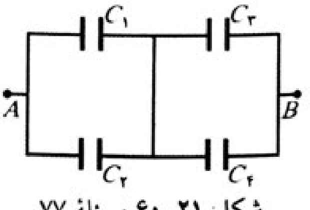
یک ردیف با ۵ خازن.

(ب) $C_{eq} = ۱/۲\,\mu F$

$$۱/۲ = ۰/۴\,n \Rightarrow n = ۳$$

سه ردیف هر ردیف با ۵ خازن.

۷۷- شکل ۲۱-۶۰ آرایشی شامل چهار خازن را نشان می‌دهد که در نقطه‌های A و B به مدار بزرگتری وصل شده‌اند. ظرفیتها عبارت‌اند از $C_۱ = ۱۰\mu F$ و $C_۲ = C_۳ = C_۴ = ۲۰\,\mu F$. بار روی خازن ۱ برابر با $۳۰\,\mu C$ است. بزرگی اختلاف پتانسیل $V_A - V_B$ چقدر است؟



شکل ۲۱-۶۰ مسئلهٔ ۷۷

حل:

$$C_{۱۲} = C_۱ + C_۲ = ۱۰ + ۲۰ = ۳۰\,\mu F$$

$$V_{۱۲} = V_۱ = \frac{q_۱}{C} = \frac{۳۰}{۱۰} = ۳\,V$$

$$q_{۱۲} = C_{۱۲}V_{۱۲} = (۳۰)(۳) = ۹۰\,\mu C$$

$$C_{۳۴} = C_۳ + C_۴ = ۲۰ + ۲۰ = ۴۰\,\mu F$$

$$q_{۳۴} = q_{۱۲} = ۹۰\,\mu C$$

$$V_{۳۴} = \frac{q_{۳۴}}{C_{۳۴}} = \frac{۹۰}{۴۰} = ۲/۲۵V$$

$$V_A - V_B = V_{۱۲} + V_{۳۴} = ۳ + ۲/۲۵ = ۵/۲۵\,V$$

۷۸- یک باتری $۱۰V$ به رشته‌ای از n خازن متوالی هر یک به ظرفیت $۲/۰\mu F$ متصل شده است. اگر انرژی کل ذخیره شده در خازنها $۲۵\,\mu J$ باشد، n چند است؟

حل: ظرفیت معادل n خازن که به طور متوالی بسته شده‌اند برابر است با

$$C_{eq} = \frac{C}{n}$$

$$W = \frac{۱}{۲}C_{eq}V^۲ \Rightarrow ۲۵\times۱۰^{-۶} = \frac{۱}{۲}\left(\frac{۲\times۱۰^{-۶}}{n}\right)(۱۰)^۲$$

$$\Rightarrow n = ۴$$

۲۲ جریان و مقاومت الکتریکی

بخش ۲۲-۲ جریان الکتریکی

۱●- در مدت $۴/۰$ min جریان $۵/۰$ A در سیمی برقرار می‌شود، در این مدت از هر مقطع سیم (الف) چند کولن و (ب) چند الکترون، می‌گذرد؟

حل: (الف)
$$q = it = (۵)(۴)(۶۰) = ۱۲۰۰\,C$$

(ب)
$$N = \frac{q}{e} = \frac{۱۲۰۰}{۱/۶\times۱۰^{-۱۹}} = ۷/۵\times۱۰^{۲۱}$$

۲●●- شعاع کره‌ای رسانا و منزوی ۱۰۰ cm است. سیمی جریان ۱/۰۰۰۰۰۲۰ A را به کره می‌رساند و سیم دیگری یک جریان ۱/۰۰۰۰۰۰۰ A را از آن خارج می‌کند. افزایش پتانسیل به اندازهٔ ۱۰۰۰ V چقدر طول می‌کشد؟ **SSM**

حل: مقدار باری که در واحد زمان روی کره جمع می‌شود برابر است با

$$\Delta i = (۱/۰۰۰۰۰۲۰ - ۱/۰۰۰۰۰۰۰) = ۲\times۱۰^{-۶}\,A$$
$$\Delta q = (\Delta i)t$$
$$\Delta V = k\frac{\Delta q}{r} = k\frac{(\Delta i)t}{r}$$
$$\Rightarrow ۱۰۰۰ = (۹\times۱۰^{۹})\frac{(۲\times۱۰^{-۶})t}{۰/۱} \Rightarrow t = ۵/۶\times۱۰^{-۳}\,s$$

۳●●●- تسمهٔ بارداری به پهنای ۵۰ cm، در بین مولد بار الکتریکی و کره‌ای با سرعت ۳۰ m/s حرکت می‌کند. این تسمه بار را با آهنگ ۱۰۰ μA به داخل کره منتقل می‌کند. چگالی سطحی بار روی تسمه را محاسبه کنید.

حل: چنانچه فرض کنیم a پهنای تسمه و x طول متغییر آن باشد در اینصورت می‌توان نوشت

$$\sigma = \frac{q}{A} = \frac{q}{ax} \Rightarrow q = \sigma a x$$
$$\Rightarrow \frac{dq}{dt} = \sigma a\frac{dx}{dt} \Rightarrow i = \sigma a v \Rightarrow \sigma = \frac{i}{aV}$$
$$\sigma = \frac{۱۰۰\times۱۰^{-۶}}{(۵۰\times۱۰^{-۲})(۳۰)} = ۶/۶۷\times۱۰^{-۶}\,C/m^{۲}$$

بخش ۲۲-۳ چگالی جریان

۴●- جریان کوچک ولی قابل اندازه‌گیری $۱/۲\times۱۰^{-۱۰}$ A در یک سیم مسی به قطر ۲/۵ mm برقرار است. تعداد حاملهای بار بر یکای حجم $۸/۴۹\times۱۰^{۲۸}\,m^{-۳}$ است. با فرض اینکه جریان یکنواخت باشد، (الف) چگالی جریان و (ب) تندی سوقی الکترون را محاسبه کنید.

حل: (الف) بزرگی چگالی جریان برابر است با:

$$j = \frac{i}{A} = \frac{i}{\pi R^{۲}/۴} = \frac{۴(۱/۲\times۱۰^{-۱۰})}{\pi(۲/۵\times۱۰^{-۳})^{۲}} = ۲/۴\times۱۰^{-۵}\,A/m^{۲}$$

(ب) تندی رانشی الکترونها نیز برابر است با

$$v_d = \frac{j}{ne} = \frac{۲/۴\times۱۰^{-۵}}{(۸/۴۷\times۱۰^{۲۸})(۱/۶\times۱۰^{-۱۹})} = ۱/۸\times۱۰^{-۱۵}\,m/s$$

۵●- فیوز یک مدار الکتریکی سیمی است که چنان طراحی شده که اگر جریان از یک مقدار پیش‌بینی شده بیشتر شود ذوب می‌شود و مدار را باز می‌کند. فرض کنید که وقتی چگالی جریان به بیش از ۴۴۰ $A/cm^{۲}$ می‌رسد ماده به کار رفته در فیوز ذوب می‌شود. قطر یک سیم استوانه‌ای که برای محدود کردن جریان به ۰/۵۰ A در فیوز به کار می‌رود، باید چقدر باشد؟

حل:

$$j = \frac{i}{A} = \frac{i}{\pi r^{۲}} \Rightarrow r = \sqrt{\frac{i}{\pi J}} = \sqrt{\frac{۰/۵}{\pi(۴۴۰\times۱۰^{۴})}}$$
$$= ۱/۹\times۱۰^{-۴}\,m$$
$$D = ۲r = ۲(۱/۹\times۱۰^{-۴}) = ۳/۸\times۱۰^{-۴}\,m$$

۶●- سازمان ملی کدگذاری الکتریکی (امریکا)، بیشینهٔ جریانهای مجاز برای سیمهای مسی با روکش لاستیکی با قطرهای مختلف را تعیین می‌کند، که در جدول زیر (بخشی) از آن داده شده است. چگالی جریان مجاز را برحسب تابعی از قطر رسم کنید. کدام شمارهٔ سیم دارای بیشترین چگالی جریان مجاز است؟ (شمارهٔ سیستم نشان دهندهٔ قطر سیم و $۱mil = ۱۰^{-۳}$ in است)

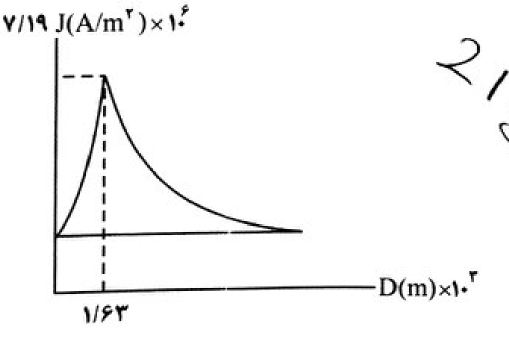
شمارهٔ سیم	۴	۶	۸	۱۰	۱۲	۱۴	۱۶	۱۸
قطر، میل	۲۰۴	۱۶۲	۱۲۹	۱۰۲	۸۱	۶۴	۵۱	۴۰
جریان مجاز، A	۷۰	۵۰	۳۵	۲۵	۲۰	۱۵	۶	۳

حل: برای چگالی جریان داریم

$$j = \frac{i}{A} = \frac{i}{\pi R^{۲}} = \frac{۴i}{\pi D^{۲}} \qquad (D = ۲R)$$

بزرگی چگالی جریان را در یکاهای SI به دست می‌آوریم و جدول داده شده را بازنویسی می‌کنیم.

شماره سیم	قطر $\times۱۰^{-۳}$ (m)	جریان مجاز (A)	چگالی مجاز $\times۱۰^{۶}$ (A/m²)
۴	۵/۱۸	۷۰	۳/۳۲
۶	۴/۱۱	۵۰	۳/۷۷
۸	۳/۲۸	۳۵	۴/۱۴
۱۰	۲/۶	۲۵	۴/۷۱
۱۲	۲/۰۶	۲۰	۶
۱۴	۱/۶۳	۱۵	۷/۱۹
۱۶	۱/۳۰	۶	۴/۵۲
۱۸	۱/۰۲	۳	۳/۶۷



که با کمی دقت ملاحظه می‌شود بیشترین چگالی مربوط به سیم شمارهٔ ۱۴ است.

●۷- باریکه‌ای شامل $۲/۰\times۱۰^{۸}$ یون مثبت دو بار یونیده در هر سانتی‌متر مکعب است که همگی آنها با تندی $۱/۰\times۱۰^{۵}$ m/s به سوی شمال حرکت می‌کنند. (الف) بزرگی و (ب) جهت چگالی جریان $\vec{J}$ چیست؟ (پ) به چه کمیت دیگری برای محاسبهٔ جریان کل i در این باریکهٔ یونی نیاز دارید؟ **SSM WWW**

حل: (الف) چگالی جریان از رابطه زیر به دست می‌آید.

(ضریب ۲ را باید به خاطر یونیزه بودن مولکولها اضافه کرد، $(q=۲e$.

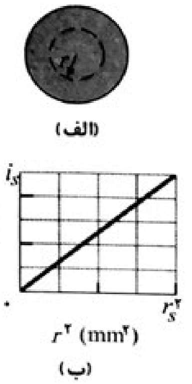
$$n=۲\times۱۰^{۸}\ /\mathrm{cm}^{۳}=۲\times۱۰^{۱۴}\ \mathrm{m}^{-۳}$$

$$j=nqv=n(۲e)v=(۲\times۱۰^{۱۴})(۲\times۱/۶\times۱۰^{-۱۹})(۱\times۱۰^{۵})$$
$$=۶/۴\ \mathrm{A/m^{۲}}$$

(ب) چون یونها مثبت هستند لذا جهت جریان و چگالی جریان در جهت حرکت یونها می‌باشد و در اینجا به سوی شمال است.

(پ) باید سطح مقطع بار دیگر مشخص باشد تا بتوان جریان را محاسبه کرد.

●۸- یک سیم استوانه‌ای معین حامل جریان است. دایره‌ای به شعاع r نسبت به محور مرکزی آن در شکل ۲۲-۲۴ الف رسم می‌کنیم و می‌خواهیم جریان i داخل دایره را تعیین کنیم. شکل ۲۲-۲۴ ب جریان i را برحسب تابعی از $r^{۲}$ نشان می‌دهد. مقیاس محور قائم با $i_s=۴/۰\ \mathrm{mA}$ و محور افقی با $r_s^{۲}=۴/۰\ \mathrm{mm}$ مشخص شده است. (الف) آیا چگالی جریان یکنواخت است؟ (ب) اگر این طور است بزرگی آن چقدر است؟



شکل ۲۲-۲۴ مسئلهٔ ۸

حل: (الف) برای چگای جریان داریم $j=\dfrac{L}{\pi r^{۲}}$ لذا از روی شکل در می‌یابیم که که چگالی جریان یکنواخت است.

(ب)
$$j=\frac{i}{\pi r^{۲}}=\frac{۰/۰۰۵}{\pi(۴\times۱۰^{-۶})}=۳/۹\times۱۰^{۳}\ \mathrm{A/m^{۲}}$$

از این نتیجه نیز دیده می‌شود که چگالی جریان یکنواخت است.

●●۹- چقدر طول می‌کشد تا الکترونها از باتری اتومبیل به استارت موتور برسند؟ فرض کنید که جریان ۳۰۰ A و الکترونها از طریق سیم مسی با مساحت مقطع $۰/۲۱\ \mathrm{cm}^{۲}$ و به طول $۰/۸۵$ m حرکت می‌کنند. تعداد حاملهای بار بر یکای حجم $۸/۴۹\times۱۰^{۲۸}\ \mathrm{m}^{-۳}$ است. **ILW**

حل:
$$j=nev_d\Rightarrow\frac{i}{A}=nev_d\Rightarrow v_d=\frac{i}{neA}$$
$$t=\frac{L}{v_d}=\frac{L}{i/neA}=\frac{LneA}{i}$$

که با قرار دادن مقادیر داده شده داریم

$t=۸۰۹/۵s$ یا $۱۳/۵\mathrm{min}$

●●۱۰- درنزدیکی سطح زمین، چگالی پروتونها در باد خورشیدی (جریانی از ذره‌های گسیل شده از خورشید) $۸/۷۰\ \mathrm{cm}^{-۳}$ و تندی آنها ۴۷۰ km/s است. (الف) چگالی جریان این پروتونها را پیدا کنید. (ب) اگر میدان مغناطیسی زمین اینها را منحرف نکند و پروتونها به زمین برخورد کنند. در این صورت کل جریانی که زمین دریافت می‌کند چقدر است؟

حل: (الف) با توجه به اینکه $۱cm^{۳}=۱۰^{-۶}\ m^{۳}$ است داریم:

$$j=nev=\left(\frac{۸/۷}{۱۰^{-۶}}\right)(۱/۶\times۱۰^{-۱۹})(۴۷۰\times۱۰^{۳})$$
$$=۶/۴۵\times۱۰^{-۷}\ \mathrm{A/m^{۲}}$$

(ب) سطح استوای زمین در مقابل این باد خورشیدی قرار دارد.

$$A=\pi R^{۲}=(۳/۱۴)(۶/۴\times۱۰^{۶})^{۲}=۱/۲۹\times۱۰^{۱۴}\ \mathrm{m^{۲}}$$
$$i=jA=(۶/۴۵\times۱۰^{-۷})(۱/۲۹\times۱۰^{۱۴})=۸/۴۴\times۱۰^{۷}\ A$$

●●۱۱- بزرگی $J(r)$ چگالی جریان در یک سیم استوانه‌ای معین برحسب تابعی از فاصلهٔ شعاعی از مرکز مقطع سیم به صورت $J(r)=Br$ است، که در آن r برحسب متر، J برحسب آمپر بر متر مربع و $B=۲/۰۰\times۱۰^{۵}\ \mathrm{A/m^{۳}}$ است. این تابع خارج از شعاع $۲/۰۰$ mm سیم برقرار است. اگر پهنای شعاعی حلقه $۱۰/۰\ \mu$m و در فاصلهٔ شعاعی $۱/۲۰$mm واقع باشد، چقدر جریان در پهنای این حلقه هم مرکز با سیم وجود دارد؟

حل:
$$i=\int jdA=\int_{۱/۲}^{۱/۲۱}Br۲\pi r\,dr=\frac{۲}{۳}\pi B\left[(۱/۲۱)^{۳}-(۱/۲)^{۳}\right]$$
$$=\frac{۲}{۳}(۳/۱۴)(۲\times۱۰^{۵})\left[(۱/۲۱)^{۳}-(۱/۲)^{۳}\right]$$
$$=۱/۸۲\times۱۰^{-۵}\ \mathrm{A}$$

●●۱۲- بزرگی J چگالی جریان در سیم معینی با مقطع دایره‌ای به شعاع $R=۲/۰۰$ mm با $J=(۳/۰۰\times۱۰^{۸})r^{۲}$ داده می‌شود، که در آن J برحسب آمپر بر متر مربع و r فاصلهٔ شعاعی برحسب متر است. چه جریانی از بخش بیرونی محدود شده به $r=۰/۹۰۰\ R$ و $r=R$ می‌گذرد؟

حل: $i = \int jdA = \int_{۰/۹R}^{R}(۳\times۱۰^{۸})r^{۲}۲\pi r\,dr$

$= (۳\times۱۰^{۸})(۲\pi)\left(\frac{۱}{۴}\right)\left[R^{۴}-(۰/۹R)^{۴}\right]$

$= ۲/۶\times۱۰^{-۳}\ \text{A}$

۱۳۰- اگر بزرگی چگالی جریان با (الف) $J_a = J_۰ r/R$ و (ب) $J_b = J_۰(۱-r/R)$ داده شود، جریان در سیمی به شعاع $R = ۳/۴۰\ \text{mm}$ چقدر است، r فاصلهٔ شعاعی و $J_۰ = ۵/۵۰\times۱۰^{۴}\ \text{A/m}^۲$ است؟ (پ) چه عملکردی چگالی جریان را در نزدیکی سطح سیم بیشینه می‌کند؟

حل: (الف) $i = \int jdA = \int_۰^R j_۰ \frac{r}{R} ۲\pi r\,dr = \frac{۲}{۳}\pi J_۰ R^۲$

$= \frac{۲}{۳}(۳/۱۴)(۵/۵\times۱۰^{۴})(۳/۴\times۱۰^{-۳})^۲ = ۱/۳۳\text{A}$

(ب) $i = \int jdA = \int_۰^R j_۰\left(۱-\frac{r}{R}\right)۲\pi r\,dr = ۲\pi J_۰\left[\frac{r^۲}{۲}-\frac{r^۳}{۳R}\right]_۰^R$

$= \frac{۱}{۳}\pi j_۰ R^۲ = \frac{۱}{۳}(۳/۱۴)(۵/۵\times۱۰^{۴})(۳/۴\times۱۰^{-۳})^۲$

$= ۰/۶۷\text{A}$

بخش ۲۲-۴ مقاومت و مقاومت ویژه

۱۴۰- مس و آلومینیوم در خط انتقال ولتاژ بالا که باید حامل جریان ۶۰/۰ A باشد به کار گرفته می‌شوند. مقاومت بر یکای طول ۰/۱۵۰Ω/km است. چگالیهای مس و آلومینیوم به ترتیب ۸۹۶۰kg/m³ و ۲۶۰۰kg/m³ است. (الف) بزرگی J چگالی جریان و (ب) جرم بر یکای طول λ را برای کابل مسی و (پ) J و (ت) λ را برای کابل آلومینیومی محاسبه کنید.

حل: (الف) برای مس داریم:

$R = \rho_{cu}\frac{L}{A} \Rightarrow ۰/۱۵ = (۱/۶۹\times۱۰^{-۸})\frac{(۱۰۰۰)}{A}$

$\Rightarrow A = ۱/۱۳\times۱۰^{-۴}\ \text{m}^۲$

$J_{cu} = \frac{i}{A} = \frac{۶۰}{(۱/۱۳\times۱۰^{-۴})} = ۵/۳۱\times۱۰^{۵}\ \text{A/m}^۲$

(ب) $\frac{m}{L} = \rho A = (۸۹۶۰)(۱/۱۳\times۱۰^{-۴}) = ۱/۰۱\text{kg/m}$

(پ) $R = \rho_{Al}\frac{L}{A} \Rightarrow ۰/۱۵ = (۲/۷۵\times۱۰^{-۸})\frac{۱۰۰۰}{A}$

$\Rightarrow A = ۱/۸۳\times۱۰^{-۴}\ \text{m}^۲$

$J_{Al} = \frac{i}{A} = \frac{۶۰}{۱/۸۳\times۱۰^{-۴}} = ۳/۲۸\times۱۰^{۵}\ \text{A/m}^۲$

(ت) $\frac{m}{L} = \rho A = (۲۶۰۰)(۱/۸۳\times۱۰^{-۴}) = ۰/۴۷۶\text{kg/m}$

۱۵۰- طول سیمی از نیکروم (آلیاژی از نیکل- کروم- آهن که معمولاً در سیم‌های گرم کننده به کار می‌رود.) ۱/۰m و مساحت مقطع آن ۱/۰ mm² است. هرگاه اختلاف پتانسیل اعمال شده بین دو سر آن ۲/۰V باشد، جریان ۴/۰A از آن می‌گذرد. رسانندگی σ نیکروم را محاسبه کنید.

حل: $R = \frac{V}{i} = \frac{۲}{۴} = ۰/۵\Omega$

$R = \rho\frac{L}{A} = \frac{۱}{\sigma}\frac{L}{A} \Rightarrow \sigma = \frac{L}{RA} = \frac{۱}{(۰/۵)(۱\times۱۰^{-۳})^۲}$

$= ۲\times۱۰^{۶}\ \frac{۱}{\Omega\cdot\text{m}}$

۱۶۰- مقاومت سیمی به طول ۴/۰۰m و قطر ۶/۰۰mm برابر با ۱۵/۰mΩ است. اختلاف پتانسیل ۲۳/۰ V به دو سر آن اعمال می‌شود. (الف) جریان در سیم چقدر است؟ (ب) بزرگی چگالی جریان چقدر است؟ (پ) مقاومت ویژهٔ مادهٔ سیم را محاسبه کنید. (ت) با استفاده از جدول ۲۲-۱ جنس سیم را مشخص کنید.

حل: **(الف)** جریان در سیم برابر است با:

$i = \frac{V}{R} = \frac{۲۳}{۱۵\times۱۰^{-۳}} = ۱/۵۳\times۱۰^{۳}\ \text{A}$

(ب) $j = \frac{i}{A} = \frac{۴i}{\pi D^۲} = \frac{۴(۱/۵۳\times۱۰^{۳})}{(۳/۱۴)(۶\times۱۰^{-۳})} = ۵/۴۱\times۱۰^{۷}\ \text{A/m}^۲$

(پ) با استفاده از جدول مشاهده می‌شود جنس سیم پلاتین است.

۱۷۰- قطر یک سیم رسانا ۱/۰ mm، طول آن ۲/۰ m و مقاومت آن ۵۰ mΩ است. مقاومت ویژهٔ مادهٔ آن چقدر است؟

حل: $A = \pi r^۲ = (۳/۱۴)(۰/۵\times۱۰^{-۳})^۲ = ۷/۸۵\times۱۰^{-۷}\ \text{m}^۲$

حال می‌توان ρ را به دست آورد.

$R = \frac{\rho L}{A} \Rightarrow ۰/۰۵ = \frac{\rho(۲)}{۷/۸۵\times۱۰^{-۷}} \Rightarrow \rho = ۲\times۱۰^{-۸}\ \Omega\cdot\text{m}$

۱۸۰- مقاومت سیمی برابر با R است. مقاومت سیم دیگری که از همان جنس ساخته شده و طول و قطر آن نصف شده باشد، چقدر است؟

حل: $R_۱ = R = \frac{\rho L_۱}{A_۱}$ $\qquad R_۲ = R = \frac{\rho L_۲}{A_۲}$

از تقسیم کردن دو رابطه بر هم داریم:

$\frac{R_۲}{R} = \frac{L_۲A_۱}{L_۱A_۲} = \left(\frac{۱}{۲}\right)(۴) = ۲ \Rightarrow R_۲ = ۲R$

۱۹۰- پیچه‌ای از ۲۵۰ دور سیم مسی نمره ۱۶ (قطر = ۱/۳mm) به صورت یک لایه دور استوانه‌ای به شعاع ۱۲cm تشکیل شده است. مقاومت این پیچه چقدر است؟ ضخامت عایق بندی قابل چشمپوشی است (از جدول ۲۲-۱ استفاده کنید.) **SSM**

حل: $A = \pi r^۲ = \pi\left(\frac{D}{۲}\right)^۲ = (۳/۱۴)\left(\frac{۱/۳۳\times۱۰^{-۳}}{۲}\right)^۲$

$= ۱/۳۳\times۱۰^{-۶}\ \text{m}^۲$

و طول سیم برابر است با

$L = n۲\pi r = (۲۵۰)(۲)(۳/۱۴)(۰/۱۲) = ۱۸۸/۴\text{m}$

حال می‌توان R را به دست آورد.

$$R=\frac{\rho L}{A}=\frac{(۱/۶۹\times۱۰^{-۸})(۱۸۸/۴)}{۱/۳۳\times۱۰^{-۶}}=۲/۴\Omega$$

۲۰●- اگر جریانی به کوچکی ۵۰ mA از نزدیکی قلب انسان عبور کند باعث مرگ ناشی از برق گرفتگی می‌شود. یک برقکار با دستهای عرق کرده با دو رسانایی که هریک را با یک دست نگهداشته است تماس کامل پیدا می‌کند. اگر مقاومت او برابر با ۲۰۰۰ Ω باشد، ولتاژ مرگبار چقدر است؟ [redacted]

حل: ولتاژ مرگبار برابر است با

$$V=iR=(۵۰\times۱۰^{-۳})(۲۰۰۰)=۱۰۰\text{V}$$

۲۱●●- سیمی با مقاومت ۶/۰ Ω با دستگاه حدیده کشیده می‌شود به طوری که طول آن به سه برابر طول اولیه برسد. با فرض اینکه مقاومت ویژه و چگالی ماده تغییر نکند، مقاومت سیم بلندتر را پیدا کنید. **ILW SSM**

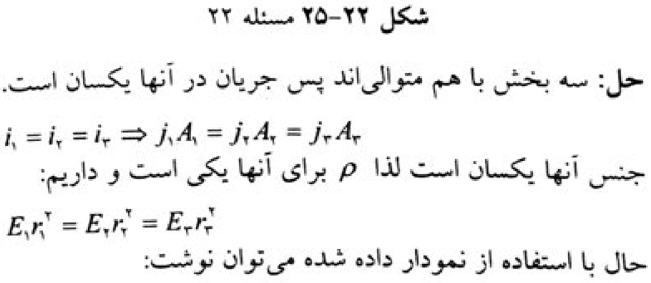
حل: وقتی سیم کشیده می‌شود حجم آن تغییر نمی‌کند.

$$V=A_۱L_۱=A_۲L_۲\Rightarrow\frac{A_۲}{A_۱}=\frac{L_۱}{L_۲}$$

$$\frac{R_۲}{R_۱}=\frac{\rho\frac{L_۲}{A_۲}}{\rho\frac{L_۱}{A_۱}}=\frac{L_۲A_۱}{L_۱A_۲}=\left(\frac{L_۲}{L_۱}\right)^۲$$

$$\frac{R_۲}{۶}=(۳)^۲\Rightarrow R_۲=۵۴\,\Omega$$

۲۲●●- شکل ۲۲-۲۵ الف بزرگی $E(x)$ میدانهای الکتریکی را نشان می‌دهد که توسط یک باتری در میله‌ای مقاومت‌دار به طول ۹/۰۰ mm (شکل ۲۲-۲۴ب) برقرار شده است. مقیاس محور قائم با $E_s=۴/۰۰\times۱۰^۳$ V/m مشخص شده است. میله شامل سه بخش از یک جنس ولی با شعاعهای متفاوت است. (نمودار طرحوار شکل ۲۲-۲۴ ب شعاعهای متفاوت را مشخص نمی‌کند.) شعاع بخش ۳ برابر ۲/۰۰ mm است. شعاع (الف) بخش ۱ و (ب) بخش ۲ چقدر است؟



شکل ۲۲-۲۵ مسئله ۲۲

حل: سه بخش با هم متوالی‌اند پس جریان در آنها یکسان است.

$$i_۱=i_۲=i_۳\Rightarrow j_۱A_۱=j_۲A_۲=j_۳A_۳$$

جنس آنها یکسان است لذا ρ برای آنها یکی است و داریم:

$$E_۱r_۱^۲=E_۲r_۲^۲=E_۳r_۳^۲$$

حال با استفاده از نمودار داده شده می‌توان نوشت:

$$(۲/۵\times۱۰^۳)r_۱^۲=(۴\times۱۰^۳)r_۲^۲=(۱/۵\times۱۰^۳)(۲\times۱۰^{-۳})^۲$$

(الف) $r_۱=۱/۵۵\times۱۰^{-۳}$ m

(ب) $r_۲=۱/۲۲\times۱۰^{-۳}$ m

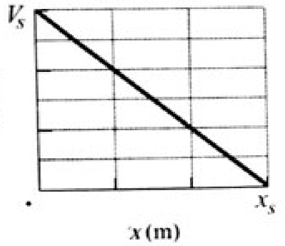
۲۳●●- دو رسانا از یک جنس‌اند و طول آنها برابر است. رسانای A یک سیم توپر به قطر ۱/۰ mm است. رسانای B یک لولهٔ تو خالی به قطر خارجی ۲/۰ mm و قطر داخلی ۱/۰ mm است. نسبت R_A/R_B که بین دو سر هریک اندازه‌گیری می‌شود چقدر است؟ **WWW SSM**

حل: $A_A=\pi r_A^۲=(۳/۱۴)(۰/۵\times۱۰^{-۳})^۲=۷/۸۵\times۱۰^{-۷}$ m²

$$A_B=\pi(r_B^۲-r_A^۲)=(۳/۱۴)(۱\times۱۰^{-۳}-۰/۵\times۱۰^{-۳})$$
$$=۲/۳۲\times۱۰^{-۶}\text{ m}^۲$$

$$\frac{R_A}{R_B}=\frac{\rho_AL_AA_B}{R_A\rho_BL_B}=\left(\frac{\rho_۱}{\rho_۲}\right)\left(\frac{L_۱}{L_۲}\right)\left(\frac{A_۲}{A_۱}\right)$$
$$=(۱)(۱)\left(\frac{۲/۳۶\times۱۰^{-۶}}{۷/۸۵\times۱۰^{-۷}}\right)=۳$$

۲۴●●- شکل ۲۲-۲۶ پتانسیل الکتریکی $V(x)$ را در راستای یک سیم مسی حامل جریان یکنواخت، از نقطه با پتانسیل بالای $V_S=۱۲/۰\,\mu V$ در $x=۰$ تا نقطه با پتانسیل صفر در $x_s=۳/۰$ m نشان می‌دهد. شعاع سیم ۲/۰۰ mm است. جریان در سیم چقدر است؟



شکل ۲۲-۲۶ مسئله ۲۲

حل: شیب منحنی پتانسیل - فاصله، میدان الکتریکی را به دست می‌دهد.

$$E=\left|\frac{dv}{dx}\right|=\frac{۱۲\times۱۰^{-۶}}{۳}=۴\times۱۰^{-۶}\text{ V/m}$$

$$E=\rho j\qquad j=\frac{E}{\rho}$$

مساحت سطح مقطع سیم نیز برابر است با $A=\pi r^۲$، لذا داریم:

$$I=jA=\frac{E}{\rho}\cdot\pi r^۲=\left(\frac{۴\times۱۰^{-۶}}{۱/۶۹\times۱۰^{-۸}}\right)(۳/۱۴)(۲\times۱۰^{-۳})^۲$$
$$=۲/۹\times۱۰^{-۳}\text{ A}$$

۲۵●●- یک لامپ فلاش معمولی در ۰/۳۰ A و ۲/۹ V (مقدارهای جریان و ولتاژ در شرایط کاری) کار می‌کند. اگر مقاومت رشتهٔ تنگستن در دمای اتاق (۲۰°C) ۱/۱ Ω باشد، دمای رشته در هنگام روشن بودن چقدر است؟ **ILW**

حل: مقاومت رشته لامپ، وقتی لامپ روشن است برابر است با:

$$R=\frac{V}{i}=\frac{۲/۹}{۰/۳}=۹/۷\Omega$$

$R = R_{\circ}[۱+\alpha \Delta T] \Rightarrow ۹/۷ = (۱/۱)[۱+(۴/۵\times ۱۰^{-۳})(T-۲۰^{\circ})]$

$T = ۱۷۵۷^{\circ}C = ۲۰۲۸\,K$

۲۶●●- پرواز بادبادک در توفان. این کار برجسته که بنیامین فرانکلین بادبادکی را موقع شروع توفان به پرواز درآورد فقط کاری بزرگ است- او نه احمق بود و نه می‌خواست خودکشی کند. فرض کنید شعاع نخ بادبادک ۲/۰۰mm و به طور مستقیم تا ۰/۸۰۰km امتداد داشته و با لایه‌ای از آب به ضخامت ۰/۵۰۰mm که مقاومت ویژهٔ آن ۱۵۰Ω.m است پوشیده شده باشد. اگر اختلاف پتانسیل بین دو انتهای نخ ۱۶۰MV باشد، چه جریانی از لایهٔ آب می‌گذرد؟ خطر در این جریان نیست ولی احتمال دارد این نخ آذرخشی را که می‌تواند جریانی به بزرگی A ۵۰۰۰۰۰ را داشته باشد به خود بکشد. (ورای آن است که فقط مرگبار باشد)

حل: $R = \rho \frac{L}{A} = (۱۵۰)\frac{(۰/۸\times ۱۰^{۳})}{\pi[(۲/۵)^{۲}-(۲)^{۲}]\times ۱۰^{-۶}}$

$= ۱/۷\times ۱۰^{۱۰}\,\Omega$

$i = \frac{V}{R} = \frac{۱۶۰\times ۱۰^{۶}}{۱/۷\times ۱۰^{۱۰}} = ۹/۴\times ۱۰^{-۳}\,A$

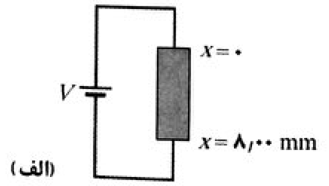
۲۷●●- یک اختلاف پتانسیل ۳/۰۰ nV در دو سر یک سیم مسی به طول ۲/۰۰ cm و شعاع ۲/۰۰ mm برقرار می‌شود. چقدر بار از طریق مقطع سیم در ۳/۰۰ ms سوق داده می‌شود؟

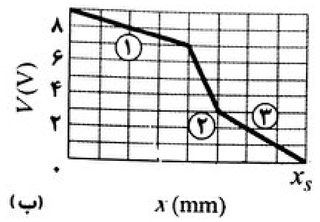
حل: $R = \frac{\rho L}{A} = \frac{(۱/۶۹\times ۱۰^{-۸})(۲\times ۱۰^{-۲})}{\pi (۲\times ۱۰^{-۳})^{۲}} = ۲/۶۹\times ۱۰^{-۵}\,\Omega$

$i = \frac{V}{R} = \frac{۳\times ۱۰^{-۹}}{۲/۶۹\times ۱۰^{-۵}} = ۱/۱۲\times ۱۰^{-۴}\,A$

$q = it = (۱/۱۲\times ۱۰^{-۴})(۳\times ۱۰^{-۳}) = ۳/۳۶\times ۱۰^{-۷}\,C$

۲۸●●- در شکل ۲۲-۲۷ الف، یک باتری ۹/۰۰ V به یک مقاومت به شکل نوار متصل شده است که دارای سه بخش با مساحت مقطع یکسان ولی رسانندگیهای متفاوت است. شکل ۲۲-۲۷ب پتانسیل الکتریکی $V(x)$ را برحسب مکان x در راستای نوار نشان می‌دهد. مقیاس محور افقی با $x_s = ۸/۰۰$mm مشخص شده است. بخش ۳ دارای رسانندگی $۳/۰۰\times ۱۰^{۷}\,(\Omega.m)^{-۱}$ است. رسانندگی بخش (الف) ۱ و (ب) ۲ چقدر است؟





شکل ۲۲-۲۷ مسئلهٔ ۲۸

حل: قدر مطلق شیب قطعه خط‌های مستقیم در نمودار برابر با بزرگی میدان‌های الکتریکی مربوطه‌اند.

$E_۱ = \left|\frac{\Delta V}{\Delta x}\right| = \frac{۹-۷}{۴\times ۱۰^{-۳}} = ۵۰۰\,V/m$

$E_۲ = \left|\frac{\Delta V}{\Delta x}\right| = \frac{۷-۳}{(۵-۴)\times ۱۰^{-۳}} = ۴۰۰۰\,V/m$

$E_۳ = \left|\frac{\Delta V}{\Delta x}\right| = \frac{۳}{(۸-۵)\times ۱۰^{-۳}} = ۱۰۰۰\,V/m$

سه بخش به طور متوالی بسته شده‌اند لذا جریان در آنها یکسان است و با توجه به رابطه $J=\sigma E$ می‌توان نوشت

$i_۱ = i_۲ = i_۳ \Rightarrow J_۱A_۱ = J_۲A_۲ = J_۳A_۳$

$\sigma_۱E_۱A_۱ = \sigma_۲E_۲A_۲ = \sigma_۳E_۳A_۳$

$\Rightarrow \sigma_۱(۵۰۰) = \sigma_۲(۴۰۰۰) = (۳\times ۱۰^{۷})(۱۰۰۰)$

(الف) $\sigma_۱ = ۶\times ۱۰^{۷}\,(\Omega\cdot m)^{-۱}$

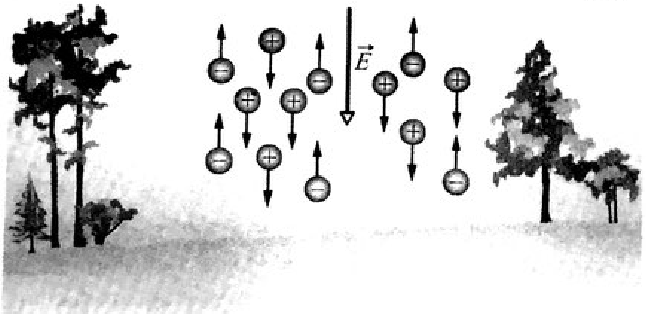
(ب) $\sigma_۲ = ۷/۵\times ۱۰^{۶}\,(\Omega\cdot m)^{-۱}$

۲۹●●- هرگاه ۱۱۵V به سیمی که طول آن ۱۰m و شعاع آن ۰/۳۰ mm است اعمال شود، چگالی جریان برابر با $۱/۴\times ۱۰^{۴}\,A/m^{۲}$ می‌شود. مقاومت ویژهٔ سیم را پیدا کنید.

حل: $V = \rho\frac{L}{A} = \rho\frac{L}{A}jA = \rho L j$

$۱۱۵ = \rho(۱۰)(۱/۴\times ۱۰^{۴}) \Rightarrow \rho = ۸/۲۱\times ۱۰^{-۴}\,\Omega\cdot m$

۳۰●●- در جو نزدیک سطح زمین یونهای منفی و مثبت وجود دارند که به‌وسیلهٔ عنصرهای پرتوزای موجود در خاک و پرتوهای کیهانی فضا ایجاد شده‌اند. در یک ناحیهٔ معین جو، شدت میدان الکتریکی ۱۲۰ V/m و در جهت قائم رو به پایین است. این میدان سبب می‌شود یونهای مثبت یک بار یونیده، با چگالی $۶۲۰\,cm^{-۳}$ رو به پایین و یونهای منفی یک بار یونیده، با چگالی $۵۵۰\,cm^{-۳}$ رو به بالا رانده شوند (شکل ۲۲-۲۸). رسانندگی ویژهٔ اندازه‌گیری شدهٔ هوا در این ناحیه برابر با $۲/۷۰\times ۱۰^{-۱۴}\,(\Omega.m)^{-۱}$ است. (الف) بزرگی چگالی جریان و (ب) تندی سوقی یونها را با فرض اینکه برای یونهای مثبت و منفی یکسان است محاسبه کنید.



شکل ۲۲-۲۸ مسئلهٔ ۳۰

حل: (الف)

$j = \sigma E = (۲/۷\times ۱۰^{-۱۴})(۱۲۰) = ۳/۲۴\times ۱۰^{-۱۲}\,A/m^{۲}$

(ب) $j_۱ = n_۱ e v_d$ $\qquad$ $j_۲ = n_۲ e v_d$

$$j = j_۱ + j_۲ = (n_۱ + n_۲) e v_d$$

$$۳/۲۴\times ۱۰^{-۱۲} = (۶۲۰+۵۵۰)\times ۱۰^{۶}\,(۱/۶\times ۱۰^{-۱۹})v_d$$

$$\Rightarrow V_d = ۱/۷۳\times ۱۰^{-۲}\ \text{m/s}$$

●●۳۱- مساحت مقطع عرضی قطعه‌ای به شکل مستطیل توپر برابر با $۳/۵۰\,\text{cm}^۲$، و طول از جلو تا عقب $۱۵/۸\,\text{cm}$ و مقاومت آن $۹۳۵\,\Omega$ است. این قطعه از ماده‌ای است که $۵/۳۳\times ۱۰^{۲۲}$ الکترون رسانشی بر متر مکعب دارد. بین عقب و جلو آن اختلاف پتانسیل $۳۵/۸\,\text{V}$ برقرار شده است. (الف) جریان در قطعه چقدر است؟ (ب) اگر چگالی جریان یکنواخت باشد، مقدار آن چقدر است؟ (پ) تندی سوقی الکترونهای رسانشی چقدر است؟ (ت) بزرگی میدان الکتریکی در قطعه چقدر است؟

حل: (الف)

$$i = \frac{V}{R} = \frac{۳۵/۸}{۹۳۵} = ۳/۸۳\times ۱۰^{-۲}\ \text{A}$$

(ب)

$$j = \frac{i}{A} = \frac{۳/۸۳\times ۱۰^{-۲}}{۳/۵\times ۱۰^{-۴}} = ۱۰۹\ \text{A/m}^۲$$

(پ)

$$v_d = \frac{j}{ne} = \frac{۱۰۹}{(۵/۳۳\times ۱۰^{۲۲})(۱/۶\times ۱۰^{-۱۹})} = ۱/۲۸\times ۱۰^{-۲}\ \text{m/s}$$

(ت)

$$E = \frac{V}{L} = \frac{۳/۵۸}{۰/۱۵۸} = ۲۲۶/۶\ \text{V/m}$$

●●۳۲- اگر شمارهٔ سیمی ۶ عدد زیاد شود، قطر آن نصف می‌شود؛ اگر شمارهٔ سیم به اندازهٔ ۱ افزایش یابد، قطر با ضریب $۲^{۱/۶}$ کم می‌شود، (به جدول مسئله ۴ نگاه کنید). با دانستن این، و با دانستن اینکه $۱۰۰۰\ \text{ft}$ از یک سیم شمارهٔ ۱۰ دارای مقاومت تقریبی $۱/۰۰\,\Omega$ است، مقاومت $۲۵\,\text{ft}$ از سیم مسی با شمارهٔ ۲۲ را براورد کنید.

حل: فرض می‌کنیم L طول سیم و D قطر آن باشد.

$$R = \rho\frac{L}{A}$$

$$\frac{R_۲}{R_۱} = \frac{A_۱}{A_۲}\,\frac{L_۲}{L_۱} = \left(\frac{D_۱}{D_۲}\right)^۲\left(\frac{L_۲}{L_۱}\right) \Rightarrow \frac{R_۲}{۱} = (۴)^۲\left(\frac{۲۵}{۱۰۰۰}\right)$$

$$\Rightarrow R_۲ = ۰/۴\,\Omega$$

●●۳۳- یک کابل الکتریکی ۱۲۵ رشته سیم نازک دارد که مقاومت هر یک $۲/۶۵\,\mu\Omega$ است. اختلاف پتانسیل یکسانی بین دو سر همهٔ رشته‌ها اعمال و جریان کل $۰/۷۵۰\,\text{A}$ حاصل می‌شود. (الف) جریان در هر رشته چقدر است؟ (ب) اختلاف پتانسیل اعمال شده چقدر است؟ (پ) مقاومت کابل چقدر است؟

حل: (الف) رشته‌ها به طور موازی بسته شده‌اند و جریان در هر رشته برابر است با:

$$i = \frac{۰/۷۵}{۱۲۵} = ۶\times ۱۰^{-۳}\ \text{A}$$

(ب)

$$V = iR = (۶\times ۱۰^{-۳})(۲/۶۵\times ۱۰^{-۶}) = ۱/۵۹\times ۱۰^{-۸}\ \text{V}$$

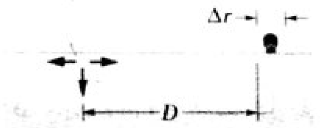
(پ) پتانسیل دو سر کابل برابر با مقدار بالا است، لذا مقاومت معادل برابر است با:

$$R_{eq} = \frac{V}{i_{\text{کل}}} = \frac{۱/۵۹\times ۱۰^{-۸}}{۰/۷۵۰} = ۲/۱۲\times ۱۰^{-۸}\ \Omega$$

یا

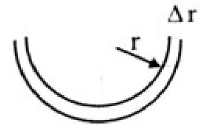
$$R_{eq} = \frac{R}{n} = \frac{۲/۶۵\times ۱۰^{-۶}}{۱۲۵} = ۲/۱۲\times ۱۰^{-۸}\ \Omega$$

●●۳۴- شنا در توفان. شکل ۲۲-۲۹ شناگری را در فاصلهٔ $D = ۳۵/۰\,\text{m}$ از محل آذرخش با آب را نشان می‌دهد که جریان آن $۷۸\,\text{kA}$ است. مقاومت ویژهٔ آب $۳۰\,\Omega\text{.m}$ ، پهنای شناگر در راستای خط شعاعی از محل اصابت $۰/۷۰\,\text{m}$ و مقاومت او در این پهنا $۴/۰۰\,\text{k}\Omega$ است. فرض کنید جریان روی آب در کره‌ای به مرکز محل اصابت پخش می‌شود. چه جریانی از شناگر می‌گذرد؟ GO



شکل ۲۲-۲۹ مسئلهٔ ۳۴

حل:



لایه‌ای به شکل نیم‌کره را در نظر می‌گیریم اختلاف پتانسیل دو سر این لایه به ضخامت Δr برابر است با

$$\Delta V = i\Delta R = i\rho\frac{\Delta L}{A} = i\rho\frac{\Delta r}{\pi D^۲}$$

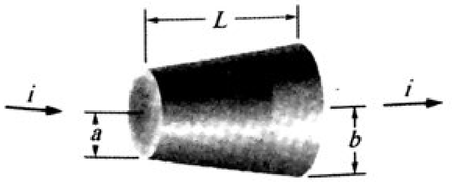
با قرار دادن مقادیر داده شده، داریم

$$\Delta V = ۲۱۳\,\text{V}$$

$$\Delta V = iR_\rho \Rightarrow ۲۱۳ = (۴\times ۱۰^۳)i$$

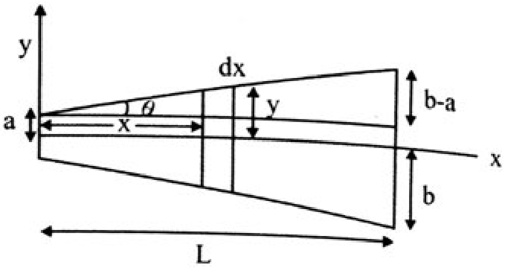
$$i = ۵/۳\times ۱۰^{-۳}\ \text{A} \quad \text{یا} \quad ۵/۳\,\text{mA}$$

●●●۳۵- در شکل ۲۲-۳۰، در مخروط ناقصی با مقطع دایره‌ای و با مقاومت ویژهٔ $۷۳۱\,\Omega\text{.m}$ جریانی برقرار شده است. شعاع سمت چپ $a = ۲/۰۰\,\text{mm}$ و شعاع سمت راست $b = ۲/۳۰\,\text{mm}$ و طول آن $L = ۱/۹۴\,\text{cm}$ است. فرض کنید که چگالی جریان در هر مقطعی عمود بر طول یکنواخت باشد. مقاومت مخروط چقدر است؟ WWW SSM



شکل ۲۲-۳۰ مسئله ۳۵

حل:



$$dR = \rho \frac{dx}{\pi y^2}$$

$$y - a = x\tan\theta \Rightarrow dx = \frac{dy}{\tan\theta}$$

با توجه به شکل داریم $\tan\theta = \frac{b-a}{L}$ لذا داریم: $dx = \frac{L\,dy}{b-a}$

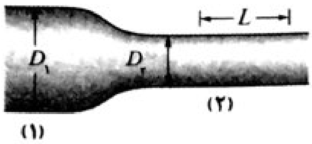
و

$$dR = \rho\frac{L\frac{dy}{b-a}}{\pi y^2} \Rightarrow R = \frac{\rho L}{\pi(b-a)}\int_a^b \frac{dy}{y^2} = \frac{\rho L}{\pi(b-a)}\left[\frac{1}{a}-\frac{1}{b}\right]$$

$$R = \frac{\rho L}{\pi(b-a)}\left[\frac{b-a}{ab}\right] \Rightarrow R = \frac{\rho L}{\pi ab}$$

که با قرار دادن مقادیر داده شده خواهیم داشت $R = 9.81\times10^5\,\Omega$.

۳۶●●●- شکل ۲۲-۳۱ در بخش ۱ سیمی به قطر $D_1 = 4.00\,R$ و در بخش ۲ سیمی به قطر $D_2 = 2.00\,R$ را نشان می‌دهد که با باریک شدن تدریجی به هم متصل شده‌اند. سیم از مس است و جریانی از آن می‌گذرد. فرض کنید که جریان به طور یکنواخت در هر سطح مقطعی در پهنای سیم توزیع شده است. اختلاف پتانسیل الکتریکی V در طول $L = 2.00\,m$ نشان داده شده در بخش ۲ برابر با $10.0\,\mu V$ است. تعداد حاملهای بار بریکای حجم برابر با $8.49\times10^{28}\,m^{-3}$ است. تندی سوقی الکترونهای بخش ۱ چقدر است؟ GO



شکل ۲۲-۳۱ پرسش ۳۶

حل: چون دو قسمت به طور متوالی به هم متصل‌اند لذا جریان در آنها یکسان است.

$$i_1 = i_2 \Rightarrow j_1A_1 = j_2A_2 \Rightarrow j_1\pi R_1^2 = j_2\pi R_2^2$$

$$\Rightarrow \frac{j_1}{j_2} = \left(\frac{R_2}{R_1}\right)^2$$

در ضمن برای قسمت دوم داریم $E_2 = \frac{V_2}{L_2}$ و در نتیجه داریم

$$j_2 = \frac{E_2}{\rho} = \frac{V_2}{\rho L_2} = \frac{10\times10^{-6}}{(1.69\times10^{-8})(2)} = 295.9\,A/m^2$$

و رابطه نسبت چگالی‌های جریان (رابطهٔ بالا)

$$\frac{j}{295.9} = \left(\frac{1}{2}\right)^2 \Rightarrow j_1 = 74\,A/m^2$$

$$j = nev_d \Rightarrow 74 = (8.49\times10^{28})(1.6\times10^{-19})v_d$$

$$\Rightarrow v_d = 5.45\times10^{-9}\,m/s$$

بخش ۲۲-۶ نگرش میکروسکوپی قانون اهم

۳۷●●- بر اساس مدل الکترون آزاد رسانش الکتریکی در فلزها و فیزیک کلاسیک، نشان دهید که مقاومت ویژهٔ فلزها با $\sqrt{T}$ متناسب است، که T دما برحسب کلوین است. (به معادلهٔ ۱۵-۳۱ نگاه کنید.)

حل: در مدل الکترون آزاد، سرعت الکترون مشابه سرعت v_{rms} مولکولها در گاز کامل است

$$v_{rms}\alpha\sqrt{T}$$
$$v_e\alpha\sqrt{T}$$

از طرف دیگر از معادله (۲۲-۲۵) داریم

$$\rho = \frac{m}{e^2n\tau} \Rightarrow \rho\propto\frac{1}{\tau}$$

$$\lambda = \tau v_t \Rightarrow v_e \propto \frac{1}{\tau}$$

از دو رابطه فوق می‌توان نتیجه گرفت که در مدل الکترون آزاد

$$\rho \propto v_e \alpha\sqrt{T}$$

بخش ۲۲-۷ توان در مدارهای الکتریکی

۳۸●- دانشجویی رادیوی ۹/۰V و ۷/۰ W خود را از ساعت ۹/۰۰ صبح تا ۲/۰۰ بعد از ظهر با بلندترین صدا روشن نگه می‌دارد. در این مدت چقدر بار وارد رادیو شده است؟

حل: $P = Vi \qquad i = \frac{P}{V}$

$$q = i\Delta t = \frac{P}{V}\Delta t = \frac{7}{9}(14-9)(3600) = 14040\,C$$

۳۹●- اختلاف پتانسیل ۱۲۰ V به یک بخاری برقی که در حالت روشن مقاومت آن ۱۴Ω است اعمال می‌شود. (الف) با چه آهنگی انرژی الکتریکی به گرما تبدیل می‌شود؟ (ب) به‌ازای هر کیلو وات ساعت (kW.h) برابر با ۰/۰۵ دلار، کارکرد وسیله به مدت ۵/۰ h چه هزینه‌ای خواهد داشت؟ SSM

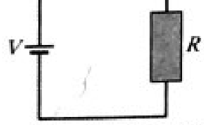
حل: (الف) $P = \frac{V^2}{R} = \frac{(120)^2}{14} = 1\times10^3\,W = 1kW$

(ب) هزینه $= (1\,kW)(5h)(5cents/kW\cdot h)$

$$= 25cents = 0.25\$$$

۴۰●- در شکل ۲۲-۳۲، باتری با اختلاف پتانسیل $V = 12V$ به نواری با مقاومت $R = 6.0\Omega$ متصل شده است. وقتی الکترونی از یک سر نوار به سر دیگر آن حرکت کند، (الف) در چه جهتی در شکل الکترونها حرکت می‌کنند، (ب) توسط میدان الکتریکی

داخل نوار چقدر کار روی الکترون انجام می‌گیرد و (پ) توسط الکترون چقدر انرژی به انرژی گرمایی نوار تبدیل می‌شود؟



شکل ۲۲-۳۲ مسئلهٔ ۴۰

حل: (الف) جهت چگالی جریان روبه‌پایین رشته مقاومت است زیرا جهت میدان الکتریکی نیز روبه‌پایین است $(\vec{E}=\rho\vec{j})$. بنابراین با توجه به اینکه الکترونها دارای بار منفی هستند جهت حرکت آنها روبه‌بالا است.

(ب) کار انجام شده روی یک الکترون برابر است با

$W=eV=(۱/۶\times۱۰^{-۱۹})(۱۲)=۱/۹۲\times۱۰^{-۱۸}\ \text{J}$

(پ) انرژی دریافت شده به انرژی گرمایی تبدیل می‌شود

$Q=۱/۹۲\times۱۰^{-۱۸}\ \text{J}$

●۴۱- مقاومت نامعلومی به پایانه‌های یک باتری ۳/۰۰ ولتی بسته شده است. انرژی با آهنگ ۰/۵۴۰W در مقاومت تلف می‌شود. سپس همین مقاومت به یک باتری ۱/۵۰ولتی بسته می‌شود. اکنون انرژی با چه آهنگی تلف می‌شود؟ **ILW**

حل: برای رابطهٔ توان داریم $P=V^۲/R$ لذا می‌توان نوشت

$$\frac{P_۲}{P_۱}=\left(\frac{V_۲}{V_۱}\right)^۲\Rightarrow\frac{P_۲}{۰/۵۴}=\left(\frac{۱/۵}{۳}\right)^۲\Rightarrow P_۲=۰/۱۳۵\,\text{W}$$

●۴۲- انرژی گرمایی در یک مقاومت با آهنگ ۱۰۰W به هنگام عبور جریان ۳/۰۰A از آن ایجاد می‌شود. مقاومت آن چقدر است؟

حل: $P=Ri^۲\Rightarrow۱۰۰=R(۳)^۲\Rightarrow R=۱۱/۱\Omega$

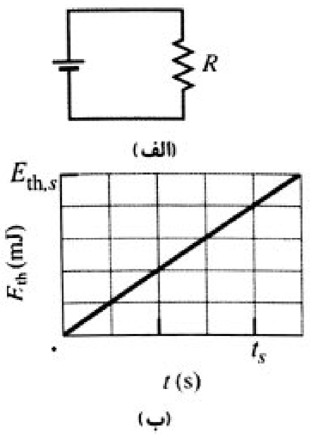
●۴۳- یک بخاری تابشی ۱۲۵۰ واتی برای عمل در ۱۱۵V ساخته شده است. (الف) جریان در بخاری موقع کار چقدر خواهد بود؟ (ب) مقاومت پیچهٔ بخاری چقدر است؟ (پ) چقدر انرژی گرمایی در ۱/۰h توسط بخاری ایجاد می‌شود؟ **ILW SSM**

حل: (الف) $P=Vi\Rightarrow۱۲۵۰=(۱۱۵)i\Rightarrow i=۱۰/۹\text{A}$

(ب) $V=Ri\Rightarrow۱۱۵=R(۱۰/۹)\Rightarrow R=۱۰/۶\Omega$

(پ) $W=Pt=(۱۲۵۰)(۳۶۰۰)=۴/۵\times۱۰^۶\ \text{J}$

●۴۴- در شکل ۲۲-۳۳ الف مقاومت ۲۰Ω به باتری وصل شده است. شکل ۲۲-۳۵ ب افزایش انرژی گرمایی E_{th} در مقاومت را برحسب تابعی از زمان t نشان می‌دهد. مقیاس محور قائم با $E_{th,s}=۲/۵۰\text{mJ}$ و مقیاس محور افقی با $t_s=۴/۰s$ مشخص شده است. اختلاف پتانسیل دو سر باتری چقدر است؟



شکل ۲۲-۳۳ مسئله ۴۴

حل: شیب منحنی، توان تلف شده را به دست می‌دهد.

$$P=\frac{۲/۵\times۱۰^{-۳}}{۵}=۵\times۱۰^{-۴}\ \text{W}$$

از آنجا می‌توان نوشت

$$P=\frac{V^۲}{R}\Rightarrow۵\times۱۰^{-۴}=\frac{V^۲}{۲۰}\Rightarrow V=۰/۱\text{V}$$

●۴۵- در یک اجاق داغ برای پخت سوسیس با اعمال یک اختلاف پتانسیل ۱۲۰V به دو سر اجاق و به کمک انرژی گرمایی ایجاد شده در آن، سوسیس می‌پزد. جریان ۱۰/۰A و انرژی لازم برای پختن یک سوسیس ۶۰/۰kJ است. اگر آهنگ انرژی اعمال شده تغییر نکند، چقدر طول می‌کشد تا سه سوسیس به طور همزمان بپزد؟

حل: $W=(۳)(۶۰)\times۱۰^۳=۱/۸\times۱۰^۵\ \text{J}$

$W=Pt=(Vi)t\Rightarrow۱/۸\times۱۰^۵=(۱۲۰)(۱۰)t\Rightarrow t=۱۵۰\text{s}$

●●۴۶- از هم پاشیدن کفش‌ها. کفش‌های باران جذب کردهٔ شخصی ممکن است براثر عبور جریان از نزدیکی بخار آب حاصل از آذرخش از هم بپاشد.. تبدیل ناگهانی آب به بخار آب موجب می‌شود که انبساط بسیار زیادی رخ دهد و کفشها از هم بپاشند. چگالی آب ۱۰۰۰kg/m³ است و به ۳۳۳KJ/kg انرژی برای تبخیر نیاز دارد. اگر جریان افقی ۲/۰۰ms طول بکشد و با آب با مقاومت ویژهٔ ۱۵۰Ω.m به طول ۱۲/۰cm و مقطع عمودی با مساحت ۱۵×۱۰⁻⁵ m² مواجه شود، میانگین جریان لازم برای تبخیر آب چقدر است؟

حل: $V=Ad=(۱۵\times۱۰^{-۵})(۰/۱۲)=۱/۸\times۱۰^{-۵}\ \text{m}^۳$

$m=\rho V=(۱۰۰۰)(۱/۸\times۱۰^{-۵})=۱/۸\times۱۰^{-۲}\ \text{kg}$

$Q=mL_V=(۱/۸\times۱۰^{-۲})(۳۳۳\times۱۰^۳)=۵۹۹۴\text{J}$

$R=\rho\frac{d}{A}=(۱۵۰)\frac{(۰/۱۲)}{۱۵\times۱۰^{-۵}}=۱/۲\times۱۰^۵\ \Omega$

$Q=Ri^۲t\Rightarrow۵۹۹۴=(۱/۲\times۱۰^۵)i^۲(۲\times۱۰^{-۳})$

$\Rightarrow i=۵\text{A}$

۴۷●●- اختلاف پتانسیل ۱۲۰ V به یک بخاری برقی که در ضمن کار ۵۰۰ W مصرف می‌کند اعمال می‌شود. (الف) مقاومت بخاری در موقع کار کردن چقدر است؟ (ب) با چه آهنگی الکترونها از هر مقطعی از عنصر گرم کننده می‌گذرند؟

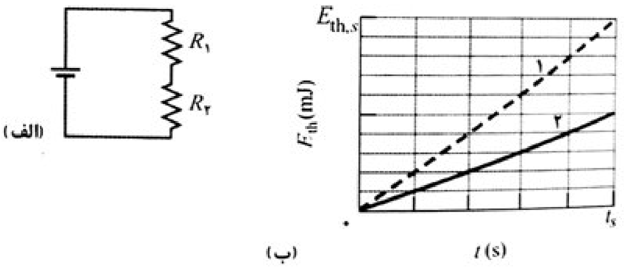
حل: (الف) $P=\frac{V^۲}{R}\Rightarrow ۵۰۰=\frac{(۱۲۰)^۲}{R}\Rightarrow R=۲۸/۸\Omega$

(ب) $V=Ri\Rightarrow ۱۲۰=(۲۸/۸)i\Rightarrow i=۴/۱۷A$

و در هر ثانیه مقدار الکترون از رابطهٔ زیر به دست می‌آید:

$$q=(۱)t=ne\Rightarrow ۴/۱۷=n(۱/۶\times۱۰^{-۱۹})\Rightarrow n=۲/۶\times۱۰^{۱۹}$$

۴۸●●- جریانی که از باتری و مقاومت‌های ۱ و ۲ در شکل ۲۲-۳۴ الف می‌گذرد برابر با ۲/۰۰ A است. انرژی از جریان به صورت انرژی گرمایی E_{th} در دو مقاومت تبدیل می‌شود. منحنی‌های ۱ و ۲ در شکل ۲۲-۳۴ ب انرژی گرمایی E_{th} را به ترتیب برای مقاومتهای ۱ و ۲ برحسب تابعی از زمان t نشان می‌دهند. مقیاس محور قائم با $E_{th,s}=۴۰/۰mJ$ و مقیاس محور افقی با $t_s=۵/۰۰s$ مشخص شده است. توان باتری چقدر است؟



شکل ۲۲-۳۴ مسئلهٔ ۴۸

حل: شیب منحنی‌های ۱ و ۲ به ترتیب توان $P_1=۸mW$ و $P_2=۴mW$ را به دست می‌دهند. لذا با توجه به پایستگی انرژی، جمع آنها توان باتری را به دست می‌دهد.

$$P_{\text{باتری}}=P_1+P_2=۱۲mW$$

۴۹●●●- یک عنصر گرم کننده با قراردادن اختلاف پتانسیل ۷۵/۰ V در دو سر طولی از یک سیم نیکرومی با مقطع $۲/۶۰\times۱۰^{-۶}m^۲$ ایجاد شده است. مقاومت ویژهٔ نیکروم برابر با $۵/۰۰\times۱۰^{-۷}\Omega.m$ است. (الف) اگر توان تلف شده در این عنصر ۵۰۰۰ W باشد، طول آن چقدر است؟ (ب) اگر ۱۰۰ V برای به دست آوردن همان آهنگ توان تلف شده به کار رود، طول آن باید چقدر باشد؟

حل: (الف) با توجه به دو رابطه $P=V^۲/R$ و $R=\rho L/A$ می‌توان طول L را به دست آورد.

$$L=\frac{AV^۲}{\rho P}=\frac{(۲/۶\times۱۰^{-۶})(۷۵)^۲}{(۵\times۱۰^{-۷})(۵۰۰)}=۵/۸۵m$$

(ب) با روش مشابه می‌توان نوشت

$$L'=\frac{AV'^۲}{\rho P}$$

در نتیجه

$$\frac{L'}{L}=\frac{V'^۲}{V^۲}\Rightarrow\frac{L'}{۵/۸۵}=\frac{(۱۰۰)^۲}{(۷۵)^۲}\Rightarrow L'=۱۰/۴m$$

۵۰●●●- بزرگی چگالی جریان در یک سیم دایره‌ای معین $J=(۲/۷۵\times۱۰^{۱۰}A/m^۴)r^۲$ است، که در آن r فاصلهٔ شعاعی رو به بیرون سیم به شعاع ۳/۰۰ mm است. پتانسیل اعمال شده بر سیم (در دو سر) ۶۰/۰ V است. در مدت ۱/۰۰h چقدر انرژی به انرژی گرمایی تبدیل می‌شود؟ GO

حل: $i=\int jdA=\int_۰^{۰/۰۰۳}(۲/۷۵\times۱۰^{۱۰})r^۲(۲\pi r\,dr)=۳/۵A$

$$W=Vit=(۶۰)(۳/۵)(۳۶۰۰)=۷/۵۶\times۱۰^۵J$$

۵۱●●- یک لامپ روشنایی ۱۰۰ W به برق استاندارد ۱۲۰ V وصل شده است. (الف) در مدت ۳۱ روز یک ماه در صورت روشن ماندن پیوستهٔ لامپ چقدر هزینهٔ آن می‌شود؟ فرض کنید یک کیلو وات ساعت انرژی الکتریکی ۰/۰۶ دلار قیمت دارد. (ب) مقاومت لامپ چقدر است؟ (پ) جریان لامپ چقدر است؟

حل: (الف) $W=Pt=(۰/۱)(۳۱)(۲۴)=۷۴/۴kW\cdot h$

هزینه $=(۰/۰۶)(۷۴/۴)=۴/۴۷\$$

(ب) $P=\frac{V^۲}{R}\Rightarrow ۱۰۰=\frac{(۱۲۰)^۲}{R}\Rightarrow R=۱۴۴\Omega$

(پ) $V=Ri\Rightarrow ۱۲۰=(۱۴۴)i\Rightarrow i=۰/۸۳A$

۵۲●●- جریان ۲/۰۰ A به طور یکنواخت در مساحت مقطع یک سیم مسی با سطح مقطع $۲/۰۰\times۱۰^{-۶}m^۲$ و طول ۴/۰۰ m توزیع شده است. (الف) بزرگی میدان الکتریکی و طول سیم چقدر است؟ (ب) در مدت ۳۰ min چقدر انرژی الکتریکی به انرژی گرمایی تبدیل می‌شود؟ SSM

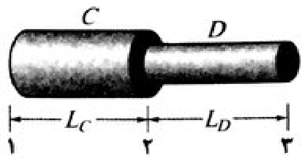
حل: (الف)

$$E=\rho j=\rho\frac{i}{A}=(۱/۶۹\times۱۰^{-۸})\frac{۲}{۲\times۱۰^{-۶}}=۱/۶۹\times۱۰^{-۲}V/m$$

(ب) $R=\rho\frac{L}{A}=(۱/۶۹\times۱۰^{-۸})\frac{۴}{۲\times۱۰^{-۶}}=۳/۳۸\times۱۰^{-۲}\Omega$

$$W=Ri^۲t=(۳/۳۸\times۱۰^{-۲})(۲)^۲(۳۰)(۶۰)=۲۴۳/۴J$$

۵۳●●- سیم C و سیم D از مواد مختلف ساخته شده‌اند و طول آنها $L_C=L_D=۱/۰m$ است. مقاومت ویژه و قطر سیم C، $۲/۰\times۱۰^{-۶}\Omega.m$ و ۱/۰۰mm و برای سیم D، $۱/۰\times۱۰^{-۶}\Omega.m$ و ۰/۵۰mm است. این سیمها مانند شکل ۲۲-۳۵ به هم وصل شده‌اند و جریان ۲/۰A از آنها می‌گذرد. اختلاف پتانسیل الکتریکی بین (الف) نقطه‌های ۱ و ۲ و (ب) نقطه‌های ۲ و ۳ چقدر است؟ آهنگ اتلاف انرژی بین (پ) نقطه‌های ۱ و ۲ و (ت) نقطه‌های ۲ و ۳ چقدر است؟



شکل ۲۲-۳۵ مسئله ۵۳

حل: (الف) مقاومت سیم C برابر است با

$$R_C=\rho_C\frac{L_C}{\pi r_C^2}=(2\times10^{-6})\frac{1}{\pi(0.5\times10^{-3})^2}=2.55\,\Omega$$

در نتیجه داریم:

$$|V_1-V_2|=V_C=R_Ci=(2.55)(2)=5.09\,\text{V}$$

(ب) برای سیم D نیز داریم:

$$R_D=\rho_D\frac{L_D}{\pi r_D^2}=(1\times10^{-6})\frac{1}{\pi(0.25\times10^{-3})^2}=5.09\,\Omega$$

$$|V_2-V_3|=V_D=R_Di=(5.09)(2)=10.18\,\text{V}$$

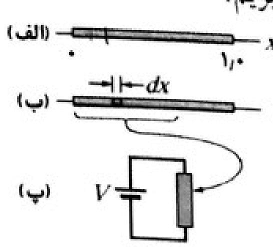
(پ) آهنگ اتلاف انرژی در سیم C برابر است با

$$P_C=R_Ci^2=(2.55)(2)^2=10.18\,\text{W}$$

(ت) و آهنگ اتلاف انرژی در سیم D برابر است با

$$P_D=R_Di^2=(5.09)(2)^2=20.37\,\text{W}$$

۵۴●●●- شکل ۲۲-۳۶ الف میلهٔ مقاومت داری را نشان می‌دهد. مقاومت بریکای طول میله در جهت مثبت محور x افزایش می‌یابد. در هر نقطهٔ x در طول میله، مقاومت dR قسمت باریکی (دیفرانسیلی) با پهنای dx با $dR=5.00x\,dx$ داده می‌شود که dR برحسب اهم و x برحسب متر است. شکل ۲۲-۳۶ ب این قسمت باریک را نشان می‌دهد. طولی از میله از $x=0$ تا $x=L$ را می‌بریم و این طول را به یک باتری با اختلاف پتانسیل $V=5.0\,\text{V}$ وصل می‌کنیم (شکل ۲۲-۳۱ پ). اگر جریان را در طولی از میله خواسته باشیم که انرژی را با آهنگ ۲۰۰W به انرژی گرمایی تبدیل کند، در چه نقطه‌ای از $x=L$ باید میله را ببریم؟



شکل ۲۲-۳۶ مسئله ۵۴

حل: ابتدا مقاومت میله را به دست می‌آوریم.

$$P=\frac{V^2}{R}\Rightarrow 200=\frac{25}{R}\Rightarrow R=0.125\,\Omega$$

$$R=\int dR=\int_0^L 5x\,dx\Rightarrow 0.125=\frac{5}{2}x^2\Big|_0^L\Rightarrow L=0.23$$

مسئله‌های اضافی

۵۵- باریکهٔ یکنواختی از ذره‌های آلفا ($q=+2e$) که با انرژی جنبشی ثابت ۲۰MeV حرکت می‌کند حامل جریان $0.25\,\mu\text{A}$ است. (الف) اگر باریکه در راستای عمود بر یک سطح صاف باشد، در مدت ۳/۰s چند ذرهٔ آلفا به این سطح برخورد می‌کند؟ (ب) در یک طول ۲۰cm از باریکه، در هر لحظه چند ذرهٔ آلفا وجود دارد؟ (پ) چه اختلاف پتانسیلی لازم است تا هر ذرهٔ آلفا را از حالت سکون شتاب دهد تا به انرژی ۲۰MeV برسد؟

حل: (الف) در مدت زمان Δt مقدار بار $\Delta q=i\Delta t$ با سطح برخورد می‌کند و هر ذره دارای بار $+2e$ است تعداد ذراتی که به سطح برخورد می‌کنند از رابطه زیر به دست می‌آید.

$$N=\frac{\Delta q}{2e}=\frac{i\Delta t}{2e}=\frac{(0.25\times10^{-6})(3)}{(2)(1.6\times10^{-19})}=2.34\times10^{12}\quad \text{عدد}$$

(ب)

$$k=\frac{1}{2}m\bar{v}^2\Rightarrow(20)(10^6)(1.6\times10^{-19})=\left(\frac{1}{2}\right)(4\times1.67\times10^{-27})\bar{v}^2\Rightarrow\bar{v}=3.1\times10^7\,\text{m/s}$$

$$j=\frac{i}{A}=nev_d\Rightarrow n=\frac{i}{Ae\bar{v}}$$

طول باریکه $L=0.2\,\text{cm}$ باشد، تعداد کل در حجم AL برابر است با

$$N=nAL=\frac{iL}{2e\bar{v}}=\frac{(0.25\times10^{-6})(0.2)}{2(1.6\times10^{-19})(3.1\times10^7)}=5040\quad \text{عدد}$$

(پ) طبق پایستگی انرژی داریم:

$$k=eV\Rightarrow 20\times10^6\,e=eV\Rightarrow V=1\times10^7\,\text{V}$$

۵۶- رمز خرده شکلات. این داستان با مسئله ۵۶ در فصل ۱۹ شروع شد و در فصلهای ۲۰ و ۲۱ ادامه پیدا کرده است. گرد ریز شکلات از طریق لوله‌ای به شعاع R با تندی یکنواخت v و چگالی بار یکنواخت ρ وارد مخزن می‌شود. (الف) رابطه‌ای برای جریان i (آهنگی که بار روی گرد حرکت می‌کند) که عمود بر مقطع لوله می‌گذرد پیدا کنید. (ب) i را برای شرایط کارخانه محاسبه کنید: شعاع لوله $R=5.0\,\text{cm}$ ، تندی $v=2.0\,\text{m/s}$ و چگالی بار $\rho=1.1\times10^{-3}\,\text{C/m}^3$.

اگر گرد بر اثر تغییر پتانسیل الکتریکی به اندازهٔ V حرکت می‌کرد، انرژی آن با آهنگ $P=iV$ به جرقه تبدیل می‌شد. (پ) آیا چنین تبدیلی در داخل لوله به واسطهٔ اختلاف پتانسیل شعاعی بحث شده در مسئلهٔ ۶۰ فصل ۲۰ صورت می‌گیرد؟

وقتی گرد از لوله به داخل مخزن جریان می‌یابد، پتانسیل الکتریکی گرد تغییر می‌کند. بزرگی این تغییر دست کم برابر با اختلاف پتانسیل شعاعی در لوله است (همان‌طور که در مسئلهٔ ۶۴ فصل ۲۰ محاسبه شد.) (ت) با فرض این مقدار برای اختلاف پتانسیل و با استفاده از جریان محاسبه شده در (ب)، آهنگ انرژی تبدیل شده از گرد به جرقه را وقتی که گرد لوله را تحریک می‌کند، پیدا کنید. (ث) اگر جرقه در خروجی گرد به مدت ۰/۲s رخ می‌دهد (مقدار مورد انتظار معقول)، چقدر انرژی به جرقه تبدیل می‌شود؟

از مسئلهٔ ۵۶ فصل ۱۹ کمینهٔ انرژی تبدیل شده جهت ایجاد انفجار را ۱۵۰ mJ در نظر بگیرید. (ج) محتمل‌ترین محل انفجار گرد در کجاست: در گرد داخل پاتیل در حال تخلیه (مسئله ۵۰ فصل ۲۱)، در داخل لوله، یا در خروجی لولهٔ درون مخزن؟

حل: (الف) استوانه‌ایی با سطح مقطع A و طول dx درنظر می‌گیریم، داریم:

$$dq=\rho A\,dx$$
$$i=\frac{dq}{dt}=\rho A\frac{dx}{dt}=\rho\pi R^2 v$$

(ب) با قرار دادن مقادیر عدد در نتیجه قسمت (الف) جریان i به دست می‌آید.

$$i=(1.1\times10^{-3})(3.14)(5\times10^{-2})^2(2)=1.73\times10^{-5}\text{ A}$$

(پ) این جریان بر اثر عبور گرد در طول لوله است و در عرض حرکتی ندارند.

(ت) $P=Vi=(7.8\times10^{4})(1.73\times10^{-5})=1.35\text{ W}$

(ث) $W=Pt=(1.35)(0.2)=0.27\text{J}$

(ج) انرژی بالا بیشتر از انرژی لازم برای انفجار است پس هنگام خروج، احتمال انفجار وجود دارد.

۵۷- یک بخاری ۵۰۰ W طوری طراحی شده است که با اختلاف پتانسیل اعمالی ۱۱۵ V کار کند. (الف) اگر اختلاف پتانسیل اعمال شده به ۱۱۰ V برسد، خروجی گرما چند درصد کاهش می‌یابد؟ فرض کنید مقاومت تغییر نمی‌کند. (ب) اگر تغییر مقاومت با دما را در نظر بگیرید، آیا کاهش در خروجی گرما بیشتر از مقدار محاسبه شده در (الف) می‌شود یا کمتر؟

حل: (الف) $P=\frac{V^2}{R}$, $P'=\frac{V'^2}{R}$

$$\frac{P'}{p}=\left(\frac{V'}{V}\right)^2\Rightarrow\frac{P'}{500}=\left(\frac{110}{115}\right)^2\Rightarrow P'=457.5\text{ W}$$
$$\frac{\Delta P}{P}=\frac{457.5-500}{500}=-0.085$$ یا ٪۸/۵

(ب) با افت ولتاژ جریان کاهش می‌یابد و با کاهش جریان، دما و مقدار مقاومت نیز کاهش می‌یابد لذا توان مصرفی نسبت به حالت قبل بیشتر می‌گردد، یعنی ΔP کاهش می‌یابد.

۵۸- اختلاف پتانسیل ۱/۲۰ V به طول ۳۳/۰ m از سیم مسی شماره ۱۸ (به قطر ۰/۰۴۰۰ in) اعمال می‌شود. مطلوب است (الف) جریان، (ب) بزرگی چگالی جریان، (پ) بزرگی میدان الکتریکی داخل سیم و (ت) آهنگ انرژی گرمایی که در سیم ظاهر می‌شود.

حل: (الف)

$$r=0.02\text{ in}=5.08\times10^{-4}\text{ m}$$
$$A=\pi r^2=(3.14)(5.08\times10^{-4})^2=8.1\times10^{-7}\text{ m}^2$$
$$R=\rho\frac{L}{A}=(1.6\times10^{-8})\frac{33}{8.1\times10^{-7}}=0.69\Omega$$
$$V=Ri\Rightarrow1.2=(0.69)i\Rightarrow i=1.74\text{ A}$$

(ب) $j=\frac{i}{A}=\frac{1.74}{8.1\times10^{-7}}=2.15\times10^{6}\text{ A/m}^2$

(پ) $E=\frac{V}{L}=\frac{1.2}{33}=3.64\times10^{-2}\text{ V/m}$

(ت) $P=Vi=(1.2)(1.74)=2.1\text{W}$

۵۹- یک گرمکن نیکرومی به هنگام اعمال اختلاف پتانسیل ۱۱۰ V و وقتی دمای سیم ۸۰۰°C است ۵۰۰ W تلف می‌کند. اگر با فرو بردن سیم در یک حمام روغن سرد کننده دمای آن در ۲۰۰°C نگهداشته شود، آهنگ اتلاف چقدر می‌شود؟ اختلاف پتانسیل اعمال شده یکسان و α برای نیکروم در ۸۰۰°C برابر با $4.0\times10^{-4}\text{ K}^{-1}$ است.

حل: با توجه به رابطه $P=\frac{V^2}{R}$ و ثابت بودن V، داریم

$$\frac{P_2}{P_1}=\frac{R_1}{R_2}\Rightarrow\frac{P_2}{500}=\frac{R_1}{R_1(1+\alpha\Delta T)}$$
$$P_2=\frac{500}{1+(4\times10^{-4})(200-800)}=657.9\text{ W}$$

۶۰- طول یک میلهٔ آلومینیومی با مقطع مربعی ۱/۳ m و طول ضلع آن ۵/۲ mm است. (الف) مقاومت دو سر آن چقدر است؟ (ب) اگر مقاومت یک میلهٔ استوانه‌ای مسی به طول ۱/۳ m یکسان با میلهٔ آلومینیومی باشد، قطر آن باید چقدر باشد؟

حل: (الف)

$$R=\rho\frac{L}{A}=(2.75\times10^{-8})\frac{1.3}{(5.2\times10^{-3})^2}=1.32\times10^{-3}\ \Omega$$

(ب)
$$R'=\rho'\frac{L'}{A'}\Rightarrow1.32\times10^{-3}=(1.69\times10^{-8})\frac{1.3}{A'}\Rightarrow$$
$$A'=1.66\times10^{-5}\text{ m}^2$$
$$A'=\pi\frac{D^2}{4}\Rightarrow1.66\times10^{-5}=(3.14)\frac{D^2}{4}$$
$$\Rightarrow D=4.6\times10^{-3}\text{ m}$$

۶۱- طول یک میلهٔ استوانه‌ای فلزی ۱/۶۰ m و قطر آن ۵/۵۰ mm است. مقاومت بین دو سر آن (در ۲۰°C) $1.09\times10^{-3}\ \Omega$ است. (الف) مادهٔ میله چیست؟ (ب) قرص گردی به قطر ۲/۰۰ cm و ضخامت ۱/۰۰ mm از همان ماده ساخته شده است. با فرض اینکه هر صفحه یک سطح هم پتانسیل است، مقاومت بین صفحه‌های گرد چقدر است؟

حل: (الف)

$$R=\rho\frac{L}{A}\Rightarrow1.09\times10^{-3}=\rho=\frac{1.6}{\pi(2.75\times10^{-3})^2}\Rightarrow$$
$$\rho=1.62\times10^{-8}\ \Omega\text{m}$$

جنس میله، نقره است.

(ب) $R=\rho\frac{L}{A}=(1.62\times10^{-8})\frac{1\times10^{-3}}{\pi(0.01)^2}=5.16\times10^{-8}\ \Omega$

۶۲- یک مقاومت استوانه‌ای به شعاع $5.0\,mm$ و طول $2.0\,cm$ از ماده‌ای با مقاومت ویژهٔ $3.5\times10^{-5}\,\Omega.m$ ساخته شده است. وقتی آهنگ اتلاف انرژی در مقاومت $1.0\,W$ باشد، (الف) بزرگی چگالی جریان و (ب) اختلاف پتانسیل چقدر است؟

حل: (الف)

$$R=\rho\frac{L}{A}=(3.5\times10^{-5})\frac{0.02}{\pi(5\times10^{-3})^2}=8.92\times10^{-3}\,\Omega$$

$$P=Ri^2\Rightarrow 1=(8.92\times10^{-3})i^2\Rightarrow i=10.6\,A$$

$$j=\frac{i}{A}=\frac{10.6}{\pi(5\times10^{-3})^2}=1.35\times10^{5}\,A/m^2$$

(ب)

$$V=Ri=(8.92\times10^{-3})(10.6)=9.46\times10^{-2}\,V$$

۶۳- اختلاف پتانسیل V بر سیمی با مساحت مقطع A، طول L و مقاومت ویژهٔ ρ اعمال شده است. اگر بخواهید اختلاف پتانسیل اعمال شده را تغییر دهید و سیم را بکشید به طوری که آهنگ اتلاف انرژی ۳۰/۰ برابر و جریان ۴/۰۰ برابر شود، با فرض اینکه چگالی سیم تغییر نکند، (الف) نسبت طول جدید به L و (ب) نسبت مساحت مقطع جدید به A چقدر است؟

حل: (الف) و (ب)

$$\frac{P_2}{P_1}=\frac{R_2 i_2^2}{R_1 i_1^2}\Rightarrow 30=\frac{R_2}{R_1}(16)\Rightarrow\frac{R_2}{R_1}=\frac{15}{8}$$

حجم پس از کشیدن سیم تغییر نمی‌کند لذا داریم

$$A_1L_1=A_2L_2\Rightarrow\frac{A_1}{A_2}=\frac{L_2}{L_1}$$

$$\frac{R_2}{R_1}=\frac{L_2A_1}{L_1A_2}=\left(\frac{L_2}{L_1}\right)^2\Rightarrow\frac{15}{8}=\left(\frac{L_2}{L_1}\right)^2\Rightarrow\frac{L_2}{L_1}=1.37$$

$$\frac{A_2}{A_1}=\frac{1}{1.37}=0.73$$

۶۴- چراغهای یک ماشین در حال حرکت نیازمند تقریباً $10\,A$ از یک مولد ۱۲ ولتی است که توسط موتور تأمین می‌شود. فرض کنید کارایی مولد ۸۰ ٪ است (توان الکتریکی خروجی آن ۸۰ ٪ توان مکانیکی ورودی آن است). مقدار اسب بخار موتور را که باید برای کار چراغها اعمال شود محاسبه کنید.

حل: توان مورد نیاز برحسب اسب بخار برابر است با

$$P=\frac{V_i}{0.8}=\frac{(12)(10)}{(0.8)(746)}=0.2\,hp$$

۶۵- ولتاژ دو سر وسیله‌ای با $18.0\,W$ برابر با $9.00\,V$ است. در مدت $4.00\,h$ چقدر بار از وسیله می‌گذرد؟

حل:

$$i=\frac{P}{V}=\frac{18}{9}=2A$$

$$\Delta q=i\Delta t==(2)(4)(3600)=2.88\times10^{4}\,C$$

۶۶- اختلاف پتانسیل $12\,V$ بر یک سیم مسی (دایره‌ای) به طول $45\,m$ و شعاع $2.0\,mm$ اعمال می‌شود. چه مقدار انرژی گرمایی به وسیلهٔ جریان در مدت $40\,s$ تولید می‌شود؟

حل:

$$R=\rho\frac{L}{A}=(1.69\times10^{-8})\frac{45}{\pi(2\times10^{-3})^2}=6.04\times10^{-2}\,\Omega$$

$$W=Pt=\frac{V^2}{R}t=\frac{(12)^2}{6.04\times10^{-2}}(40)=9.54\times10^{4}\,J$$

۶۷- چقدر انرژی در مدت $2.00\,h$ توسط یک مقاومت الکتریکی $400\,\Omega$ به هنگام اعمال پتانسیل $90.0\,V$ مصرف می‌شود؟

حل:

$$W=Pt=\frac{V^2}{R}t=\frac{(90)^2}{400}(2)(3600)=1.46\times10^{5}\,J$$

۶۸- مقاومتی با اختلاف پتانسیل $200\,V$ در دو سر آن انرژی الکتریکی را با آهنگ $3000\,W$ به انرژی گرمایی تبدیل می‌کند. مقاومت آن چقدر است؟

حل:

$$P=\frac{V^2}{R}\Rightarrow 300=\frac{(200)^2}{R}\Rightarrow R=1.33\,\Omega$$

۶۹- پیچه‌ای از سیم نیکروم در مایعی غوطه‌ور شده است و جریانی از آن می‌گذرد (نیکروم آلیاژ نیکل- کروم- آهن است که عموماً در عنصرهای گرم کننده استفاده می‌شود.) وقتی اختلاف پتانسیل پیچه $12\,V$ و جریانی که از آن می‌گذرد $5.2\,A$ باشد، مایع با آهنگ پایای $21\,mg/s$ تبخیر می‌شود. گرمای تبخیر مایع را محاسبه کنید. (به بخش ۱۴-۸ نگاه کنید.)

حل: توان اتلاف شده برابر است با

$$P=Vi=(12)(5.2)=62.4\,W$$

گرمایی که مایع می‌گیرد تا به جوش آید را می‌توان از رابطه $Q=mL_v$ به دست آورد و در نتیجه آهنگ آن برابر است با $dQ/dt=L_v dm/dt$ در نتیجه داریم:

$$Vi=L_v\frac{dm}{dt}\Rightarrow 62.4=L_v(21\times10^{-6})\Rightarrow L_v=2.97\,J/kg$$

۷۰- وقتی یک اختلاف پتانسیل به قدر کافی زیاد به دو الکترود یک لامپ تخلیهٔ گازی اعمال شود، جریانی در آن برقرار می‌شود. گاز یونیده می‌شود؛ الکترونها به طرف پایانهٔ مثبت و یونهای مثبت باردار به طرف پایانهٔ منفی حرکت می‌کنند. (الف) در یک لامپ تخلیهٔ هیدروژن که در آن 3.1×10^{18} الکترون و 1.1×10^{18} پروتون در هر ثانیه از مساحت مقطع هر بخش لوله می‌گذرند، جریان چقدر است؟ (ب) جهت چگالی جریان $\vec{J}$ به طرف پایانه منفی است یا از آن دور می‌شود؟

حل: تعداد ذرات در هر ثانیه از سطح مقطع جریان را به دست می‌دهد، لذا می‌توان نوشت:

$$i=i_e+i_p=(n_e+n_p)e$$

$$=(3.1\times10^{18}+1.1\times10^{18})(1.6\times10^{-19})$$

$$=0.672\,A$$

۷۱- طول عنصر گرمکن $2.0\,kW$ یک خشک کننده $80\,cm$ است. اگر $10\,cm$ از آن برداشته شود، در $120\,V$ چه توانی توسط عنصر کوتاه شده مصرف می‌شود؟

حل: ابتدا رابطهٔ بین توان و طول را وقتی پتانسیل ثابت است به دست می‌آوریم، $P=\frac{V^{۲}}{R}$ و $R=\rho\frac{L}{A}$ لذا داریم $P\propto\frac{۱}{L}$ و طول جدید برابر با ۷۰/۸۰ طول اولیه است لذا توان جدید برابر است با

$$P=\frac{۸}{۷}(۲)=۲/۴\,\mathrm{kW}$$

۷۲- مقاومت سیم پیچهای مسی موتوری در ۲۰°C وقتی که کار نمی‌کند ۳۰Ω است. پس از اینکه موتور چند ساعت کار کند، مقاومت آن به ۵۸Ω می‌رسد. اکنون دمای سیم‌پیچها چقدر است؟ از تغییرات در ابعاد سیم پیچها چشمپوشی کنید. (به جدول ۲۲-۱ نگاه کنید.)

حل:

$$R-R_\circ=R_\circ\,\alpha\,(T-T_\circ)$$

$$۵۸-۵۰=(۵۰)(۴/۳\times۱۰^{-۳})(T-۲۰)\Rightarrow T=۵۷/۲^\circ\mathrm{C}$$

۷۳- یک لامپ پرتو ایکس با جریان ۷/۰۰mA و اختلاف پتانسیل ۸۰/۰kV کار می‌کند. توان آن برحسب وات چقدر است؟

حل:

$$P=Vi=(۸۰\times۱۰^{۳})(۷\times۱۰^{-۳})=۵۶۰\,\mathrm{W}$$

۷۴- هزارپایی به طول ۴/۰cm در جهت سوق الکترون در طول یک سیم مسی لخت به قطر ۵/۲mm که حامل جریان یکنواخت ۱۲A است می‌خزد. (الف) اختلاف پتانسیل بین دو سر هزارپا چقدر است؟ (ب) دم آن نسبت به سر آن مثبت است یا منفی؟ (پ) اگر خزیدن آن با تندی سوقی الکترونها انجام گیرد، چقدر طول می‌کشد تا هزارپا ۱/۰cm را طی کند؟ (تعداد حاملهای بار بر یکای حجم $۸/۴۹\times۱۰^{۲۸}\,\mathrm{m}^{-۳}$ است.)

حل: (الف)

$$V=iR=i\rho_{cu}\frac{L}{A}=(۱۲)(۱/۶۹\times۱۰^{-۸})\frac{۴\times۱۰^{-۲}}{\pi(۵/۲\times۱۰^{-۳})^{۲}}$$

$$=۳/۸\times۱۰^{-۴}\,\mathrm{V}$$

(ب) چون حرکت هزارپا در جهت سوق الکترون است و الکترون به طرف پتانسیل بالاتر می‌رود. سر آن نسبت به دمش در پتانسیل بالاتری قرار دارد.

(پ)

$$j=\frac{i}{A}=ne\upsilon_d\Rightarrow\frac{۱۲}{\pi(۵/۲\times۱۰^{-۳})^{۲}}$$

$$=(۸/۴۹\times۱۰^{۲۸})(۱/۶\times۱۰^{-۱۹})\upsilon_d$$

$$\upsilon_d=۴/۱۷\times۱۰^{-۵}\,\mathrm{m/s}$$

$$L=\upsilon_d t\Rightarrow ۰/۰۱=(۴/۱۷\times۱۰^{-۵})t\Rightarrow t=۲۳۹\mathrm{s}$$

۷۵√- (الف) در چه دمایی مقاومت یک رسانای مسی دو برابر مقاومت آن در ۲۰°C می‌شود؟ (۲۰/۰°C را به عنوان نقطهٔ مرجع در معادلهٔ ۲۲-۱۷ در نظر بگیرید؛ پاسخ خود را با شکل ۲۲-۱۰ مقایسه کنید.) (ب) آیا این «دمای دو برابر» برای همهٔ رساناهای مسی بدون توجه به شکل یا اندازه برقرار است؟

حل:

$$R-R_\circ=R_\circ\alpha\,\Delta T=R_\circ\alpha(T-T_\circ)$$

$$۲R_\circ-R_\circ=R_\circ(۴/۳\times۱۰^{-۳})(T-۲۰)\Rightarrow T=۲۵۲^\circ\mathrm{C}$$

۷۶- مساحت مقطع یک ریل فولادی واگن شهری $۵۶/۰\,\mathrm{cm}^{۲}$ است. مقاومت ۱۰/۰km ریل چقدر است؟ مقاومت ویژهٔ فولاد $۳/۰۰\times۱۰^{-۷}\,\Omega\mathrm{.m}$ است.

حل:

$$R=\rho\frac{L}{A}=(۳\times۱۰^{-۷})\frac{۱۰\times۱۰^{۳}}{۵۶\times۱۰^{-۴}}=۰/۵۳۶\Omega$$

۲۳

مدارها

بخش ۲۳-۶ اختلاف پتانسیل میان دو نقطه

●۱- سیمی با مقاومت ۵/۰Ω به یک باتری با emf برابر با ۲/۰V و مقاومت درونی ۱/۰Ω وصل شده است. در مدت ۲/۰min، (الف) چه مقدار انرژی شیمیایی به الکتریکی تبدیل می‌شود؟ (ب) چه مقدار انرژی به صورت انرژی گرمایی در سیم تلف می‌شود و (پ) چه مقدار انرژی به صورت گرما در باتری تلف می‌شود؟

حل: (الف) $W = Pt = \frac{\varepsilon^۲}{R+r}t = \frac{(۲)^۲}{۵+۱}(۱۲۰) = ۸۰\,J$

(ب) $i = \frac{\varepsilon}{R+r} = \frac{۲}{۵+۱} = ۰/۳۳A$

اتلاف انرژی در سیم برابر است با

$W_R = Pt = Ri^۲t = (۵)(۰/۳۳)^۲(۱۲۰) = ۶۵/۳J$

(پ) تبدیل انرژی به صورت گرمایی در باتری برابر است با

$W_b = W - W_R = ۸۰ - ۶۵/۳ = ۱۴/۷J$

●۲- بار اولیهٔ یک باتری اتومبیل ۱۲/۰ ولتی ۱۲۰ A.h است. با فرض اینکه پتانسیل دو سر پایانه‌ها تا زمان تخلیهٔ کامل باتری ثابت بماند، باتری چند ساعت انرژی با آهنگ ۱۰۰ W می‌تواند تحویل دهد؟

حل: $P = Vi \Rightarrow ۱۰۰ = (۱۲)i \Rightarrow i = ۸/۳۳A$

$q = it \Rightarrow ۱۲۰ = (۸/۳۳)t \Rightarrow t = ۱۴/۴h$

●۳- یک جریان ۵/۰ آمپری به وسیلهٔ یک باتری با قابلیت باردارشدن دوباره با emf برابر با ۶/۰V در مدت ۶min در مداری برقرار می‌شود. انرژی شیمیایی باتری چقدر کاهش می‌یابد؟

حل: $W = Pt = \varepsilon it = (۶)(۵)(۶)(۶۰) = ۱۰۸۰۰J$

●۴- باتری استاندارد لامپ فلاش پیش از آنکه از کار بیفتد تقریباً ۲/۰ W.h انرژی تولید می‌کند. (الف) اگر قیمت باتری ۸ سنت باشد، هزینهٔ روشن کردن یک لامپ ۱۰۰ واتی به مدت ۸/۰h با استفاده از این باتری چقدر است؟ (ب) هزینهٔ توان فراهم شده به وسیلهٔ شرکت خدمات برق به ازای ۶ سنت برای هر کیلووات ساعت چقدر است؟

حل: (الف) $W = Pt = (۱۰۰)(۸) = ۸۰۰W \cdot h$

تعداد $N = \frac{W}{۲} = ۴۰۰$ عدد باتری مورد نیاز است و با توجه به هزینه هر باتری خواهیم داشت

هزینه کل $= (۴۰۰)(۰/۸) = ۳۲۰\$$

(ب) هزینه توان فراهم شده برحسب کیلو وات ساعت برابر است با

$W' = (۱۰۰)(۸) = ۸۰۰W \cdot h = ۰/۸kW \cdot h$

هزینه $= (۰/۸)(\%۶) = \%۴۸\$$

●۵- باتری اتومبیلی با emf برابر با ۱۲V و مقاومت درونی برابر با ۰/۰۴۰Ω با جریان ۵۰A باردار می‌شود. (الف) اختلاف پتانسیل V دو سر پایانه‌ها چقدر است؟ (ب) آهنگ P_r اتلاف انرژی در داخل باتری و (پ) آهنگ P_{emf} تبدیل انرژی به شکل شیمیایی، چقدر است؟ هرگاه این باتری برای استارت اتومبیل با جریان ۵۰A مورد استفاده قرار گیرد، (ت) V و (ث) P_r چقدر است؟ ILW

حل: (الف) $V = \varepsilon + ri = ۱۲ + (\%۴)(۵۰) = ۱۴V$

(ب) $P_r = ri^۲ = (\%۴)(۵۰)^۲ = ۱۰۰W$

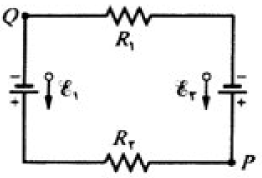
(پ) $P_{emf} = \varepsilon i = (۱۲)(۵۰) = ۶۰۰W$

(ت) $V = \varepsilon - ri = ۱۲ - (\%۴)(۵۰) = ۱۰V$

(ث) $P_r = ri^۲ = (\%۴)(۵۰)^۲ = ۱۰۰\,W$

که همان مقدار قبلی است.

●۶- در شکل ۲۳-۲۵، emf باتریهای آرمانی برابر با $\mathscr{E}_۱$=۱۵۰V و $\mathscr{E}_۲$=۵۰V و مقاومت‌ها $R_۱ = ۳/۰\Omega$ و $R_۲ = ۲/۰\Omega$ است. اگر پتانسیل در نقطهٔ P، ۱۰۰V تعریف شود، پتانسیل در نقطهٔ Q چقدر است؟



شکل ۲۳-۲۵ مسئلهٔ ۶

حل: جریان را در مدار پادساعتگرد می‌گیریم و آن را به دست می‌آوریم.

$-\varepsilon_۲ - iR_۱ + \varepsilon_۱ - iR_۲ = ۰$

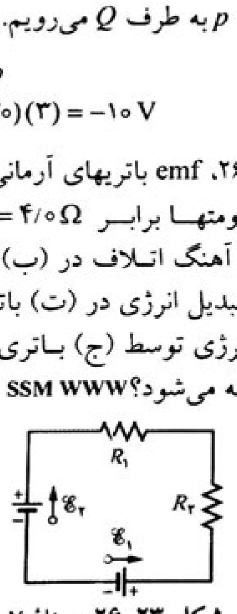
$i = \frac{\varepsilon_۱ - \varepsilon_۲}{R_۱ + R_۲} = \frac{۱۵۰ - ۵۰}{۳+۲} = ۲۰A$

با مقایسه نیروهای محرکه $(\varepsilon_۱ > \varepsilon_۲)$ انتظار داشتیم جهت انتخابی درست باشد که پاسخ مثبت i آن را تأیید می‌کند. در جهت جریان از نقطه p به طرف Q می‌رویم.

$V_p - \varepsilon_۲ - iR_۱ = V_Q$

$V_Q = ۱۰۰ - ۵۰ - (۲۰)(۳) = -۱۰V$

●۷- در شکل ۲۳-۲۶، emf باتریهای آرمانی برابر با $\varepsilon_۱ = ۱۲V$ و $\varepsilon_۲ = ۶/۰V$ و مقاومتها برابر $R_۱ = ۴/۰\Omega$ و $R_۲ = ۸/۰\Omega$ است. (الف) جریان، آهنگ اتلاف در (ب) مقاومت ۱ و (پ) مقاومت ۲ و آهنگ تبدیل انرژی در (ت) باتری ۱ و (ث) باتری ۲ چقدر است؟ آیا انرژی توسط (ج) باتری ۱ و (چ) باتری ۲، تولید می‌شود یا گرفته می‌شود؟ SSM WWW



شکل ۲۳-۲۶ مسئلهٔ ۷

حل: (الف) جریان در حلقه را پادساعتگرد فرض می‌کنیم (انتظار داریم صحیح باشد چون $\varepsilon_۱ > \varepsilon_۲$ است) و قانون حلقه را می‌نویسیم، داریم:

$$\varepsilon_۱ - iR_۲ - iR_۱ - \varepsilon_۲ = ۰$$
$$i = \frac{\varepsilon_۱ - \varepsilon_۲}{R_۱ + R_۲} = \frac{۱۲-۶}{۴+۸} = ۰/۵\text{A}$$

علامت مثبت نشان‌دهنده این است که جهت جریان را درست انتخاب کرده‌ایم.

(ب) توان اتلاف شده در $R_۱$ برابر است با

$$P_۱ = R_۱ i^۲ = (۴)(۰/۵)^۲ = ۱\text{W}$$

(پ) توان تلف شده در $R_۲$ برابر است با

$$P_۲ = R_۲ i^۲ = (۸)(۰/۵)^۲ = ۲\text{W}$$

(ت) انرژی با آهنگ $P_۱ = \varepsilon_۱ i$ توسط باتری ۱ تهیه می‌شود.

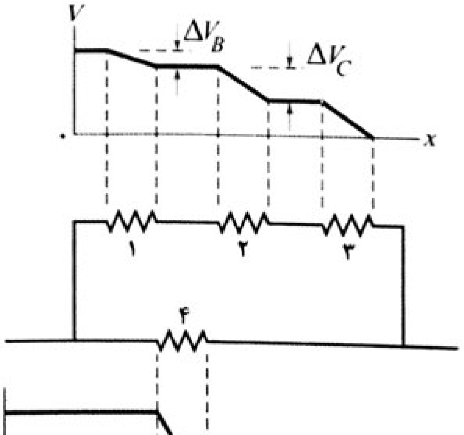
$$P_۱ = (۱۲)(۰/۵) = ۶\text{W}$$

(ث)
$$P_۲ = \varepsilon_۲ i = (۶)(۰/۵) = ۳\text{W}$$

(ج) جهت جریان در باتری ۱، همسو با emf است لذا این باتری برای مدار انرژی تهیه می‌کند و تخلیه می‌شود.

(چ) جهت جریان در باتری ۲، در خلاف جهت emf است لذا این باتری انرژی را جذب می‌کند و باردار می‌شود.

●۸- شکل ۲۳-۲۷ مداری شامل چهار مقاومت را نشان می‌دهد که به مدار بزرگتری وصل شده است. نمودار زیر مدار پتانسیل الکتریکی $V(x)$ را بر حسب تابعی از مکان x در طول شاخهٔ پایینی مدار از طریق مقاومت ۴ نشان می‌دهد. نمودار بالای مدار پتانسیل الکتریکی $V(x)$ را برحسب مکان x در طول شاخه بالایی مدار از طریق مقاومتهای ۱، ۲ و ۳ به دست می‌دهد، اختلاف پتانسیلها عبارت‌اند از $\Delta V_B = ۲/۰۰\text{V}$ و $\Delta V_C = ۵/۰۰\text{V}$. مقاومت ۳ برابر با $۲۰۰\,\Omega$ است. مقاومت (الف) ۱ و (ب) ۲، چقدر است؟



شکل ۲۳-۲۷ مسئلهٔ ۸

حل: (الف) و (ب) جریان در شاخه بالا را در نظر می‌گیریم.

$$i_۱ = i_۲ = i_۳$$

$$\Delta V_۱ = R_۱ i_۱ = ۲\text{V} \qquad \Delta V_۲ = R_۲ i_۲ = ۵V$$
$$\Delta V_۲ = ۱۲-(۲+۵) = ۵\text{V}$$
$$\Delta V_۳ = R_۳ i_۳ = ۵\text{V} \Rightarrow i_۳ = \frac{۵}{۲۰۰} = ۲/۵\times۱۰^{-۲}\ \text{A}$$
$$R_۱ = \frac{۲}{(۲/۵\times۱۰^{-۲})} = ۸۰\Omega \qquad R_۲ = \frac{۵}{(۲/۵\times۱۰^{-۲})} = ۲۰۰\Omega$$

●۹- مقاومت کل ۳/۰۰ اهمی از اتصال یک مقاومت نامعلوم به مقاومت ۱۲/۰ اهمی به دست آمده است. (الف) مقاومت نامعلوم باید چقدر باشد و (ب) آیا اتصال باید متوالی باشد یا موازی؟

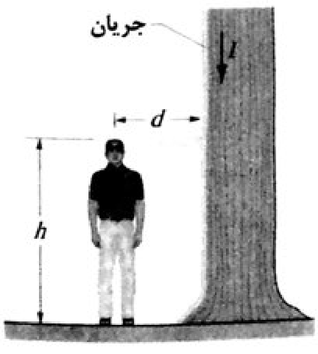
حل: (الف) و (ب) با توجه به اینکه مقاومت کل کاهش یافته پس باید دو مقاومت به صورت موازی بسته شده باشند.

$$R = \frac{R_۱ R_۲}{R_۱ + R_۲} \Rightarrow ۳ = \frac{۱۲R_۱}{R_۱ + ۱۲} \Rightarrow R_۱ = ۴\Omega$$

●۱۰- (الف) چقدر کار برحسب الکترون ولت باید انجام گیرد تا باتری آرمانی با emf برابر با ۱۲/۰V الکترونی را از پایانهٔ مثبت باتری به پایانهٔ منفی آن از طریق باتری انتقال دهد؟ (ب) اگر در هر ثانیه $۳/۴۰\times۱۰^{۱۸}$ الکترون عبور کند، توان باتری برحسب وات چقدر است؟

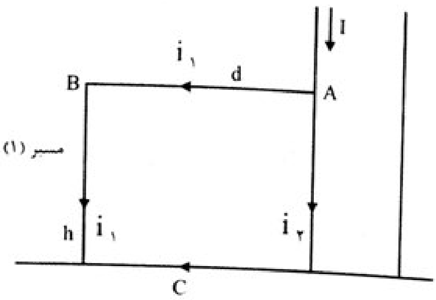
حل: (الف)
$$W = eV = (۱)(۱۲) = ۱۲eV$$
$$P = \frac{nW}{t} = \frac{(۳/۱۴\times۱۰^{۱۸})(۱۲\times۱/۶\times۱۰^{-۱۹})}{(۱)} = ۶/۵۳\text{W}$$

●●۱۱- ناحیهٔ ایمن از رعد و برق. شکل ۲۳-۲۸ بیانگر این است که چرا موقع آذرخش نباید زیر درخت ایستاد. اگر آذرخش از کنارهٔ درخت پایین بیاید قسمتی از آن ممکن است وقتی به قسمت خشکی در پوستهٔ درخت برسد جهش کند و از طریق بدن شخص به داخل زمین برود. در شکل قسمتی از آذرخش فاصلهٔ d را در هوا جهش کرده و سپس از بدن شخص گذشته است (که مقاومت آن نسبت به هوا قابل چشمپوشی است). بقیهٔ جریان فاصلهٔ h را از طریق هوای مجاور درخت به زمین رفته است. اگر $d/h = ۰/۴۰۰$ و جریان کل $I = ۵۰۰۰A$ باشد، جریانی که از بدن شخص می‌گذرد چقدر است؟



شکل ۲۳-۲۸ مسئلهٔ ۱۱

حل:



در نقطهٔ A جریان از دو مسیر به زمین می‌رود یکی از طریق هوای مجاور درخت (مسیر ۲) جریان در این مسیر i_2 است و جریان i_1 از مسیر ۱ یعنی هوا و بدن شخصی که مقاومت ناچیزی دارد.

$$V_{AC} = R_1 i_1 = R_2 i_2$$

$$\frac{i_1}{i_2} = \frac{R_2}{R_1}$$

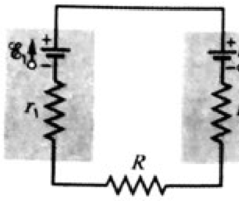
نسبت مقاومت‌ها به نسبت طول مسیر در هوا می‌باشد.

$$\frac{i_1}{i_2} = \frac{h}{d} \Rightarrow \frac{i_1}{i_1 + i_2} = \frac{h}{d+h}$$

$$\frac{i_1}{5000} = \frac{h}{0.400 + h} = \frac{1}{1.4}$$

$$i_1 = 3600\,A$$

۱۲●● - (الف) در شکل ۲۳-۲۹، اگر جریان در مدار $1.0\,mA$ باشد مقدار R باید چقدر باشد؟ $\varepsilon_1 = 2.0\,V$ ، $\varepsilon_2 = 3.0\,V$ و $r_1 = r_2 = 3.0\,\Omega$ است. (ب) آهنگ ایجاد انرژی گرمایی در R چقدر است؟



شکل ۲۳-۲۹ مسئلهٔ ۱۲

حل: (الف) چون $\varepsilon_2 > \varepsilon_1$ است انتظار داریم جریان پادساعتگرد باشد که همین جهت را انتخاب کرده و قاعدهٔ حلقه را می‌نویسیم.

$$-\varepsilon_1 - ir_1 - iR - ir_2 + \varepsilon_2 = 0$$

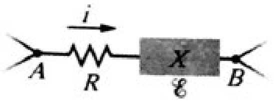
$$-2 - (1\times10^{-3})(3) - (1\times10^{-3})R - (1\times10^{-3})(3) + 3 = 0$$

$$\Rightarrow R = 994\,\Omega$$

(ب)

$$P = Ri^2 = (994)(1\times10^{-3})^2 = 9.94\times10^{-4}\ W$$

۱۳●● - در شکل ۲۳-۳۰ بخش AB از مدار، وقتی جریان $i = 1.0\,A$ در جهت نشان داده شده از آن می‌گذرد، انرژی را با آهنگ $50\,W$ جذب می‌کند. مقاومت $R = 2.0\,\Omega$ است. (الف) اختلاف پتانسیل میان A و B چقدر است؟ منبع نیروی محرکهٔ الکتریکی X مقاومت درونی ندارد. (ب) emf چقدر است؟ (پ) نقطهٔ B به پایانهٔ مثبت X وصل شده است یا پایانه منفی آن؟ SSM

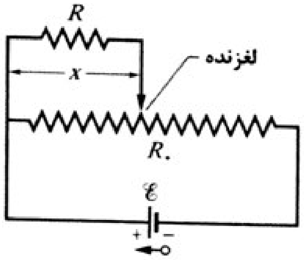


شکل ۲۳-۳۰ مسئلهٔ ۱۳

حل: (الف) $P = V_{AB} i \Rightarrow 50 = V_{AB}(1) \Rightarrow V_{AB} = 50\,V$

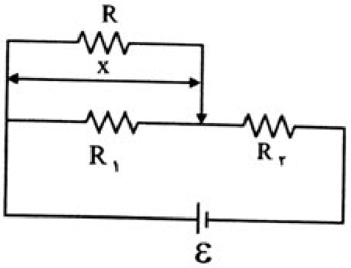
(ب) $V_{AB} = Ri + \varepsilon \Rightarrow 50 = (2)(1) + \varepsilon \Rightarrow \varepsilon = 48\,V$

۱۴●● - شکل ۲۳-۳۱ یک باتری را نشان می‌دهد که به دو سر مقاومت یکنواخت R_0 وصل شده است. لغزنده‌ای از $x = 0$ تا $x = 10\,cm$ از چپ به راست روی مقاومت حرکت می‌کند. حرکت لغزنده میزان مقاومت سمت چپ و مقاومت سمت راست نقطهٔ تماس را تغییر می‌دهد. آهنگ مصرف انرژی در مقاومت R را برحسب تابعی از x پیدا کنید. این تابع را به ازای $\mathcal{E} = 50\,V$ ، $R = 2000\,\Omega$ و $R_0 = 100\,\Omega$ رسم کنید.



شکل ۲۳-۳۱ مسئلهٔ ۱۴

حل:



$$R_1 + R_2 = R_0$$

$$R_1 = \frac{x}{10} R_0 = aR_0$$

برای سادگی فرض کردیم:

$$\frac{x}{10} = a$$

$$R_2 = (1-a)R_0$$

$$R' = \frac{RR_1}{R+R_1} = \frac{aRR_0}{R+aR_0}$$

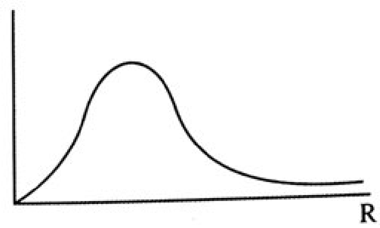
$$R_{eq} = R' + R_2 = \frac{aRR_0}{R+aR_0} + (1-a)R_0 = \frac{R_0\left[R + a(1-a)R_0\right]}{R+aR_0}$$

$$i = \frac{\varepsilon}{R_{eq}} = \frac{\varepsilon(R+aR_0)}{R_0\left[R+a(1-a)R_0\right]}$$

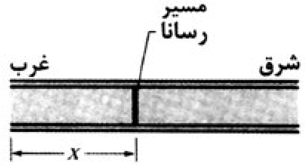
ولتاژ دو سر R را V' در نظر می‌گیریم.

$$V' = R'i = \frac{aRR_0}{R+aR_0} \cdot \frac{\varepsilon(R+aR_0)}{R_0\left[R+a(1-a)R_0\right]} = \frac{aR\varepsilon}{R+a(1-a)R_0}$$

$$P=\frac{V'^2}{R}=\frac{1}{R}\cdot\frac{a^2R^2\varepsilon^2}{[r+a(1-a)R_0]^2}=\frac{x^2R\varepsilon^2}{100\left[R+\frac{x}{100}\left(1-\frac{x}{10}\right)R_0\right]^2}$$



●●۱۵- کابل زیرزمینی طویلی به طول ۱۰km که از شرق به غرب کشیده شده شامل دو سیم موازی است که مقاومت هر یک ۱۳Ω/km است. در فاصلهٔ x از انتهای غربی، با یک رسانا به مقاومت R که دو سیم را به هم وصل می‌کند یک اتصال کوتاه الکتریکی انجام می‌گیرد (شکل ۲۳-۳۲). مقاومت سیمها و اتصال کوتاه وقتی که از انتهای شرقی آن اندازه‌گیری شود برابر با ۱۰۰Ω و وقتی از انتهای غربی آن اندازه‌گیری شود برابر با ۲۰۰Ω است. (الف) x و (ب) R چقدرند؟



شکل ۲۳-۳۲ مسئلهٔ ۱۵

حل: با توجه به داده‌های مسئله فرض می‌کنیم $L=10\,km$ و $a=13\,\Omega/km$ باشند.

(الف) اگر از انتهای شرق نگاه کنیم، داریم

$$R_1=100=2a(L-x)+R$$

و اگر از انتهای غرب نگاه کنیم، داریم:

$$R_2=200=2ax+R$$

دو رابطه را از هم کم می‌کنیم:

$$200-100=4ax-2aL$$

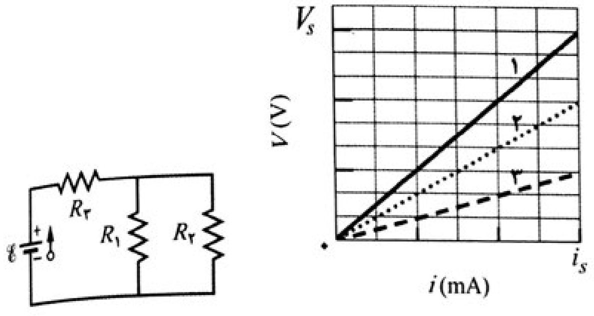
$$100=(4)(13)x-(2)(13)(10)\Rightarrow x=6.9\,km$$

(ب) دو رابطه R_1 و R_2 را جمع کنیم، داریم:

$$300=2aL+2R$$

$$300=(2)(13)(10)+2R\Rightarrow R=20\,\Omega$$

●●۱۶- emf باتری آرمانی در شکل ۲۳-۳۳ الف $\mathscr{E}=6.0\,V$ است. نمودار ۱ در شکل ۲۳-۳۳ ب جریان i در مقاومت ۱ مدار را برحسب اختلاف پتانسیل الکتریکی V برقرار شده در دو سر آن مقاومت به دست می‌دهد. مقیاس محور V با $V_s=18.0\,V$، و مقیاس محور i با $i_s=3.00\,mA$ مشخص شده است. نمودارهای ۲ و ۳ نمودارهای مشابهی را به ترتیب برای مقاومتهای ۲ و ۳ نشان می‌دهند. جریان در مقاومت ۲ چقدر است؟



شکل ۲۳-۳۳ مسئلهٔ ۱۶

حل: شیب نمودارها مقاومت را به دست می‌دهند.

$$R_1=\frac{\Delta V}{\Delta i_1}=\frac{18}{3\times10^{-3}}=6000\,\Omega$$

$$R_2=\frac{\Delta V}{\Delta i_2}=\frac{12}{3\times10^{-3}}=4000\,\Omega$$

$$R_3=\frac{\Delta V}{\Delta i_3}=\frac{6}{3\times10^{-3}}=2000\,\Omega$$

R_1 و R_2 موازی بسته شده‌اند.

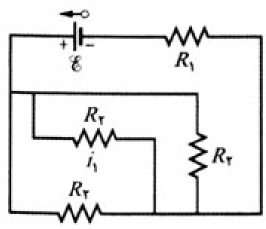
$$R_{12}=\frac{R_1R_2}{R_1+R_2}=2400\,\Omega$$

$$\varepsilon=(R_3+R_{12})i\Rightarrow 6=(2000+2400)i\Rightarrow i=1.36\times10^{-3}\,A$$

$$V_{12}=R_{12}i=(2400)(1.36\times10^{-3})=3.26\,V$$

$$\overline{L}_2=\frac{V_{12}}{R_2}=\frac{3.26}{4000}=8.15\times10^{-4}\,A$$

●●۱۷- در شکل ۲۳-۳۴، $R_1=6.00\,\Omega$، $R_2=18.0\,\Omega$ و emf باتری آرمانی $\mathscr{E}=12.0\,V$ است. (الف) اندازه و (ب) جهت (چپ یا راست) جریان i_1 چیست؟ (پ) چقدر انرژی در چهار مقاومت در ۱/۰۰ min مصرف می‌شود؟



شکل ۲۳-۳۴ مسئله ۱۷

حل: (الف) سه مقاومت R_2 موازی‌اند و مقاومت معادل آنها برابر $R=6\,\Omega$ است که با R_1 به صورت متوالی می‌باشد لذا مقاومت معادل مدار برابر $R_{eq}=12\,\Omega$ خواهد بود. در نتیجه جریان در R_{eq} برابر است با: $i=\frac{\varepsilon}{R_{eq}}=\frac{12}{12}=1\,A$

همین جریان از مقاومت R نیز عبور می‌کند و بنا به تقارن جریان عبوری از هر یک از مقاومت‌های R_2 برابر $(1/3)\,A$ در نتیجه $i_1=0.33\,A$ است.

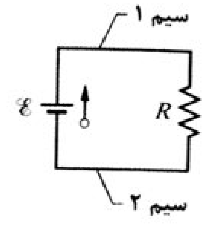
(ب) جهت جریان از چپ به راست است.

(پ)

$$P=R_{eq}i^2=(12)(1)^2=12\,W$$

$$W=Pt=(12)(60)=720\,J$$

۱۸●● - شکل ۲۳-۳۵ مقاومت $R=۶/۰۰\,\Omega$ را نشان می‌دهد که به باتری آرمانی با emf برابر $\varepsilon=۱۲/۰\,V$ به کمک سیمهای مسی متصل شده است. طول هر سیم ۲۰/۰ cm و شعاع آن ۱/۰۰mm است. در چنین مدارهایی در این فصل از اختلاف پتانسیل در طول سیمها و تبدیل انرژی به انرژی گرمایی در آنها چشمپوشی کردیم. اعتبار این چشمپوشی را در مدار شکل ۲۳-۲۹ بررسی کنید. اختلاف پتانسیل دو سر (الف) مقاومت و (ب) هر یک از دو بخش سیم چقدر است؟ با چه آهنگی انرژی به انرژی گرمایی در (پ) مقاومت و (ت) هر بخش سیم تبدیل می‌شود؟



شکل ۲۳-۳۵ مسئلهٔ ۱۸

حل: دو سیم یکسان‌اند و مقاومت هر یک برابر است با

$$R_{\text{سیم}}=\rho\frac{L}{A}=(۱/۶۹\times۱۰^{-۸})\frac{۰/۲}{\pi(۱\times۱۰^{-۳})^{۲}}=۱/۰۸\times۱۰^{-۳}\,\Omega$$

$$R_{eq}=R+R_{\text{سیم}}+R_{\text{سیم}}=۶+۲(۱/۰۸\times۱۰^{-۳})=۶/۰۰۲۲\,\Omega$$

$$i=\frac{\varepsilon}{R_{eq}}=\frac{۱۲}{۶/۰۰۲۲}=۱/۹۹۹۳\,A$$

(الف) $V_R=Ri=(۶)(۱/۹۹۹۳)=۱۱/۹۹۵۸\,V$

(ب) $V_{\text{سیم}}=R_{\text{سیم}}i=(۱/۰۸\times۱۰^{-۳})(۱/۹۹۹۳)=۲/۱۶\times۱۰^{-۳}\,V$

(پ) $P_R=Ri^{۲}=(۶)(۱/۹۹۹۳)^{۲}=۲۴\,W$

(ت) $P_{\text{سیم}}=R_{\text{سیم}}i^{۲}=(۱/۰۸\times۱۰^{-۳})(۱/۹۹۹۳)^{۲}$

$=۴/۳\times۱۰^{-۳}\,W$

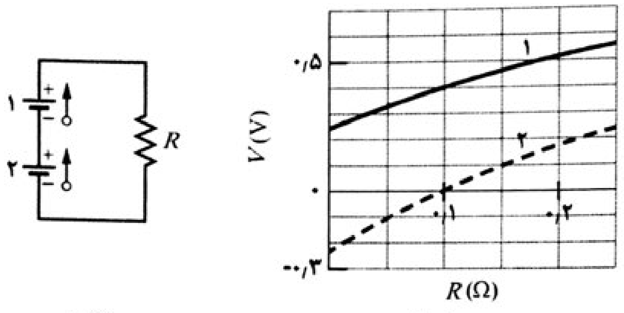
۱۹●● - جریان در یک مدار تک حلقه‌ای با مقاومت R برابر است با ۵/۰A. وقتی مقاومت اضافی ۲/۰Ω به صورت متوالی با R در مدار قرار داده شود، جریان به ۴/۰A می‌رسد. R چقدر است؟ **ILW**

حل:

$$\varepsilon=Ri=۵R$$

$$\varepsilon=(R+۲)i'\Rightarrow ۵R=(R+۲)(۴)\Rightarrow R=۸\,\Omega$$

۲۰●● - در شکل ۲۳-۳۶ الف هر دو باتری دارای emf برابر با $\mathscr{E}=۱/۲۰\,V$ هستند و مقاومت خارجی R متغیر است. شکل ۲۳-۳۶ ب پتانسیلهای الکتریکی V بین پایانه‌های هر باتری را برحسب تابعی از R به دست می‌دهد: منحنی ۱ مربوط به باتری ۱ و منحنی ۲ مربوط به باتری ۲ است. مقاومت درونی (الف) باتری ۱ و (ب) باتری ۲ چقدر است؟



شکل ۲۳-۳۶ مسئلهٔ ۲۰

حل: از قانون حلقه می‌توان نوشت

$$\varepsilon_{۲}-ir_{۲}+\varepsilon_{۱}-ir_{۱}-iR=۰$$

$$i=\frac{\varepsilon_{۱}+\varepsilon_{۲}}{R_{۱}+r_{۱}+r_{۲}}$$

ولتاژ پایانه باتری ۱ را $V_{۱}$ و ولتاژ پایانه باتری ۲ را $V_{۲}$ درنظر می‌گیریم، داریم:

$$V_{۱}=\varepsilon_{۱}-ir_{۱}=\varepsilon_{۱}-\frac{\varepsilon_{۱}+\varepsilon_{۲}}{R+r_{۱}+r_{۲}}r_{۱}=۱/۲-\frac{۲/۴r_{۱}}{R+r_{۱}+r_{۲}}$$

$$V_{۲}=\varepsilon_{۲}-ir_{۲}=\varepsilon_{۲}-\frac{\varepsilon_{۱}+\varepsilon_{۲}}{R+r_{۱}+r_{۲}}r_{۲}=۱/۲-\frac{۲/۴r_{۲}}{R+r_{۱}+r_{۲}}$$

با توجه به نمودار $V_{۲}$، در $R=۰/۱$ داریم $V_{۲}=۰$ و $V_{۱}=۰/۴$. لذا:

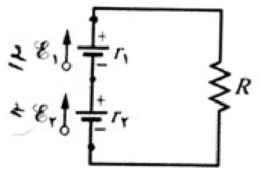
$$۰/۴=۱/۲-\frac{۲/۴r_{۱}}{۰/۱+r_{۱}+r_{۲}}$$

$$۰=۱/۲-\frac{۲/۴r_{۲}}{۰/۱+r_{۱}+r_{۲}}$$

از حل همزمان دو معادله فوق برای $r_{۱}$ و $r_{۲}$ خواهیم داشت:

$$r_{۱}=۰/۲\,\Omega \quad , \quad r_{۲}=۰/۳\,\Omega$$

۲۱●●● - در شکل ۲۳-۳۷، emf باتری ۱ برابر با $\mathscr{E}_{۱}=۱۲/۰\,V$ و مقاومت درونی $r_{۱}=۰/۰۱۶\,\Omega$ و emf باتری ۲ برابر با $\mathscr{E}_{۲}=۱۲/۰\,V$ و مقاومت درونی آن $r_{۲}=۰/۰۱۲\,\Omega$ است. باتریها به طور متوالی به مقاومت خارجی R وصل شده‌اند. (الف) چه مقدار R اختلاف پتانسیل پایانه به پایانهٔ یکی از باتریها را صفر می‌کند؟ (ب) این کدام باتری است؟ **SSM**



شکل ۲۳-۳۷ مسئلهٔ ۲۱

حل: جریان در مدار برابر است با

$$i=\frac{\varepsilon_{۱}+\varepsilon_{۲}}{R+r_{۱}+r_{۲}}=\frac{۲۴}{R+۰/۰۲۸} \qquad (۱)$$

ولتاژ دو سر پایانه‌های باتریها برابر است با

$$V_{۱}=\varepsilon_{۱}-ir_{۱}=۱۲-۰/۰۱۶i$$

$$V_{۲}=\varepsilon_{۲}-ir_{۲}=۱۲-۰/۰۱۲i$$

چون $r_2 > r_1$ نتیجه می‌گیریم ولتاژ دو سر پایانه آن زودتر صفر می‌شود و داریم

$$0 = 12 - 0/016i \Rightarrow i = \frac{12}{0/016}$$

که در رابطه (۱) قرار دهیم خواهیم داشت $R = 0/004\Omega$.

(ب) همانطور که گفته شد باتری ۱.

●●●۲۲- وقتی مقاومت 500Ω به دو سر یک سلول خورشیدی وصل شود اختلاف پتانسیل $0/10V$ تولید می‌شود، و هرگاه مقاومت 1000Ω جایگزین شود اختلاف پتانسیل $0/15V$ تولید می‌شود. (الف) مقاومت درونی و (ب) emf سلول خورشیدی چقدر است؟ (پ) مساحت سلول خورشیدی $5/0cm^2$ و آهنگ دریافت انرژی از نور بر یکای مساحت برابر با $2/0mW/cm^2$ است. بازده سلول برای تبدیل انرژی نوری به انرژی گرمایی در مقاومت خارجی 1000Ω چقدر است؟

حل: (الف) مقاومت داخلی سلول خورشیدی را r می‌نامیم، داریم:

$$i = \frac{\varepsilon}{R+r}$$

$$V = \varepsilon - ir = \varepsilon - \frac{\varepsilon r}{R+r} = \frac{\varepsilon R}{R+r}$$

$$0/1 = \frac{500\varepsilon}{500+r}$$

$$0/15 = \frac{1000r}{1000+r}$$

اگر دو رابطه را بر هم تقسیم کنیم $r = 1000\Omega$ به دست می‌آید.

$$0/1 = \frac{500\varepsilon}{500+1000} \Rightarrow \varepsilon = 0/3V$$

(پ) بازده سلول چنین می‌شود

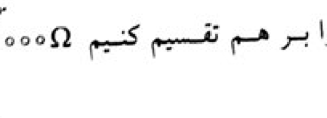
$$\frac{P}{P_{دریافتی}} = \frac{V^2/R}{P_{دریافتی}} = \frac{(0/15)^2/(1000)}{(5)(2\times10^{-3})} = 2/25\times10^{-3}$$

یا

٪۰/۲۲۵

بخش ۲۳-۷ مدارهای چند حلقه‌ای

●۲۳- در شکل ۲۳-۳۸، $R_1 = R_2 = 4/00\Omega$ و $R_3 = 2/500\Omega$ است. مقاومت معادل میان نقطه‌های D و E را پیدا کنید. (*راهنمایی:* فرض کنید که یک باتری به این دو نقطه وصل است).



شکل ۲۳-۳۸ مسئلهٔ ۲۳

حل:

$$R_{12} = 2\Omega$$

$$R_{eq} = R_3 + R_{12} = 4/5\Omega$$

●۲۴- وقتی مقاومتهای ۱ و ۲ به طور متوالی به یکدیگر وصل شوند، مقاومت معادل $16/0\Omega$ است. هرگاه به طور موازی وصل شوند، مقاومت معادل $3/0\Omega$ است. (الف) مقاومت کوچکتر و (ب) مقاومت بزرگتر چقدر است؟

حل: (الف) و **(ب)** $\frac{R_1R_2}{R_1+R_2} = 3$ ، $R_1 + R_2 = 16$

از حل همزمان این دو معادله داریم $R_1 = 12\Omega$ و $R_2 = 4\Omega$.

●۲۵- چهار مقاومت $18/0\Omega$ به طور موازی به دو سر یک باتری آرمانی $25/0V$ وصل شده‌اند. جریانی که از باتری می‌گذرد چقدر است؟

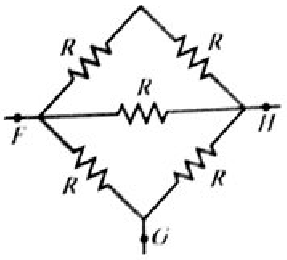
حل:

$$\frac{1}{R_{eq}} = \sum_{i=1}^{4}\frac{1}{R_i} = \frac{4}{R} \Rightarrow R_{eq} = \frac{R}{4} = \frac{18}{4} = 4/5\Omega$$

در نتیجه جریان عبوری از باتری برابر است با

$$i = \frac{V}{R_{eq}} = \frac{25}{4/5} = 5/56A$$

●۲۶- شکل ۲۳-۳۹ پنج مقاومت $5/00$ اهمی را نشان می‌دهد. مقاومت معادل بین نقطه‌های (الف) F و H و (ب) F و G را پیدا کنید. (*راهنمایی:* برای هر زوج نقطه، فرض کنید که یک باتری به دو سر زوج متصل است).



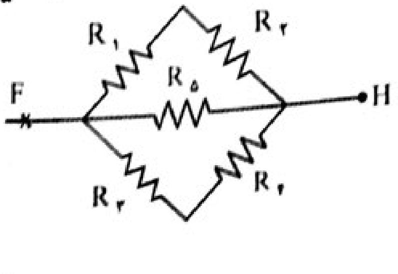
شکل ۲۳-۳۹ مسئلهٔ ۲۶

حل: (الف) مقاومت معادل بین F و H

$$R_{12} = R_1 + R_2 = 5 + 5 = 10\Omega$$

$$R_{34} = R_3 + R_4 = 5 + 5 = 10\Omega$$

$$\frac{1}{R_{eq}} = \frac{1}{10} + \frac{1}{5} + \frac{1}{10} \Rightarrow R_{eq} = 2/5\Omega$$



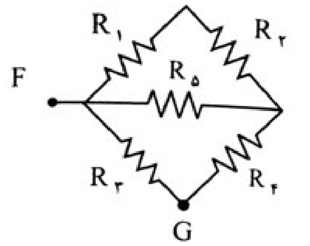
(ب)

$$R_{12} = 10\Omega$$

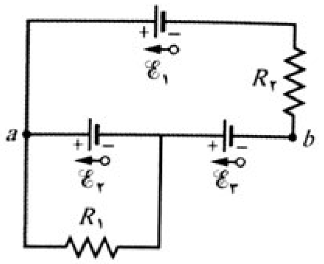
$$R_{125} = \frac{(10)(5)}{10+5} = 3/33\Omega$$

$$R_{1254} = 3/33 + 5 = 8/33\Omega$$

$$R_{eq} = \frac{(8/33)(5)}{8/33+5} = 3/12\Omega$$



●۲۷- در شکل ۲۳-۴۰، $R_{۱}=۱۰۰\,\Omega$ ، $R_{۲}=۵۰\,\Omega$ و در باتریهای آرمانی $\varepsilon_{۱}=۶/۰\,V$ ، $\varepsilon_{۲}=۵/۰\,V$ و $\varepsilon_{۳}=۴/۰\,V$ است. (الف) جریان در مقاومت ۱، (ب) جریان در مقاومت ۲ و (پ) اختلاف پتانسیل بین نقطه‌های a و b را پیدا کنید.



شکل ۲۳-۴۰ مسئلهٔ ۲۷

حل: (الف) حلقه شامل $R_{۱}$ را در نظر می‌گیریم. جریان را پادساعتگرد در نظر می‌گیریم.

$$i_{۱}=\frac{\varepsilon_{۲}}{R_{۱}}=\frac{۵}{۱۰۰}=۰/۰۵\,A$$

(ب) حلقه شامل $R_{۲}$ را با جهت جریان ساعتگرد در نظر می‌گیریم. با استفاده از قاعده حلقه داریم

$$-\varepsilon_{۱}-R_{۲}i_{۲}+\varepsilon_{۳}+\varepsilon_{۲}=۰$$

$$i_{۲}=\frac{\varepsilon_{۳}+\varepsilon_{۲}-\varepsilon_{۱}}{R_{۲}}=\frac{۴+۵-۶}{۵۰}=۰/۰۶\,A$$

(پ) V_{ab} را می‌توان از سه مسیر محاسبه کرد.

$$V_a-\varepsilon_{۱}-R_{۲}i_{۲}=V_b$$

$$V_a-V_b=\varepsilon_{۱}+R_{۲}i_{۲}=۶+(۵۰)(۰/۰۶)=۹\,V$$

دو مسیر دیگر بعهده خواننده واگذار می‌شود.

●۲۸- در شکل ۲۳-۹، اگر $\varepsilon_{۱}=۴/۰\,V$ ، $\varepsilon_{۲}=۱/۰\,V$ ، $R_{۱}=R_{۲}=۱۰\Omega$ و $R_{۳}=۵/۰\Omega$ و باتری آرمانی باشد، اختلاف پتانسیل V_d-V_c میان نقطه‌های d و c چقدر است؟

حل: قاعده حلقه را برای حلقه سمت چپ و سمت راست در نظر می‌گیریم.

$$\varepsilon_{۱}-i_{۱}R_{۱}+i_{۳}R_{۳}=۰\Rightarrow ۴-۱۰i_{۱}+۵i_{۳}=۰$$

$$\varepsilon_{۲}+i_{۲}R_{۲}+i_{۳}R_{۳}=۰\Rightarrow ۱+۱۰i_{۲}+۵i_{۳}=۰$$

از قاعده گره نیز داریم

$$i_{۳}=i_{۲}-i_{۱}$$

از حل همزمان این سه معادله برای جریانها خواهیم داشت

$i_{۱}=۰/۲۷۵\,A$, $i_{۲}=۰/۰۲۵\,A$, $i_{۳}=-۰/۲۵\,A$

از اینجا نتیجه می‌گیریم که جهت جریان $i_{۳}$ صحیح انتخاب نشده است. و جهت جریان روبه‌بالا است. اختلاف پتانسیل بین c و d را نیز می‌توان از مسیر به دست آورد. مسیر از طریق $R_{۲}$؛

$$V_d=V_c=i_{۲}R_{۲}=(۰/۰۲۵)(۱۰)=۲/۵\,V$$

دو مسیر دیگر بعهده خواننده واگذار می‌شود.

●۲۹- نه سیم مسی به طول l و قطر d به طور موازی به هم وصل شده و یک رسانای مرکب با مقاومت R را به وجود آورده‌اند. اگر سیم مسی به طول l به تنهایی همان مقاومت را داشته باشد، قطر D آن باید چقدر باشد؟ SSM

حل:

$$R_{eq}=\frac{R}{۹}=\frac{۱}{۹}\rho\frac{l}{\pi d^{۲}/۴}$$

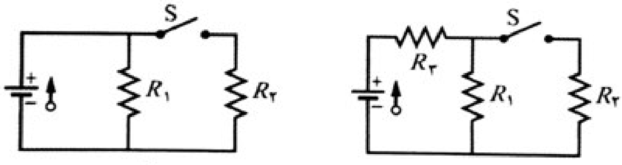
طبق فرض مسئله داریم

$$R_{eq}=\rho\frac{l}{\pi D^{۲}/۴}$$

از برابر قرار دادن مقاومت‌های معادل داریم

$$\frac{۴}{۹}\rho\frac{l}{\pi d^{۲}}=۴\rho\frac{l}{\pi D^{۲}}\Rightarrow D=۳d$$

●●●۳۰- مقاومتها در شکلهای ۲۳-۴۱ الف و ب همگی $۶/۰\Omega$ و emf باتریهای آرمانی ۱۲V است. (الف) وقتی کلید S در شکل ۲۳-۴۱ الف بسته شود، آیا پتانسیل الکتریکی $V_{۱}$ دو سر مقاومت ۱ تغییر می‌کند یا یکسان می‌ماند؟ (ب) وقتی کلید در شکل ۲۳-۴۱ ب بسته شود، آیا $V_{۱}$ دو سر مقاومت ۱ تغییر می‌کند یا یکسان می‌ماند؟



(ب) (الف)

شکل ۲۳-۴۱ مسئلهٔ ۳۰

حل: (الف) در شکل (الف) در حالت باز بودن کلید

$$V_{۱}=\varepsilon=۱۲\,V$$

در حالت بسته بودن کلید اختلاف پتانسیل کماکان همان اختلاف پتانسیل روی $R_{۱}$ است.

(ب) در شکل (ب) در حالت باز بودن کلید اختلاف پتانسیل دو سر $R_{۱}$ برابر است با:

$$i=\frac{\varepsilon}{R_{۱}+R_{۲}}=\frac{۱۲}{۱۲}=۱A$$

$$V_{۱}=R_{۱}i=(۶)(۱)=۶\,V$$

در حالتی که کلید بسته است داریم:

$$R_{۱۲}=\frac{R_{۱}R_{۲}}{R_{۱}+R_{۲}}=۳\Omega$$

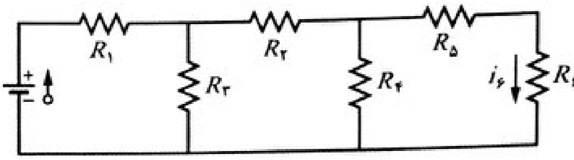
$$R_{eq}=R_{۲}+R_{۱۲}=۶+۳=۹\Omega$$

$$i=\frac{\varepsilon}{R_{eq}}=\frac{۱۲}{۹}=۱/۳۳\,A$$

$$V_{۱}=iR_{۱۲}=(۱/۳۳)(۳)=۴\,V$$

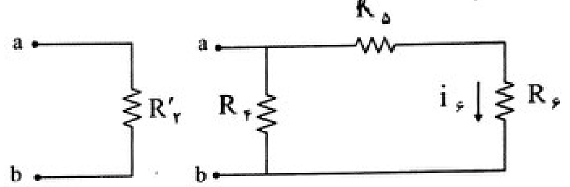
در نتیجه اختلاف پتانسیل دو سر $R_{۱}$ تغییر می‌کند.

●●۳۱- در شکل ۲۳-۴۲ جریان در مقاومت ۶ برابر $i_۶ = ۱/۴۰\,A$ و مقاومتها عبارت اند از $R_۱ = R_۲ = R_۳ = ۲/۰۰\Omega$ ، $R_۴ = ۱۶/۰\Omega$ ، $R_۵ = ۸/۰۰\Omega$ و $R_۶ = ۴/۰۰\Omega$. emf باتری آرمانی چقدر است؟ GO



شکل ۲۳-۴۲ مسئله ۳۱

حل: طبق روش مرسوم از سمت راست مدار را بررسی می‌کنیم.



$R'_۱ = R_{۵۶} = ۸ + ۴ = ۱۲\Omega$

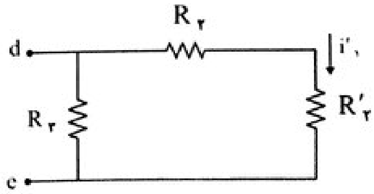
$V_{ab} = R'_۱ i_۶ = (۱۲)(۱/۴) = ۱۶/۸V$

مقاومت معادل دو مقاومت $R'_۱$ و $R_۴$ برابر است با

$$R'_۲ = \frac{R_۴ R'_۱}{R_۴ + R'_۱} = \frac{(۱۶)(۱۲)}{۱۶+۱۲} = ۶/۹\Omega$$

حال می‌توان جریانی که از $R'_۲$ می‌گذرد را حساب کرد

$$i_۱ = \frac{V_{ab}}{R'_۲} = \frac{۱۶/۸}{۶/۹} = ۲/۴۳A$$



معادل مقاومت $R'_۲$ و $R_۲$ نیز برابر است با

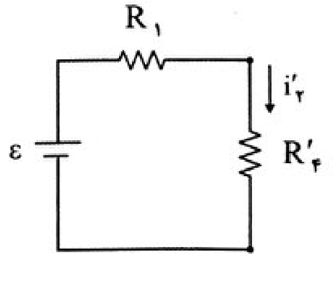
$R'_۳ = R_۲ + R'_۲ = ۲ + ۶/۹ = ۸/۹\Omega$

$V_{de} = R'_۳ i'_۱ = (۸/۹)(۲/۴۳) = ۲۱/۶V$

معادل مقاومت $R'_۳$ و $R_۳$ نیز برابر است با

$$R'_۴ = \frac{R'_۳ R_۳}{R'_۳ + R} = \frac{(۸/۹)(۲)}{۸/۹+۲} = ۱/۶۳\Omega$$

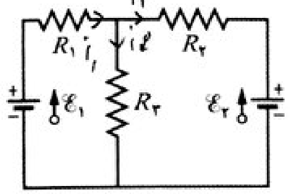
$$i'_۲ = \frac{V_{de}}{R'_۴} = \frac{۲۱/۶V}{۱/۶۳} = ۱۳/۲۵A$$



$R_{eq} = R_۱ + R'_۴ = ۲ + ۱/۶۳ = ۳/۶۳\Omega$

$\varepsilon = R_{eq} i'_۲ = (۳/۶۳)(۱۳/۲۵) = ۴۸/۱\Omega$

●●۳۲- در شکل ۲۳-۴۳ emf باتریهای آرمانی $\varepsilon_۱ = ۱۰/۰\,V$ و $\varepsilon_۲ = ۰/۵۰۰\,\varepsilon_۱$ و هر یک از مقاومتها $۴/۰۰\Omega$ است. جریان در (الف) مقاومت ۲ و (ب) مقاومت ۳ چقدر است؟



شکل ۲۳-۴۳ مسئله‌های ۳۲، ۴۳ و ۹۸

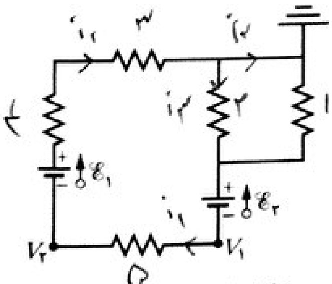
حل: (الف) و (ب) قاعده حلقه را با توجه به جهت جریانها در جهت $\varepsilon_۱$ و $\varepsilon_۲$ برای دو حلقه می‌نویسیم:

$\varepsilon_۱ - i_۱R_۱ - (i_۱ + i_۲)R_۳ = ۰$

$\varepsilon_۲ - i_۲R_۲ - (i_۱ + i_۲)R_۳$

و همچنین طبق قاعده گره داریم $i_۳ = i_۱ + i_۲$. از حل همزمان معادله‌ها $i_۲ = ۰$ و $i_۳ = ۱/۲۵A$ به دست می‌آید.

●●۳۳- در شکل ۲۳-۴۴، emf باتریهای آرمانی $\varepsilon_۱ = ۵/۰\,V$ و $\varepsilon_۲ = ۱۲\,V$ ، و هر یک از مقاومتها $۲/۰\Omega$ و پتانسیل در نقطهٔ اتصال به زمین مدار صفر تعریف می‌شود. پتانسیلهای (الف) $V_۱$ و (ب) $V_۲$ در نقطه‌های نشان داده شده چقدر است؟ SSM

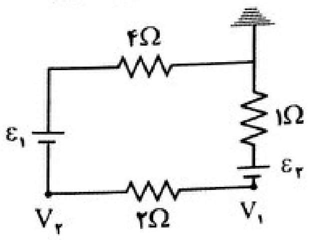


شکل ۲۳-۴۴ مسئلهٔ ۳۳

حل: مدار داده شده را می‌توان به صورت زیر ساده کرده و پس از آن جریان را به دست آورد.

$-۲i - \varepsilon_۱ - ۴i - i + \varepsilon_۲ = ۰$

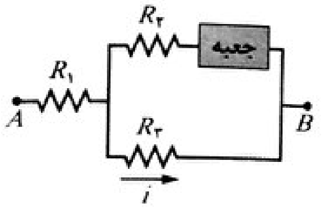
$-۷i - ۵ + ۱۲ = ۰ \Rightarrow i = ۱A$



(الف) $V_۱ + \varepsilon_۲ - i = ۰ \Rightarrow V_۱ = -۱۲ + ۱ = -۱۱V$

(ب) $V_۲ - Ri = V_۱ \Rightarrow V_۲ = -۱۱ + (۲)(۱) = -۹V$

●●۳۴- شکل ۲۳-۴۵ بخشی از یک مدار را نشان می‌دهد. مقاومتها عبارت‌اند از $R_1 = 2/0\ \Omega$ ، $R_2 = 4/0\ \Omega$ ، $R_3 = 6/0\ \Omega$ و جریان نشان داده شده $i = 6/0\ A$ است. اختلاف پتانسیل الکتریکی میان نقطه‌های A و B که این بخش مدار را به بقیه مدار وصل می‌کند برابر $V_A - V_B = 78\ V$ است. (الف) آیا وسیله‌ای که با «جعبه» نشان داده شده است انرژی را از مدار می‌گیرد یا به مدار می‌دهد و (ب) با چه آهنگی؟



شکل ۲۳-۴۵ مسئلهٔ ۳۴

حل: ابتدا اختلاف پتانسیل دو سر R_3 را به دست می‌آوریم

$$V_3 = R_3 i = (6)(6) = 36\,V$$

در نتیجه

$$V_1 = (V_A - V_B) - V_3 = 78 - 36 = 42\,V$$

و جریان عبوری از R_1 برابر است با

$$i_1 = \frac{V_1}{R_1} = \frac{42}{2} = 21\,A$$

و از قاعده انشعاب جریان عبوری از R_2 به دست می‌آید.

$$i_2 = i_1 - i = 21 - 6 = 15\,A$$

از طرف دیگر داریم (V_b ولتاژ دو سر جعبه است)

$$V_3 = V_2 + V_b = R_2 i_2 + V_b$$

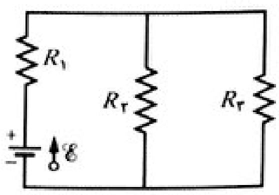
$$36 = (4)(15) + V_b \Rightarrow V_b = -24\,V$$

چون اختلاف پتانسیل دو سر جعبه منفی است لذا می‌توان گفت که این وسیله در حال گرفتن انرژی از مدار است.

(ب)

$$P = V_b i_2 = (24)(15) = 360\,W$$

✓ ●●●۳۵- در شکل ۲۳-۴۶، $R_1 = 2/00\,\Omega$ ، $R_2 = 5/00\,\Omega$ و باتری آرمانی است. چه مقداری از R_3 آهنگ اتلاف در مقاومت ۳ را بیشینه می‌کند؟



شکل ۲۳-۴۶ مسئله‌های ۳۵، ۹۹، ۱۰۶ و ۱۰۷

حل:

$$R_{23} = \frac{R_2R_3}{R_2+R_3} = \frac{5R_3}{5+R_3}$$

$$R_{eq} = R_1 + R_{23} = 2 + \frac{5R_3}{5+R_3} = \frac{7R_3+10}{5+R_3}$$

$$i = \frac{\varepsilon}{R_{eq}} = \frac{\varepsilon(5+R_3)}{7R_3+10}$$

$$V_3 = iR_{23} = \frac{\varepsilon(5+R_3)}{7R_3+10}\cdot\frac{5R_3}{5+R_3} = \frac{5\varepsilon R_3}{7R_3+10}$$

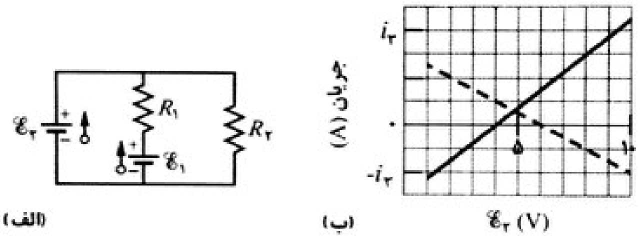
آهنگ اتلاف در R_3 برابر است با:

$$P = \frac{V_3^2}{R_3} = \frac{1}{R_3}\left(\frac{5\varepsilon R_3}{7R_3+10}\right)^2 = \frac{25\varepsilon^2 R_3}{(7R_3+10)^2}$$

$$\frac{dP}{dR_3} = 0 \quad \frac{dP}{dR_3} = 25\varepsilon^2\left[\frac{(7R_3+10)^2 - 14(7R_3+10)R_3}{(7R_3+10)^4}\right] = 0$$

$$\Rightarrow 7R_3 + 10 - 14R_3 = 0 \qquad R_3 = 1/43\,\Omega$$

●●●۳۶- هر دو باتری در شکل ۲۳-۴۷ آرمانی‌اند. مقدار emf باتری ۱ ثابت است ولی emf باتری ۲ می‌تواند میان مقدار ۱/۰V و ۱۰V تغییر کند. نمودار شکل ۲۳-۴۷ ب جریانهای عبوری از دو باتری را برحسب تابعی از $\mathscr{E}_2$ نشان می‌دهد. مقیاس قائم با $i_s = 0/20A$ مشخص شده است. باید تصمیم بگیرید که کدام نمودار متناظر با کدام باتری است، ولی در مورد هر دو نمودار، وقتی جهت جریان در باتری خلاف جهت emf باتری باشد، علامت جریان منفی می‌شود. (الف) emf مربوط به $\mathscr{E}_1$، (ب) مقاومت R و (پ) مقاومت R_2 چقدر است؟



شکل ۲۳-۴۷ مسئلهٔ ۳۶

حل: (الف) حلقه سمت چپ را در نظر گرفته و قاعده حلقه را می‌نویسیم، داریم:

$$\varepsilon_2 + i_1R_1 - \varepsilon_1 = 0$$

با توجه به اینکه وقتی ε_2 و i_1 تغییر می‌کنند ε_1 ثابت نگه داشته می‌شود لذا می‌توان نتیجه گرفت که به ازای مقادیر بزرگ ε_2، جریان i_1 باید منفی باشد. لذا شیب روبه‌پایین یعنی نمودار خط‌چین مربوط به i_1 است. حال با توجه به شکل مشاهده می‌کنیم که به ازای $i_1 = 0$، داریم $\varepsilon_1 = \varepsilon_2 = 6V$.

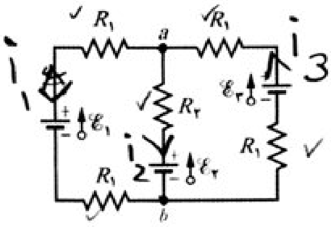
(ب) از منحنی مشاهده می‌شود که در $\varepsilon_2 = 2V$، $i_1 = 0/2A$ و از طرفی $\varepsilon_1 = 6V$ نیز ثابت و برقرار است لذا از رابطه قاعده حلقه بالا خواهیم داشت $R_1 = 20\,\Omega$.

(پ) با توجه به منحنی مربوط به i_2، مشاهده می‌کنیم که به ازای $i_2 = 0$، $\varepsilon_2 = 4V$ و با در نظر گرفتن $\varepsilon_1 = 6V$ و $R_1 = 20\,\Omega$ از رابطه حلقهٔ سمت چپ بالا خواهیم داشت $i_1 = 0/1A$.

حال می‌توان از قاعدهٔ حلقه برای حلقه سمت راست استفاده کرد.

$$\varepsilon_1 - i_1R_1 = i_1R_2 \Rightarrow 6 - (0/1)(20) = (0/1)R_2 \Rightarrow R_2 = 40\,\Omega$$

●●۳۷- در شکل ۲۳-۴۸، مقاومتها عبارت‌اند از $R_1 = ۱/۰\ \Omega$ و $R_2 = ۲/۰\ \Omega$ و emf باتریهای آرمانی $\varepsilon_1 = ۲/۰\ V$ و $\varepsilon_2 = ۴/۰\ V$ است. (الف) اندازه و (ب) جهت (بالا یا پایین) جریان در باتری ۱، (پ) اندازه و (ت) جهت جریان در باتری ۲ و (ث) اندازه و (ج) جهت جریان در باتری ۳، چیست؟ (چ) اختلاف پتانسیل $V_a - V_b$ چقدر است؟



شکل ۲۳-۴۸ مسئله ۳۷

حل: قاعده حلقه را برای دو حلقه سمت چپ و راست می‌نویسیم و جریان در آنها را به ترتیب i_1 و i_2 و پادساعتگرد در نظر می‌گیریم. جریان عبوری از شاخه وسط برابر $i_3 = i_1 - i_2$ می‌شود، لذا داریم:

$-i_1R_1 - \varepsilon_1 - i_1R_1 - (i_1 - i_2)R_2 + \varepsilon_2 = ۰$

$-i_2R_1 + \varepsilon_3 - i_2R_1 - \varepsilon_2 + (i_1 - i_2)R_2 = ۰$

که با قرار دادن مقادیر داده شده و حل همزمان دو معادله خواهیم داشت $i_1 = ۰/۶۶A$ و $i_2 = ۰/۳۳A$ و در نتیجه $i_3 = ۰/۳۳A$ می‌شود.

(الف) و (ب) $i_1 = ۰/۶۶A$ و چون مثبت است لذا جهت انتخاب شده پادساعتگرد صحیح بوده و i_1 در ε_1 به سمت پایین است.

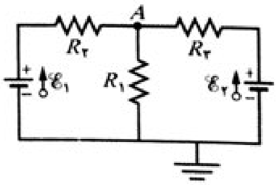
(پ) و (ت) $i_2 = ۰/۳۳A$ و چون مثبت است پس i_2 در ε_2 به سمت بالا است.

(ث) و (ج) $i_3 = ۰/۳۳A$ و چون مثبت است لذا روبه‌بالا می‌باشد.

(چ) $V_a - R_1i_1 - \varepsilon_1 - R_1i_1 = V_b$

$V_a - V_b = ۲R_1i_1 + \varepsilon_1 = (۲)(۱)(۰/۶۶) + ۲ = ۳/۳۴V$

●●۳۸-در شکل ۲۳-۴۹، $\varepsilon_1 = ۶/۰۰\ V$، $\varepsilon_2 = ۱۲/۰\ V$، $R_1 = ۱۰۰\ \Omega$، $R_2 = ۲۰۰\ \Omega$ و $R_3 = ۳۰۰\ \Omega$ است. یک نقطهٔ مدار به زمین متصل شده است. ($V = ۰$). (الف) اندازه و (ب) جهت (بالا یا پایین) جریان در مقاومت ۱، (پ) اندازه و (ت) جهت (چپ یا راست) جریان در مقاومت ۲ و (ث) اندازه و (ج) جهت جریان در مقاومت ۳ چیست؟ (چ) پتانسیل الکتریکی در نقطهٔ A چقدر است؟



شکل ۲۳-۴۹ مسئله ۳۸

حل: با استفاده از قاعده گره و قاعده حلقه می‌توان نوشت. جریانها را در حلقه سمت چپ ساعتگرد و در حلقه سمت راست پادساعتگرد در نظر می‌گیریم.

$i_1 = i_2 + i_3$

$\varepsilon_1 - R_2i_2 - R_1i_1 = ۰$

$\varepsilon_2 - R_3i_3 - R_1i_1 = ۰$

با قرار دادن مقادیر داده شده و حل همزمان معادله‌ها خواهیم داشت $i_1 = ۰/۰۳۸۲A$ و $i_2 = ۰/۰۱۰۹A$ و $i_3 = ۰/۰۲۷۳A$.

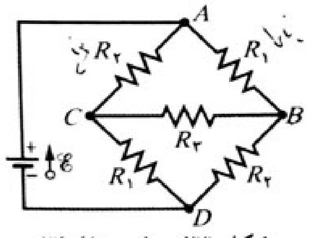
(الف) و (ب) $i_1 = ۰/۰۳۸۲A$ و چون مثبت است جهت انتخابی صحیح بوده یعنی i_1 روبه‌پایین است.

(پ) و (ت) $i_2 = ۰/۰۱۰۹A$، چون مثبت است پس جهت انتخابی چپ به سمت راست صحیح است.

(ث) و (ج) $i_3 = ۰/۰۲۷۳A$ و روبه چپ می‌باشد. (چ) پتانسیل در A برابر است با

(چ) $V_A = i_1R_1 = (۰/۰۳۸۲)(۱۰۰) = ۳/۸۲$

●●۳۹-در شکل ۲۳-۵۰، $\varepsilon = ۱۲/۰\ V$، $R_1 = ۲۰۰۰\ \Omega$، $R_2 = ۳۰۰۰\ \Omega$ و $R_3 = ۴۰۰۰\ \Omega$ است. اختلاف پتانسیل (الف) $V_A - V_B$، (ب) $V_B - V_C$، (پ) $V_C - V_D$ و (ت) $V_A - V_C$ چقدر است؟



شکل ۲۳-۵۰ مسئله ۳۹

حل:

(۱) $\varepsilon = V_{AC} + V_{CD} = R_2i_2 + R_1i_1 \Rightarrow ۱۲ = ۳۰۰۰i_2 + ۲۰۰۰i_1$

در حلقه $ABCA$ داریم

$-R_2i_2 + R_3(i_1 - i_2) - R_1i_1$

$-۳۰۰۰i_2 + ۴۰۰۰i_1 - ۴۰۰۰i_2 - ۲۰۰۰i_1 = ۰ \Rightarrow$

(۲) $\Rightarrow -۷i_2 + ۲i_1 = ۰ \Rightarrow i_2 = \frac{۲}{۷}i_1$

با قرار دادن (۲) در (۱)، جریانهای i_1 و i_2 به دست می‌آیند $i_1 = ۴/۲\times۱۰^{-۳}\ A$ و $i_2 = ۱/۲\times۱۰^{-۳}\ A$. با استفاده از قاعده انشعاب $i_3 = i_1 - i_2 = +۳\times۱۰^{-۳}\ A$.

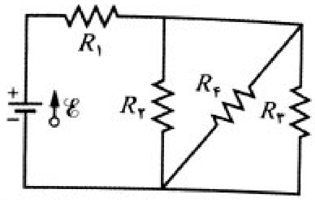
(الف) $V_A - V_B = R_1i_1 = (۲۰۰۰)(۴/۲\times۱۰^{-۳}) = ۸/۴V$

(ب) $V_B - V_C = R_3i_3 = (۴۰۰۰)(۳\times۱۰^{-۳}) = ۱۲V$

(پ) $V_C - V_D = R_1i_1 = (۲۰۰۰)(۴/۲\times۱۰^{-۳}) = ۸/۴V$

(ت) $V_A - V_C = R_2i_2 = (۳۰۰۰)(۱/۲\times۱۰^{-۳}) = ۳/۶V$

۴۰●●- در شکل ۲۳-۵۱، $R_1=100\,\Omega$ ، $R_2=R_3=50/0\,\Omega$ ، $R_4=75/0\,\Omega$ و emf باتری آرمانی $\varepsilon=6/00\,V$ است. (الف) مقاومت معادل چقدر است؟ i در (ب) مقاومت ۱، (پ) مقاومت ۲، (ت) مقاومت ۳ و (ث) مقاومت ۴، چقدر است؟



شکل ۲۳-۵۱ مسئله‌های ۴۰ و ۴۸

حل: (الف) ابتدا مقاومت معادل مقاومتها R_2، R_3 و R_4 که به صورت موازی‌اند را به دست می‌آوریم

$$\frac{1}{R_{234}}=\frac{1}{R_2}+\frac{1}{R_3}+\frac{1}{R_4}=\frac{1}{50}+\frac{1}{50}+\frac{1}{75}\Rightarrow R_{234}=18/75\Omega$$

$$R_{eq}=R_1+R_{234}=100+18/75=118/75$$

(ب) جریان عبوری از R_1 همان جریان کل مدار است

$$i_1=i=\frac{\varepsilon}{R_{eq}}=\frac{6}{118/75}=5/05\times10^{-2}\,A$$

(پ) ولتاژ دو سر R_2، R_3 و R_4 با هم برابر واز رابطه زیر به دست می‌آید.

$$V_2=V_{234}=iR_{234}=(5/05\times10^{-2})(18/75)=0/95V$$

$$i_2=\frac{V_2}{R_2}=\frac{0/95}{50}=1/9\times10^{-2}\,A$$

(ت)

$$V_3=V_2=0/95V$$

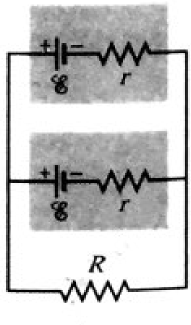
$$i_3=\frac{V_3}{R_3}=\frac{0/95}{50}=1/9\times10^{-2}\,A$$

(ث)

$$V_4=V_2=0/95V$$

$$i_4=\frac{V_4}{R_4}=\frac{0/95}{75}=1/25\times10^{-2}\,A$$

۴۱●●- در شکل ۲۳-۵۲، دو باتری با emf برابر با $\varepsilon=12/0V$ و مقاومت درونی $r=0/300\,\Omega$ به طور موازی به دو سر مقاومت R بسته شده‌اند. (الف) به ازای چه مقدار R آهنگ مصرف در مقاومت بیشینه است؟ (ب) این بیشینه چقدر است؟



شکل ۲۳-۵۲ مسئله‌های ۴۱ و ۴۲

حل: (الف) چون باتریها مشابه‌اند جریانی که از آنها می‌گذرد یکسان است و اگر آن را i در نظر بگیریم جریانی که از مقاومت R می‌گذرد برابر $2i$ می‌باشد. از قانون حلقه، برای حلقهٔ پایین داریم:

$$\varepsilon-ir-2iR=0\Rightarrow i=\frac{\varepsilon}{r+2R}$$

توان تلف شده در R برابر است با:

$$P=R(2i)^2=R\frac{4\varepsilon^2}{(r+2R)^2}$$

برای اینکه توان بیشینه شود باید $dP/dR=0$ باشد

$$\frac{dP}{dR}=\frac{4\varepsilon^2(r+2R)^2-4R(r+2R)}{(r+2R)^4}=0$$

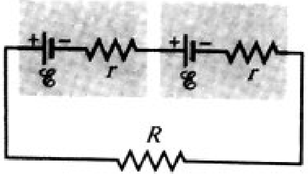
$$r+2R-4R=0\Rightarrow R=\frac{r}{2}$$

که به ازای $r=0/3\Omega$ خواهیم داشت $R=0/6\Omega$.

(ب) اگر $R=r/2$ را در رابطه P قرار دهیم آهنگ اتلاف بیشینه به دست می‌آید.

$$P_{\max}=\frac{4\varepsilon^2(r/2)}{\left[r+2\left(\frac{r}{2}\right)\right]^2}=\frac{\varepsilon^2}{2r}=\frac{(12)^2}{2(0/3)}=240\,W$$

۴۲●●- می‌خواهیم دو باتری مشابه با emf برابر با $\varepsilon=12/0\,V$ و مقاومت درونی $r=0/200\,\Omega$ را به یک مقاومت خارجی R، به صورت موازی (شکل ۲۳-۵۲) یا به صورت متوالی (شکل ۲۳-۵۳) ببندیم. اگر $R=2/00r$ باشد، جریان i در مقاومت خارجی در آرایشهای (الف) موازی و (ب) متوالی چقدر است؟ (پ) در کدام آرایش جریان i بیشتر است؟ اگر $R=r/2/00$ باشد، i در مقاومت خارجی در آرایش‌های (ت) موازی و (ث) متوالی چقدر است؟ (ج) برای کدام آرایش i بیشتر است؟



شکل ۲۳-۵۳ مسئلهٔ ۴۲

حل: (الف) چون باتریها مشابه و به طور موازی‌اند مانند مسئله ۴۱ جریان در آنها یکسان و جریانی که از R می‌گذرد برابر $2i$ می‌باشد و از قانون حلقه داریم:

$$\varepsilon=ir+(2i)R\Rightarrow i=\frac{\varepsilon}{r+2R}$$

$$i_R=2i=\frac{2\varepsilon}{r+2R}=\frac{2(12)}{0/2+(2)(0/4)}=24A$$

(ب) در بهم بستن متوالی جریانها یکسانند و داریم:

$$\sum\varepsilon=i\sum R\Rightarrow 2\varepsilon=2ir+iR$$

$$i_R=i=\frac{2\varepsilon}{2r+R}=\frac{2(12)}{2(0/2)+0/4}=30A$$

(پ) در بهم بستن متوالی، چون $R>r$ است.

(ت) به ازای $R=r/۲=۰/۱\Omega$ در بهم بستن موازی داریم:

$$i_R=\frac{۲\varepsilon}{r+۲R}=\frac{۲(۱۲)}{۰/۲+(۲)(۰/۱)}=۶۰\text{A}$$

(ث) و برای اتصال متوالی داریم:

$$i_R=\frac{۲\varepsilon}{۲r+R}=\frac{۲(۱۲)}{۲(۰/۲)+۰/۱}=۴۸\text{A}$$

(ج) در آرایش موازی، چون $R<r$ است.

●●۴۳- شکل ۲۳-۴۳، $\varepsilon_۱=۳/۰۰\text{V}$ ، $\varepsilon_۲=۱/۰۰\text{V}$ ، $R_۱=۴/۰۰\Omega$ ، $R_۲=۲/۰۰\Omega$ ، $R_۳=۵/۰۰\Omega$ و هر دو باتری آرمانی‌اند. آهنگ مصرف انرژی در (الف) $R_۱$ ، (ب) $R_۲$ و (پ) $R_۳$ چقدر است؟ توان (ت) باتری ۱ و (ث) باتری ۲ چقدر است؟

حل: در دو حلقه سمت چپ و راست را ساعتگرد در نظر می‌گیریم و قاعده حلقه‌ها و انشعاب را به کار می‌بریم.

$$i_۳=i_۱-i_۲$$
$$\varepsilon_۱-R_۱i_۱-R_۳i_۳=۰$$
$$\varepsilon_۲+R_۲i_۲+R_۳i_۳=۰$$

با قرار دادن مقادیر داده شده و حل همزمان این معادلات برای جریانها داریم $i_۱=۰/۴۲۱\text{A}$ ، $i_۲=۰/۱۵۸\text{A}$ و $i_۳=۰/۲۶۳\text{A}$.
پاسخ مثبت بیانگر انتخاب صحیح جهت جریانها است.

(الف) توان تلف شده در $R_۱$ برابر است با:

$$P_۱=R_۱i_۱^۲=(۴)(۰/۴۲۱)^۲=۰/۷۰۹\text{W}$$

(ب) اتلاف در $R_۲$ برابر است با:

$$P_۲=R_۲i_۲^۲=(۲)(۰/۱۵۸)^۲=۰/۰۵\text{W}$$

(پ) اتلاف در $R_۳$ برابر است با:

$$P_۳=R_۳i_۳^۲=(۵)(۰/۲۶۳)^۲=۰/۳۴۶\text{W}$$

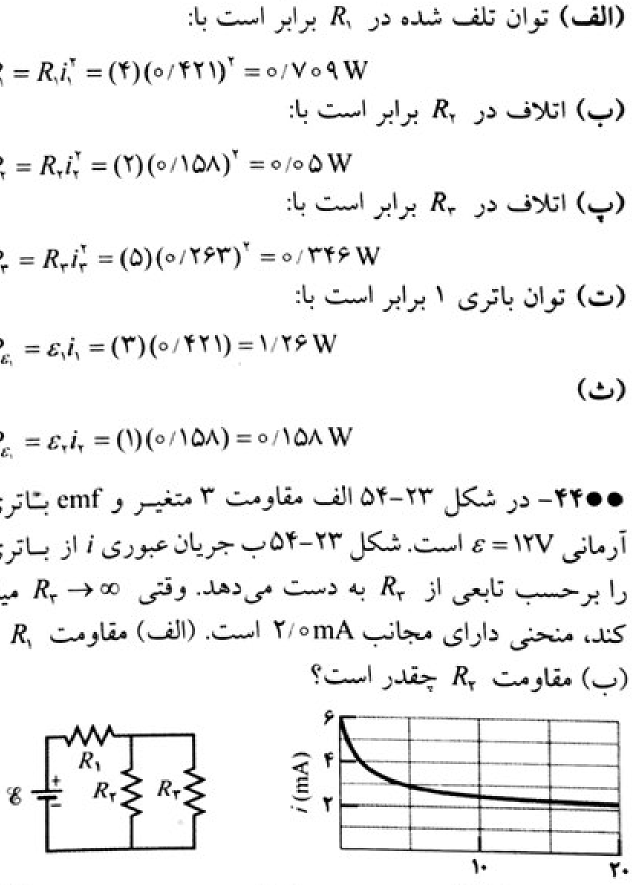
(ت) توان باتری ۱ برابر است با:

$$P_{\varepsilon_۱}=\varepsilon_۱i_۱=(۳)(۰/۴۲۱)=۱/۲۶\text{W}$$

(ث)

$$P_{\varepsilon_۲}=\varepsilon_۲i_۲=(۱)(۰/۱۵۸)=۰/۱۵۸\text{W}$$

●●۴۴- در شکل ۲۳-۵۴الف مقاومت ۳ متغیر و emf باتری آرمانی $\varepsilon=۱۲\text{V}$ است. شکل ۲۳-۵۴ب جریان عبوری i از باتری را برحسب تابعی از $R_۳$ به دست می‌دهد. وقتی $R_۳\to\infty$ میل کند، منحنی دارای مجانب ۲/۰mA است. (الف) مقاومت $R_۱$ و (ب) مقاومت $R_۲$ چقدر است؟



شکل ۲۳-۵۴ مسئلهٔ ۴۴

حل: (الف) وقتی $R_۳=۰$ است کل جریان از $R_۱$ و $R_۳$ می‌گذرد. با توجه به شکل ب دیده می‌شود در $R_۳=۰$، $i=۶\text{mA}$ است و در نتیجه داریم

$$R_۱=\frac{\varepsilon}{i}=\frac{۱۲}{۰/۰۰۶}=۲\times۱۰^۳\ \Omega$$

(ب) وقتی $R_۳\to\infty$ به جای اتصال کوتاه حالت قبل در اینجا اتصال باز داریم و کل جریان از $R_۱$ و $R_۲$ می‌گذرد. با توجه به شکل ب دیده می‌شود که به ازای $R_۳=\infty$، جریانی که از باتری می‌گذرد برابر $i=۲\text{mA}$ است و در نتیجه داریم

$$\varepsilon=i(R_۱+R_۲)\Rightarrow ۱۲=(۲\times۱۰^{-۳})(۲\times۱۰^۳+R_۲)\Rightarrow R_۲=۴\times۱۰^۳\ \Omega$$

●●●۴۵- تعدادی مقاومت ۱۰ اهمی در اختیار است که توان مصرفی هر کدام بدون سوختن ۱/۰W است. کمترین تعداد این‌گونه مقاومتها چقدر باید باشد تا ترکیبی از آنها به طور متوالی یا موازی با مقاومت ۱۰Ω ایجاد شود و دست کم توان مصرفی ۵/۰W را داشته باشد؟

حل: با توجه به اینکه مقاومت معادل با مقاومت اولیه برابر است لذا تعداد ردیف با تعداد مقاومت‌هایی که در هر ردیف وجود دارد برابر است. از طرف دیگر چون توان مصرفی مجموع 5W است لذا اگر n تعداد ردیفها باشد در هر ردیف n مقاومت وجود دارد. بیشترین جریانی که از هر مقاومت می‌گذرد برابر است با:

$$P_۱=R_۱i^۲\Rightarrow ۱=۱۰i_۱^۲\Rightarrow i_۱=۰/۳۱۶\text{A}$$

جریان کل برابر است با:

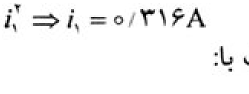
$$۵=۱۰i^۲\Rightarrow i=۰/۷۰۷\text{A}$$

تعداد ردیف‌ها برابر است با:

$$n=\frac{i}{i_۱}=\frac{۰/۷۰۷}{۰/۳۱۶}=۲/۲۴$$

و چون می‌خواهیم از سوختن مقاومتها جلوگیری شود لذا باید $n=۳$ باشد.

●●۴۶- در شکل ۲۳-۵۵، آرایه‌ای شامل n مقاومت موازی به طور متوالی به یک باتری آرمانی و یک مقاومت بسته شده‌اند. اندازهٔ همهٔ مقاومتها یکسان است. اگر مقاومت یکسانی به طور موازی به این آرایش افزوده شود، جریان باتری به اندازهٔ ۱/۲۵٪ تغییر می‌کند. مقدار n چیست؟



شکل ۲۳-۵۵ مسئلهٔ ۴۶

حل: مقاومت معادل برابر است با

$$R_{eq}=R+\frac{R}{n}=\frac{(n+۱)R}{n}$$

در این حالت جریان در باتری برابر است با:

$$i_n = \frac{\varepsilon}{R_{eq}} = \frac{n\varepsilon}{(n+۱)R}$$

لذا $i_{n+۱}$ برابر است با:

$$i_{n+۱} = \frac{(n+۱)\varepsilon}{(n+۲)R}$$

برای اینکه افزایش نسبی برابر با $\frac{۱}{۸۰} = ۰/۰۱۲۵$ باشد باید داشته باشیم:

$$\frac{i_{n+۱}-i_n}{i_n} = \frac{i_{n+۱}}{i_n} - ۱ = \frac{\left(\frac{n+۱}{n+۲}\right)}{\left(\frac{n}{n+۱}\right)} - ۱ = \frac{۱}{۸۰} \Rightarrow n = ۸$$

●●۴۷- یک سیم مسی به شعاع $a = ۰/۲۵۰ mm$ دارای یک پوشش آلومینیومی به شعاع خارجی $b = ۰/۳۸۰ mm$ است. در سیم مرکب جریان $i = ۲/۰۰ A$ وجود دارد. با استفاده از جدول ۲۲-۱، جریان در (الف) مس و (ب) آلومینیوم را محاسبه کنید. (پ) اگر اختلاف پتانسیل $V = ۱۲/۰ V$ میان دو سر جریان را ثابت نگهدارد، طول سیم مرکب چقدر است؟ SSM

حل:

$$A_{Cu} = \pi a^۲ (۳/۱۴)(۰/۲۵\times۱۰^{-۳})^۲ = ۱/۹۶\times۱۰^{-۷} m^۲$$

$$A_{Al} = \pi(b^۲ - a^۲) = (۳/۱۴)[(۰/۳۸)^۲ - (۰/۲۵)^۲]\times۱۰^{-۶}$$

$$= ۲/۵۷\times۱۰^{-۷} m^۲$$

$$R_{Cu} = \rho_{Cu}\frac{L_{Cu}}{A_{Cu}} = (۱/۶۹\times۱۰^{-۸})\frac{L}{(۱/۹۶\times۱۰^{-۷})} = ۸/۶۲\times۱۰^{-۲} L$$

$$R_{Al} = \rho_{Al}\frac{L_{Al}}{A_{Al}} = (۲/۷۵\times۱۰^{-۸})\frac{L}{(۲/۵۷\times۱۰^{-۷})} = ۰/۱۰۷L$$

مقاومت معادل دو سیم موازی برابر است با:

$$R_{eq} = \frac{R_{Cu}R_{Al}}{R_{Cu}+R_{Al}} = ۴/۷۷\times۱۰^{-۲} L$$

(الف) حال با توجه به اینکه $i_{Cu}+i_{Al} = i = ۲A$ است چنانچه اختلاف دو سیم را V فرض کنیم، خواهیم داشت

$$V = R_{Cu}i_{Cu} = R_{Al}i_{Al} \Rightarrow (۸/۶۲\times۱۰^{-۲} L)i_۱ = (۰/۱۰۷)(۲-i_۱)$$

$$\Rightarrow ۰/۸۱ i_{Cu} = ۲ - i_{Cu} \Rightarrow i_{Cu} = ۱/۱A$$

(ب)

$$i_{Al} = ۲ - ۱/۱ = ۰/۹A$$

(پ)

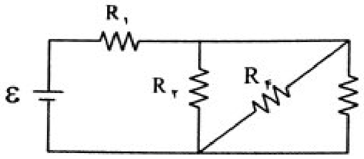
$$R_{eq} = \frac{V}{i} = \frac{۱۲}{۲} = ۶\Omega$$

و از رابطهٔ $R_{eq} = ۴/۷۷\times۱۰^{-۲} L$ که به دست آوردیم، خواهیم داشت:

$$۶ = ۴/۷۷\times۱۰^{-۲} L = ۱۲۵/۸ m$$

●●۴۸- در شکل ۲۳-۵۱، $R_۱ = ۷/۰۰\Omega$ ، $R_۲ = ۱۲/۰\Omega$ ، $R_۳ = ۴/۰۰\Omega$ و emf باتری آرمانی $\varepsilon = ۲۴/۰ V$ است. به ازای چه مقدار $R_۴$ آهنگ انتقال انرژی باتری به مقاومتها برابر با (الف) ۶۰/۰ W، (ب) بیشینهٔ آهنگ ممکن P_{max} و (پ) کمینهٔ آهنگ ممکن P_{min} است؟ (پ) P_{max} و (ت) P_{min} چقدرند؟

حل:



برای به دست آوردن مقاومت معادل مدار، ابتدا $R_{۲۳۴}$ را که مقاومت معادل $R_۲$، $R_۳$ و $R_۴$ که موازی‌اند را به دست می‌آوریم.

$$\frac{۱}{R_{۲۳۴}} = \frac{۱}{R_۲}+\frac{۱}{R_۳}+\frac{۱}{R_۴} = \frac{۱}{۱۲}+\frac{۱}{۴}+\frac{۱}{R_۴} \Rightarrow R_{۲۳۴} = \frac{۳R_۴}{R_۴+۳}$$

و مقاومت معادل مدار برابر است با:

$$R_{eq} = R_۱ + R_{۲۳۴} = ۷ + \frac{۳R_۴}{R_۴+۳} = \frac{۱۰R_۴+۲۱}{R_۴+۳}$$

(الف) حال با توجه به رابطه توان داریم:

$$P = \frac{\varepsilon^۲}{R_{eq}} \Rightarrow ۶۰ = \frac{(۲۴)^۲}{R_{eq}} \Rightarrow R_{eq} = ۹/۶\Omega$$

در نتیجه می‌توان از رابطه برای R_{eq}، $R_۴$ را به دست آورد.

$$۹/۶ = \frac{۱۰R_۴+۲۱}{R_۴+۳} \Rightarrow R_۴ = ۱۹/۵\Omega$$

(ب) با توجه به اینکه $P \propto \frac{۱}{R_{eq}}$ است لذا باید R_{eq} کمینه باشد و در نتیجه $R_۴$ باید برابر صفر باشد.

(پ) در اینجا باید R_{eq} را بیشینه کنیم یعنی باید $R = \infty$ شود.

(ت) با توجه به قسمت (ب) کمینه مقدار R_{eq} برابر است با ۷Ω ، لذا می‌توان نوشت:

$$P_{max} = \frac{\varepsilon^۲}{R_{eq,min}} = \frac{(۲۴)^۲}{۷} = ۸۲/۳ W$$

(ث) برای این حالت دیدیم که باید $R_۴ = \infty$ باشد لذا R_{eq} چنین می‌شود:

$$R_{eq,max} = \frac{۱۰R_۴+۲۱}{R_۴+۳} = \left.\frac{۱۰+\frac{۲۱}{R_۴}}{۱+\frac{۳}{R_۴}}\right|_{R_۴=\infty} = ۱۰\Omega$$

در نتیجه

$$P_{min} = \frac{\varepsilon^۲}{R_{eq,max}} = \frac{(۲۴)^۲}{۱۰} = ۵۷/۶ W$$

بخش ۲۳-۸ آمپرسنج و ولت‌سنج

●●۴۹- در شکل ۲۳-۱۴، فرض کنید که $\varepsilon = ۳/۰ V$ ، $r = ۱۰۰\Omega$ ، $R_۱ = ۲۵۰\Omega$ و $R_۲ = ۳۰۰\Omega$ باشد. اگر مقاومت R_V ولت‌سنج برابر با ۵/۰kΩ باشد، به هنگام اندازه‌گیری اختلاف پتانسیل دو سر $R_۱$ چند درصد خطا وجود خواهد داشت؟ از وجود آمپرسنج چشمپوشی کنید.

حل: ابتدا فرض می‌کنیم ولت‌سنج در مدار نباشد، اختلاف پتانسیل دو سر Cd را به دست می‌آوریم که آن را V_1 می‌نامیم. از قاعده حلقه می‌توان نوشت:

$$i=i_1=\frac{\varepsilon}{R_1+R_2+2}=\frac{3}{250+300+100}=4.62\times10^{-3}\ A$$

$$V_1=R_1i_1=(250)(4.62\times10^{-3})=1.155\ V$$

حال ولت‌سنج را در مدار در نظر می‌گیریم.

$$R_1'=\frac{R_1R_V}{R_1+R_V}=\frac{(250)(5000)}{250+5000}=238\Omega$$

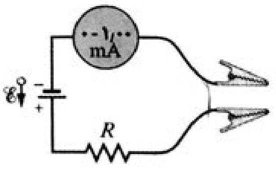
مجدداً از قاعده حلقه خواهیم داشت

$$i'=i_1'=\frac{\varepsilon}{R_1'+R_2+r}=\frac{3}{238+300+100}=4.7\times10^{-3}\ A$$

$$V_1'=R_1'i_1'=(238)(4.7\times10^{-3})=1.119\ V$$

$$\frac{\Delta V}{V_1}=\frac{(1.155-1.119)}{1.155}=0.031$$ یا ٪۳۱

●●۵۰- همان‌طور که در شکل ۲۳-۵۶ نشان داده شده است، یک اهم‌سنج ساده با اتصال یک باتری ۱/۵۰ ولتی به طور متوالی با یک مقاومت R و آمپرسنجی که از ۰ تا ۱/۰۰mA را می‌تواند بخواند ساخته شده است. مقاومت R طوری تنظیم می‌شود که هرگاه گیره‌ها به هم وصل شوند، اهم‌سنج با تمام مقیاس ۱/۰۰mA منحرف می‌شود. اندازهٔ مقاومت خارجی که باعث انحراف (الف) ۱۰٪ و (ب) ۵۰٪ و (پ) ۹۰٪ تمام مقیاس می‌شود چقدر است؟ (ت) اگر مقاومت آمپرسنج ۲۰/۰Ω و مقاومت درونی باتری ناچیز باشد، مقدار R چقدر است؟



شکل ۲۳-۵۶ مسئلهٔ ۵۰

حل: وقتی گیره‌ها را می‌بندیم، داریم:

$$i=\frac{\varepsilon}{R}\Rightarrow 1\times10^{-3}=\frac{1.5}{R}\Rightarrow R=1500\Omega$$

(الف) $i_1=(0.1)(1\times10^{-3})=1\times10^{-4}\ A$

$$i_1=\frac{\varepsilon}{R+R_1}\Rightarrow 1\times10^{-4}=\frac{1.5}{1500+R_1}\Rightarrow R_1=1.35\times10^{4}\ \Omega$$

(ب) $i_2=(0.5)(1\times10^{-3})=5\times10^{-4}\ A$

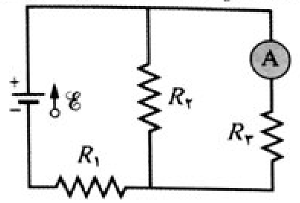
$$i_2=\frac{\varepsilon}{R+R_2}\Rightarrow 5\times10^{-4}=\frac{1.5}{1500+R_2}\Rightarrow R_2=1500\Omega$$

(پ) $i_3=(0.9)(1\times10^{-3})=9\times10^{-4}\ A$

$$i_3=\frac{\varepsilon}{R+R_3}\Rightarrow 9\times10^{-4}=\frac{1.5}{1500+R_3}\Rightarrow R_3=166.7\Omega$$

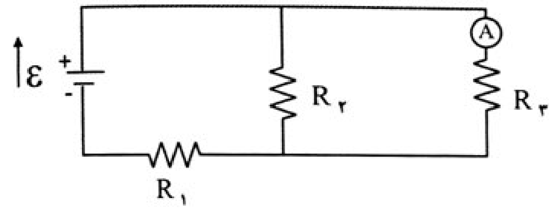
(ت) $i=\frac{\varepsilon}{R+r}\Rightarrow 1\times10^{-3}=\frac{1.5}{R+20}\Rightarrow R_2=1480\Omega$

●●۵۱-(الف) در شکل ۲۳-۵۷، اگر $\varepsilon=5.0V$ (باتری آرمانی)، $R_1=2.0\Omega$، $R_2=4.0\Omega$ و $R_3=6.0\Omega$ باشد، آمپرسنج چه عددی را نشان می‌دهد. (ب) حال جای آمپرسنج و باتری را عوض می‌کنیم. نشان دهید که عدد آمپرسنج تغییر نمی‌کند. ILW



شکل ۲۳-۵۷ مسئلهٔ ۵۱

حل:



(الف)

$$R_{23}=\frac{R_2R_3}{R_2+R_3}=\frac{(4)(6)}{4+6}=2.4\Omega$$

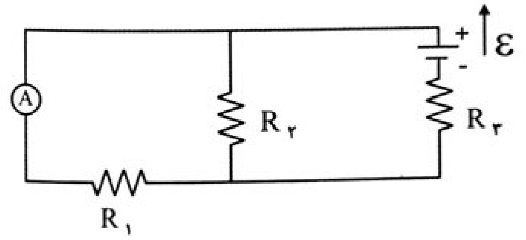
$$R_{eq}=R_1+R_{23}=2+2.4=4.4\Omega$$

$$i=i_1=\frac{\varepsilon}{R_{eq}}=\frac{5}{4.4}=1.14V$$

$$V_{23}=R_{23}i=(2.4)(1.14)=2.74V$$

$$i_A=i_3=\frac{V_{23}}{R_3}=\frac{2.74}{6}=0.46A$$

(ب) چنانچه جای آمپرمتر و باتری را عوض کنیم، داریم:



$$R_{12}=\frac{R_1R_2}{R_1+R_2}=\frac{(2)(4)}{2+4}=1.33\Omega$$

$$R_{eq}=R_3+R_{12}=6+1.33=7.33\Omega$$

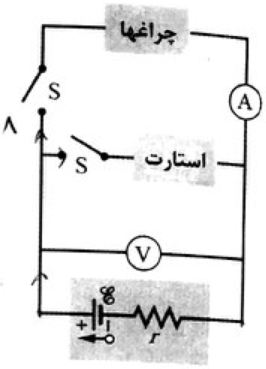
$$i=i_{12}=\frac{\varepsilon}{R_{eq}}=\frac{5}{7.33}=0.682A$$

$$V_{12}=R_{12}i_{12}=(1.33)(0.682)=0.91V$$

$$i_A=i_1=\frac{V_{12}}{R_1}=\frac{0.91}{2}=0.455A$$

●●۵۲- وقتی چراغهای اتومبیلی روشن شود، آمپرسنج متوالی با آنها ۱۰/۰A و ولت‌سنج متصل به دو سر آنها ۱۲/۰V را نشان می‌دهند (شکل ۲۳-۵۸). وقتی استارت زده شود آمپرسنج به عدد ۸/۰۰A کاهش می‌یابد و نور چراغها اندکی کم می‌شود.

اگر مقاومت درونی باتری $۰/۰۵۰۰\Omega$ و مقاومت آمپرسنج ناچیز باشد، (الف) emf باتری و (ب) جریانی که در هنگام روشن شدن چراغها از استارت می‌گذرد، چقدر است؟



شکل ۲۳-۵۸ مسئلهٔ ۵۲

حل: (الف) در این حالت ابتدا مقاومت R_L چراغ را که در قسمتهای بعدی لازم داریم، حساب می‌کنیم.

$$i=\frac{V}{R_L}\Rightarrow ۱۰=\frac{۱۲}{R_L}\Rightarrow R_L=۱/۲\Omega$$

حال emf باتری را به دست می‌آوریم:

$$\varepsilon=V+ir=۱۲+(۱۰)(۰/۰۵)=۱۲/۵\,V$$

(ب) وقتی استارت زده می‌شود، داریم:

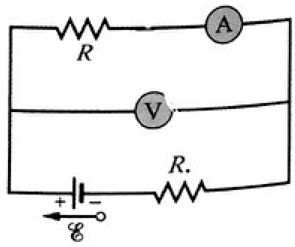
$$V=R_Li\Rightarrow (۱/۲)(۸)=۹/۶\,V$$

$$V=\varepsilon-r_i\Rightarrow ۹/۶=۱۲/۵-(۰/۰۵)i\Rightarrow i=۵۸A$$

و جریانی که از استارتر می‌گذرد برابر است با:

$$i_S=۵۸-۸=۵۰\,A$$

۵۳- در شکل ۲۳-۵۹، ولت‌سنجی با مقاومت $R_v=۳۰۰\,\Omega$ و آمپرسنجی با مقاومت $R_A=۳/۰۰\,\Omega$ برای اندازه‌گیری مقاومت R در مداری که همچنین شامل یک مقاومت $R_0=۱۰۰\Omega$ و یک باتری آرمانی با $\varepsilon=۱۲/۰\,V$ است، به کار برده می‌شوند. مقاومت R با رابطهٔ $R=V/i$ داده می‌شود که V اختلاف پتانسیل دو سر R و i مقدار خوانده شده توسط آمپرسنج است. ولت‌سنج عدد V' را نشان می‌دهد که عبارت است از V بعلاوهٔ اختلاف پتانسیل دو سر آمپرسنج. بنابراین، نسبت دو مقدار خوانده شده R نیست بلکه *مقاومت ظاهری* $R=V'/i$ است. اگر $R=۸۵/۰\,\Omega$ باشد، (الف) مقدار خوانده شده توسط آمپرسنج، (ب) مقدار خوانده شده توسط ولت‌سنج و (پ) R' چقدر است؟ (ت) اگر R_A کم شود، آیا اختلاف میان R' و R افزایش می‌یابد یا کاهش یا یکسان می‌ماند؟



شکل ۲۳-۵۹ مسئلهٔ ۵۳

حل: (الف) جریان عبوری از R_0 را i_1 و جریان عبوری از R و آمپرسنج را i_2 می‌نامیم. با استفاده از قاعدهٔ حلقه می‌توان نوشت:

$$\varepsilon-R_V(i_1-i_2)-R_0i_1=۰$$

$$R_V(i_1-i_2)-Ri_2-R_Ai_2=۰$$

که با قرار دادن مقادیر عدد و حل همزمان دو معادله خواهیم داشت $i_1=۰/۰۷۱A$ و $i_2=i_A=۰/۰۵۵A$.

(ب) عددی که ولت‌سنج نشان می‌دهد برابر است با

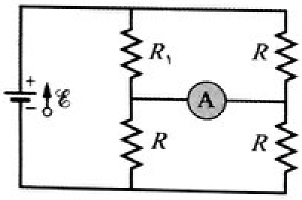
$$V'=R_V(i_1-i_2)=(۳۰۰)(۰/۰۱۶)=۴/۸۵\,V$$

(پ) مقاومت ظاهری R' برابر خواهد بود با

$$R'=\frac{V'}{i_A}=\frac{۴/۸۵}{۰/۰۵۵}=۸۸\Omega$$

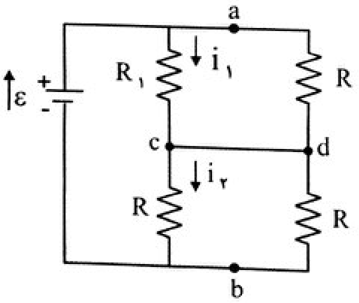
(ت) با توجه به اینکه $R=R'-R_A$ لذا وقتی R_A کاهش یابد اختلاف بین R و R' نیز کاهش می‌یابد و وقتی که $R_A=۰$ شود، داریم $R'=R$.

۵۴- در شکل ۲۳-۶۰، $R_1=۲/۰۰R$ ، مقاومت آمپرسنج صفر و باتری آرمانی است. چه مضربی از ε/R جریان آمپرسنج را به دست می‌دهد؟



شکل ۲۳-۶۰ مسئلهٔ ۵۴

حل:



آمپرسنج آرمانی است لذا مقاومتی ندارد و می‌توان مقاومت معادل را به صورت زیر به دست آورد:

$$R'_1=\frac{R_1R}{R_1+R}=\frac{۲}{۳}R \qquad R'_2=\frac{R}{۲}$$

$$R_{eq}=R'_1+R'_2=\frac{۲}{۳}R+\frac{R}{۲}=\frac{۷}{۶}R$$

$$V_{ac}=\frac{\varepsilon}{\frac{۷}{۶}R}\cdot R'_1=\frac{۶\varepsilon}{۷R}\cdot\frac{۲}{۳}R=\frac{۴}{۷}\varepsilon$$

$$i_1=\frac{V_{ac}}{R_1}=\frac{\frac{۴}{۷}\varepsilon}{۲R}=\frac{۲\varepsilon}{۷R}$$

و همچنین داریم:

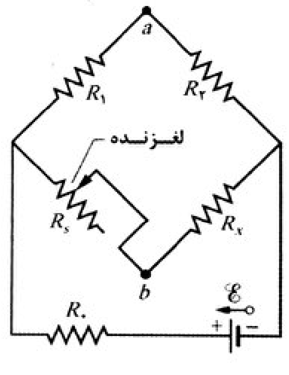
حال می‌توان نوشت:

$$V_{cb}=\varepsilon-V_{ac}=\varepsilon-\frac{۴}{۷}\varepsilon=\frac{۳}{۷}\varepsilon$$

$$i_۲=\frac{V_{cb}}{R}=\frac{\frac{۳}{۷}\varepsilon}{R}=\frac{۳}{۷}\frac{\varepsilon}{R}$$

$$i_A=i_۲-i_۱=\frac{\varepsilon}{۷R}=۰/۱۴۳$$

●●۵۵- در شکل ۲۳-۶۱، مقدار R_s طوری تنظیم می‌شود که با حرکت دادن لغزنده روی آن پتانسیل نقطه‌های a و b برابر شود. (این شرط را با بستن یک آمپرسنج حساس بین نقطهٔ a و نقطهٔ b می‌توان برقرار کرد؛ اگر این نقطه‌ها در یک پتانسیل باشند، آمپرسنج منحرف نمی‌شود.) نشان دهید که هرگاه این تنظیم انجام شود، این رابطه برقرار است: $R_x=R_sR_۲/R_۱$. مقاومت مجهول (R_x) را با استفاده از این دستگاه که پل وتستون نامیده می‌شود می‌توان برحسب مقاومت استاندارد (R_s) اندازه‌گیری کرد.



شکل ۲۳-۶۱ مسئله‌های ۵۵ و ۱۱۱

حل: از قاعدهٔ حلقه می‌توان نوشت:

$$(R_۱+R_۲)i_۱=(R_S+R_x)i_۲$$

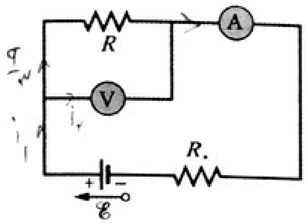
و چون $V_b-V_a=۰$ است، لذا:

$$R_۱i_۱=R_Si_۲$$

با تقسیم کردن دو رابطه بر هم خواهیم داشت:

$$\frac{R_۱+R_۲}{R_۱}=\frac{R_S+R_x}{R_S}\Rightarrow R_x=\frac{R_۲}{R_۱}R_S$$

●●۵۶- در شکل ۲۳-۶۲ ولت‌سنجی با مقاومت $R_V=۳۰۰\,\Omega$ و آمپرسنجی با مقاومت $R_A=۳/۰۰\Omega$ برای اندازه‌گیری مقاومت R در مداری که در آن یک مقاومت $R_۰=۱۰۰\,\Omega$ و یک باتری آرمانی با $\mathscr{E}=۱۲/۰\,V$ نیز وجود دارد، به کار برده می‌شوند. مقاومت R با رابطهٔ $R=V/i$ داده می‌شود که V مقدار نشان داده شده توسط ولت‌سنج و i جریان در مقاومت R است. ولی، آمپرسنج مقدار i را نشان نمی‌دهد بلکه مقدار i' را نشان می‌دهد، که عبارت است از i بعلاوهٔ جریانی که از ولت‌سنج می‌گذرد. بنابراین، نسبت دو مقدار خوانده شده R نیست بلکه فقط یک مقاومت *ظاهری* $R'=V/i'$ است. اگر $R=۸۵/۰\Omega$ باشد، (الف) مقدار نشان داده شدهٔ آمپرسنج، (ب) مقدار نشان داده شدهٔ ولت‌سنج و (پ) R' چقدر است؟ (ت) اگر R_V افزایش یابد، آیا اختلاف میان R' و R افزایش می‌یابد یا کاهش یا یکسان می‌ماند؟



شکل ۲۳-۶۲ مسئلهٔ ۵۶

حل: (الف) $R'_۱=\frac{RR_V}{R+R_V}=\frac{(۸۵)(۳۰۰)}{۸۵+۳۰۰}=۶۶/۲\Omega$

$R_{eq}=R'_۱+R_A+R_۰=۶۶/۲+۳+۱۰۰=۱۶۹/۲\Omega$

$i=i_A=\frac{\varepsilon}{R_{eq}}=\frac{۱۲}{۱۶۹/۲}=۷/۱\times۱۰^{-۲}\,A$

(ب) $V=R'_۱i=(۶۶/۲)(۷/۱\times۱۰^{-۲})=۴/۷۷V$

(پ) $R'=R'_۱=۶۶/۲\Omega$

(ت) اگر R_V افزایش یابد، اختلاف میان R و R' کاهش می‌یابد. به بیان دیگر وقتی $R_V\to\infty$ میل کند، $R'\to R$ میل می‌کند یعنی ولتمتر بیشتر آرمانی عمل می‌کند.

بخش ۲۳-۹ مدارهای RC

●۵۷- برحسب ثابت زمانی τ ، زمان لازم برای باردار شدن یک خازن بدون بار در یک مدار متوالی RC به اندازهٔ ۹۹/۰٪ بار اولیهٔ آن چقدر است؟ SSM

حل: (الف) رابطه باردار شدن خازن در مدار RC عبارت است از:

$$q=q_۰(1-e^{-t/\tau})$$

$$۰/۹۹q_۰=q_۰(1-e^{-t/\tau})\Rightarrow e^{-t/\tau}=۰/۰۱\Rightarrow -t/\tau=Ln(۰/۰۱)$$

$$t=۴/۶۰۵\tau$$

●۵۸- خازنی با بار اولیهٔ $q_۰$ از طریق مقاومتی تخلیه می‌شود. برحسب ثابت زمانی τ چقدر زمان نیاز است تا خازن (الف) نخست یک سوم از بار خود و (ب) دو سوم بار خود را از دست بدهد؟

حل: از رابطه تخلیه خازن داریم:

$$q=q_۰e^{-t/\tau}$$

(الف) وقتی یک سوم بار $q_۰$ تخلیه شود، $\frac{۲}{۳}q_۰$ باقی مانده است، لذا:

$$\frac{۲}{۳}q_۰=q_۰e^{-t/\tau}\Rightarrow Ln\left(\frac{۲}{۳}\right)=-\frac{t}{\tau}\Rightarrow t=۰/۴۰۵\tau$$

(ب) وقتی دو سوم بار $q_۰$ تخلیه شود، یک سوم آن باقی می‌ماند.

$$\frac{۱}{۳}q_۰=q_۰e^{-t/\tau}\Rightarrow Ln\left(\frac{۱}{۳}\right)=-\frac{t}{\tau}\Rightarrow t=۱/۰۹\tau$$

●۵۹- مقاومت $۱۵/۰ k\Omega$ و خازنی به طور متوالی به هم وصل شده‌اند و سپس اختلاف پتانسیل $۱۲/۰ V$ به طور ناگهانی به دو سر آنها اعمال می‌شود. اختلاف پتانسیل دو سر خازن در مدت $۱/۳۰ \mu s$ به $۵/۰۰ V$ افزایش می‌یابد. (الف) ثابت زمانی مدار را محاسبه کنید. (ب) ظرفیت خازن را پیدا کنید. **ILW**

حل: **(الف)**
$$V(t) = \varepsilon(۱-e^{-t/\tau})$$

در $t = ۱/۳ \mu s$ داریم $V = ۵V$ لذا داریم:

$$۵ = (۱۲)(۱-e^{-۱/۳\mu s/\tau}) \Rightarrow \tau = (۱/۳\mu s)\, Ln\left(\frac{۱۲}{۷}\right) = ۲/۴۱ \mu s$$

(ب)
$$\tau = RC \Rightarrow ۲/۴۱\times۱۰^{-۶} = ۱۵\times۱۰^{۳}\, C$$
$$\Rightarrow C = ۱/۶\times۱۰^{-۱۰}\ F$$

●۶۰- در یک مدار متوالی RC، $\varepsilon = ۱۲/۰ V$، $R = ۱/۴۰ M\Omega$ و $C = ۱/۸۰ \mu F$ است. (الف) ثابت زمانی را محاسبه کنید. (ب) بیشینهٔ باری را که روی خازن در ضمن باردار شدن ظاهر می‌شود پیدا کنید. (پ) چقدر طول می‌کشد تا خازن تا $۱۶/۰ \mu C$ باردار شود؟

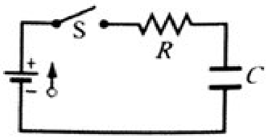
حل: **(الف)** ثابت زمانی خازن برابر است با:

$$\tau = RC = (۱/۴\times۱۰^{-۶})(۱/۸\times۱۰^{-۶}) = ۲/۵۲ s$$

(ب) به ازای $t \to \infty$، بیشینهٔ بار به دست می‌آید.

$$q_{max} = C\varepsilon = (۱/۸\mu F)(۱۲) = ۲۱/۶ \mu C$$
$$q = q_{max}(۱-e^{-t/\tau}) \Rightarrow ۱۶ = ۲۱/۶(۱-e^{-t/۲/۵۲})$$
$$\Rightarrow e^{-t/۲/۵۲} = ۰/۲۵۹ \Rightarrow -\frac{t}{۲۵/۲} = Ln(۰/۲۵۹) \Rightarrow t = ۳/۴ s$$

●۶۱- کلید S در شکل ۲۳-۶۳ در لحظهٔ $t = ۰$ بسته می‌شود تا خازن خالی با ظرفیت $C = ۱۵/۰ \mu F$ از طریق مقاومت $R = ۲۰/۰ \Omega$ باردار شود. در چه زمانی پتانسیل دو سر خازن برابر با پتانسیل دو سر مقاومت می‌شود؟



شکل ۲۳-۶۳ مسئله‌های ۶۱ و ۷۶

$$V_C = V_R = \frac{\varepsilon}{۲}$$
$$\tau = RC = (۲۰)(۱۵\times۱۰^{-۶}) = ۳\times۱۰^{-۴} s$$
$$V_c = \varepsilon(۱-e)^{-t/\tau} \Rightarrow \varepsilon/۲ = \varepsilon(۱-e^{-t/\tau})$$
$$e^{-t/\tau} = \frac{۱}{۲} \Rightarrow -\frac{t}{\tau} = Ln\left(\frac{۱}{۲}\right) \Rightarrow t = ۲/۰۸\times۱۰^{-۴} s$$

●●۶۲- خازنی با اختلاف پتانسیل اولیهٔ $۱۰۰ V$ از طریق مقاومتی وقتی که در لحظهٔ $t = ۰$ کلید میان آنها بسته شود شروع به تخلیه می‌کند. در $t = ۱۰/۰ s$، اختلاف پتانسیل دو سر خازن $۱/۰۰ V$ می‌شود. (الف) ثابت زمانی مدار چقدر است؟ (ب) اختلاف پتانسیل دو سر خازن در $t = ۱۷/۰ s$ چقدر است؟

حل: **(الف)** در حالت تخلیه داریم

$$V = V_0 e^{-t/\tau}$$
$$۱ = ۱۰۰ e^{-۱۰/\tau} \Rightarrow Ln(۰/۰۱) = -\frac{۱۰}{\tau} \Rightarrow \tau = ۲/۱۷ s$$

(ب)
$$V = V_0 e^{-t/\tau} = (۱۰۰)e^{-۱۷/۲/۱۷} = ۳/۹۶\times۱۰^{-۲}\ V$$

●●۶۳- اختلاف پتانسیل بین صفحه‌های یک خازن نشتی $۲/۰ \mu F$ (بدان معنا که بار از یک صفحه به صفحه دیگر نشت می‌کند) در مدت $۲/۰ s$ به یک چهارم مقدار اولیهٔ آن می‌رسد. مقاومت معادل بین صفحه‌های خازن چقدر است؟

حل:
$$V = V_0 e^{-t/RC} \Rightarrow Ln\frac{V}{V_0} = -\frac{t}{RC}$$
$$\Rightarrow R = -\frac{t}{C\,Ln\frac{V}{V_0}} = -\frac{۲}{(۲\times۱۰^{-۶})Ln\left(\frac{۱}{۴}\right)} = ۷/۲۱\times۱۰^{۵}\ \Omega$$

●●۶۴- خازن $۱\mu F$ با انرژی اولیهٔ ذخیره شدهٔ $۰/۵۰ J$ از طریق مقاومت $۱M\Omega$ تخلیه می‌شود. (الف) بار اولیه روی خازن چقدر است؟ (ب) وقتی تخلیه شروع شد جریان در مقاومت چقدر است؟ عبارتی پیدا کنید که تابعی برحسب زمان بدهد، (پ) اختلاف پتانسیل V_C دو سر خازن، (ت) اختلاف پتانسیل V_R دو سر مقاومت و (ث) آهنگی را که در آن انرژی گرمایی در مقاومت ایجاد می‌شود، پیدا کنید.

حل: **(الف)**
$$U = \frac{q^۲}{۲C} \Rightarrow ۰/۵ = \frac{q^۲}{۲(۱\times۱۰^{-۶})} \Rightarrow q = ۱\times۱۰^{-۳}\ C$$

(ب) بار خازن در هنگام تخلیه از رابطهٔ زیر به دست می‌آید:

$$q = q_0 e^{-t/\tau}$$

مشتق این رابطه جریان را به دست می‌دهد.

$$i = \left|\frac{dq}{dt}\right| = \frac{q_0}{\tau}e^{-t/\tau}$$

در لحظه شروع $t = ۰$ است و داریم

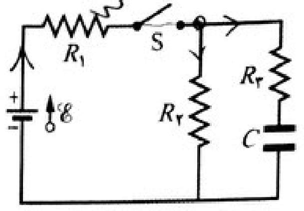
$$i_0 = \frac{q_0}{\tau} = \frac{q_0}{RC} = \frac{۱\times۱۰^{-۳}}{(۱\times۱۰^{۶})(۱\times۱۰^{-۶})} = ۱\times۱۰^{-۳}\ A$$

(پ)
$$q = ۱\times۱۰^{-۳}\, e^{-t/\tau} \Rightarrow V_C = \frac{q}{C}e^{-t/\tau} \Rightarrow V_C = ۱۰۰۰ e^{-t}$$

(ت)
$$V_R = Ri = (۱\times۱۰^{۶})(۱\times۱۰^{-۳}\, e^{-t}) = ۱۰۰۰ e^{-t}$$

(ث)
$$P = Ri^۲ = (۱\times۱۰^{۶})(۱\times۱۰^{-۳}\, e^{-t})^۲ = e^{-۲t}$$

●●۶۵- در مدار شکل ۲۳-۶۴، $\mathscr{E} = ۱/۲ kV$، $C = ۶/۵ \mu F$، $R_1 = R_2 = R_3 = ۰/۷۳ M\Omega$. با خازن کاملاً خالی (در $t = ۰$) کلید S ناگهان بسته می‌شود. در $t = ۰$ (الف) جریان i_1 در مقاومت ۱، (ب) جریان i_2 در مقاومت ۲ و (پ) جریان i_3 در مقاومت ۳ چقدر است؟ در $t = \infty$ (یعنی پس از ثابتهای زمانی زیاد)، (ت) i_1، (ث) i_2 و (ج) i_3 چقدرند؟ اختلاف پتانسیل V_2 در دو سر مقاومت ۱ در (چ) $t = ۰$ و (ح) $t = \infty$ چقدر است؟ (خ) V_2 را برحسب t میان این دو زمان حدی رسم کنید. **SSM WWW**



شکل ۲۳-۶۴ مسئلهٔ ۶۵

حل: در لحظه بسته شدن کلید $t=0$ خازن بدون بار است و خازن مانند اتصال کوتاه عمل می‌کند در نتیجه می‌توان نوشت

$$R_{23}=\frac{R_2R_3}{R_2+R_3}=0.365\,\mathrm{M\Omega}$$

$$R_{eq}=R_1+R_{23}=0.73+0.365=1.095\,\mathrm{M\Omega}$$

$$i=\frac{\varepsilon}{R_{eq}}=\frac{1.2\times10^{3}}{1.095\times10^{6}}=1.1\times10^{-3}\ \mathrm{A}$$

(الف) $i_1=i=1.1\times10^{-3}\ \mathrm{A}$

(ب) $V_2=R_{23}i=(0.365\times10^{6})(1.1\times10^{-3})=401.5\,\mathrm{V}$

$$i_2=\frac{V_2}{R_2}=\frac{401.5}{0.73\times10^{6}}=5.5\times10^{-4}\ \mathrm{A}$$

(پ) با توجه به اینکه مقاومت‌های R_2 و R_3 یکسان هستند، لذا داریم:

$$i_3=i_2=5.5\times10^{-4}\ \mathrm{A}$$

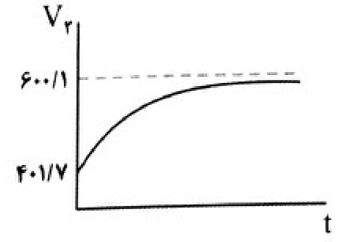
(ت) و (ث) پس از گذشت بسیار زیاد زمان، $t\to\infty$، خازن مانند اتصال باز عمل می‌کند و مقاومت R_3 از مدار حذف می‌شود.

$$i_1=i_2=\frac{\varepsilon}{R_1+R_2}=\frac{1.2\times10^{3}}{2(0.73\times10^{6})}=8.22\times10^{-4}\ \mathrm{A}$$

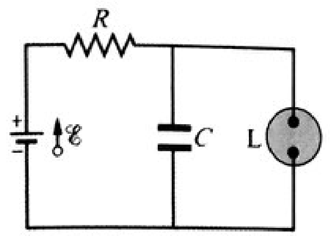
(ج) همانطور که دیدیم جریان این شاخه صفر است یعنی $i_3=0$ است.

(چ) تا (خ) در بخش (الف) و (ب) در $t=0$ دیدیم که ولتاژ دو سر R_2 برابر بود با $V_2=401.5\,\mathrm{V}$. در $t\to\infty$

$$V_2=R_2i_2=(0.73\times10^{6})(8.22\times10^{-4})=600\,\mathrm{V}$$



۶۶●●- شکل ۲۳-۶۵ مدار یک لامپ چشمک‌زن را، مانند لامپی که در محلی در بزرگراهها بسته می‌شود، نشان می‌دهد. لامپ فلورسنت L (با ظرفیت ناچیز) به طور موازی به خازن C در یک مدار RC وصل شده است. فقط هنگامی که اختلاف پتانسیل دو سر لامپ به ولتاژ فروریزش V_L می‌رسد جریانی از لامپ می‌گذرد. در این حال خازن به طور کامل از طریق لامپ تخلیه می‌شود و لامپ برای مدت کوتاهی چشمک می‌زند. در مورد لامپی با ولتاژ فروریزش $V_L=72.0\,\mathrm{V}$ که به باتری آرمانی ۹۵/۰V و خازن ۰/۱۵۰μF وصل شده است، چه مقاومت R برای دو چشمک در ثانیه لازم است.



شکل ۲۳-۶۵ مسئلهٔ ۶۶

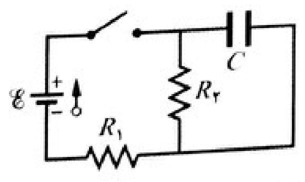
حل: چون می‌خواهیم در هر ثانیه دو چشمک زده شود لذا زمان هر چشمک و رسیدن ولتاژ دو سر لامپ به ولتاژ شکست ۰/۵s می‌شود. خازن از طریق مقاومت تخلیه می‌شود لذا می‌توان زمانی را که پتانسیل دو سر خازن به ولتاژ شکست V_L می‌رسد را از رابطه زیر به دست آورد.

$$V_L=\varepsilon(1-e^{-t/RC})\Rightarrow e^{-t/RC}=\frac{\varepsilon-V_L}{\varepsilon}$$

$$-\frac{t}{RC}=Ln\frac{\varepsilon-V_L}{\varepsilon}\Rightarrow R=\frac{t}{C\,Ln\left[\varepsilon/(\varepsilon-V_L)\right]}$$

که با قرار دادن مقادیر داده شده $R=2.35\times10^{6}\ \Omega$ به دست می‌آید.

۶۷●●- در شکل ۲۳-۶۶، $R_1=10.0\,\mathrm{k\Omega}$ ، $R_2=15.0\,\mathrm{k\Omega}$ ، $C=0.400\,\mu\mathrm{F}$ و emf باتری آرمانی $\mathscr{E}=20.0\,\mathrm{V}$ است. نخست کلید بسته می‌شود و زمانی طولانی می‌گذرد تا حالت پایا برقرار شود. سپس کلید در لحظهٔ $t=0$ باز می‌شود. جریان در مقاومت ۲ در $t=4.00\,\mathrm{ms}$ چقدر است؟ GO



شکل ۲۳-۶۶ مسئله‌های ۶۷ و ۹۷

حل: در حالت پایا، خازن مانند اتصال باز عمل می‌کند و داریم:

$$i_2=i=\frac{\varepsilon}{R_1+R_2}=\frac{20}{(10+15)\times10^{3}}=8\times10^{-4}\ \mathrm{A}$$

$$V_C=V_2=R_2i_2=(15\times10^{3})(0.4\times10^{-6})\Rightarrow V_C=12\,\mathrm{V}$$

در حالتی که کلید باز می‌شود، در $t=0$، C و R تشکیل یک حلقه بسته و مدار RC را تشکیل می‌دهند

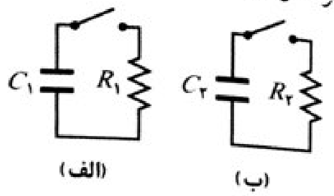
$$\tau=R_2C=(15\times10^{3})(0.4\times10^{-6})=6\times10^{-3}\ \mathrm{s}$$

برای تخلیه خازن داریم، $i_0=8\times10^{-4}\ \mathrm{A}$ است

$$i=i_0e^{-t/\tau}=(6\times10^{-3})e^{-4/6}=4.11\times10^{-4}\ \mathrm{A}$$

۶۸●●●- شکل ۲۳-۶۷ دو مدار با یک خازن باردار را نشان می‌دهد که باید از طریق مقاومتی در حالت بسته بودن کلید تخلیه شود. در شکل ۲۳-۵۶ الف، $R_1=20.0\,\Omega$ و $C_1=5.00\,\mu\mathrm{F}$ است. در شکل ۲۳-۵۶ ب، $R_2=10.0\,\Omega$ و $C_2=8.00\,\mu\mathrm{F}$

است. نسبت بارهای اولیه روی دو خازن $q_{02}/q_{01} = 1/50$ است. در لحظهٔ $t = 0$ هر دو کلید بسته می‌شوند. در چه زمان t بار دو خازن برابر خواهد شد؟



شکل ۲۳-۶۷ مسئلهٔ ۶۸

حل:

$$q_1 = q_{01}e^{-t/\tau_1} \qquad q_2 = q_{02}e^{-t/\tau_2}$$

$$\tau_1 = R_1C_1 = 1\times10^{-4}\ \text{s} \qquad \tau_2 = R_2C_2 = 80\times10^{-6}\ \text{s}$$

$$q_1 = q_2 \Rightarrow q_{01}e^{-t/\tau_1} = q_{02}e^{-t/\tau_2} \Rightarrow e^{-t/\tau_1} = (1/5)e^{-t/\tau_2}$$

$$\Rightarrow e^{\left(\frac{1}{\tau_2}-\frac{1}{\tau_1}\right)t} = 1/5 \Rightarrow \left(\frac{1}{80\times10^{-6}} - \frac{1}{1\times10^{-4}}\right)t = Ln(1/5)$$

$$\Rightarrow t = 1/62\times10^{-4}\ \text{s}$$

●●●۶۹- مقاومت $3/00\,\text{M}\Omega$ و خازن $1/00\,\mu\text{F}$ با باتری آرمانی $\varepsilon = 4/00\,\text{V}$ به طور متوالی بسته شده‌اند. در زمان $1/00\,\text{s}$ پس از اتصال، آهنگ (الف) افزایش بار خازن (ب) انرژی ذخیره شده در خازن، (پ) اتلاف انرژی گرمایی به وجود آمده در مقاومت و (ت) انرژی تولید شده توسط باتری، چقدر است؟

حل: (الف) $\tau = RC = (3\times10^{6})(1\times10^{-6}) = 3\text{s}$

$$q = C\varepsilon(1-e^{-t/\tau})$$

$$i = \frac{dq}{dt} = \frac{C\varepsilon}{\tau}e^{-t/\tau} = \frac{(1\times10^{-6})(4)}{3}e^{-1/3} = 9/55\times10^{-7}\ \text{A}$$

(ب) $U = \dfrac{q^2}{2C} \qquad \dfrac{dU}{dt} = \dfrac{q}{C}\dfrac{dq}{dt} = \dfrac{C\varepsilon(1-e^{-t/\tau})}{C}i$

$$\frac{dU}{dt} = (4)(1-e^{-1/3})(9/55\times10^{-7}) = 1/08\times10^{-6}\ \text{W}$$

(پ) آهنگ اتلاف انرژی در مقاومت $P = Ri^2$ است. در اینجا $i = 9/55\times10^{-7}\ \text{A}$ است، لذا داریم:

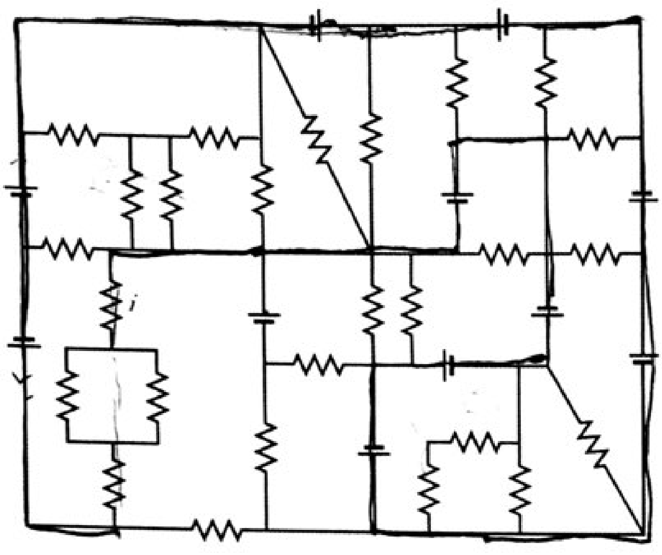
$$P = (3\times10^{6})(9/55\times10^{-7})^2 = 2/74\times10^{-6}\ \text{W}$$

(ت) آهنگ انتقال انرژی از باتری از رابطهٔ زیر به دست می‌آید:

$$P = \varepsilon i = (4)(9/55\times10^{-7}) = 3/82\times10^{-6}\ \text{W}$$

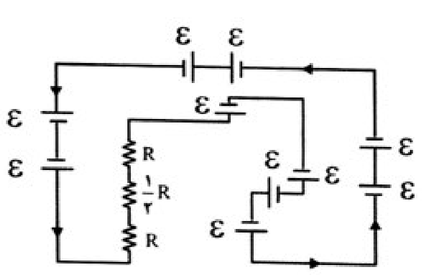
مسئله‌های اضافی

۷۰- (الف) اندازه و (ب) جهت (بالا یا پایین) جریان i در شکل ۲۳-۶۸ ، که مقدار همهٔ مقاومتها $4/0\,\Omega$ و همهٔ باتریها آرمانی و emf آنها $10\,\text{V}$ است، چیست؟



شکل ۲۳-۶۸ مسئلهٔ ۷۰

حل: (الف) و (ب) در اینجا می‌توان بدون ساده کردن مدار که بسیار وقت‌گیر است و برای به دست آوردن جریان در یک مقاومت معین از قانون حلقه استفاده کرد. مسیر بسته‌ای مطابق مدار زیر را در نظر می‌گیریم که فقط شامل باتری و آن مقاومت باشد.



$$-\varepsilon + \varepsilon - 2/5Ri + \varepsilon + \varepsilon + \varepsilon + \varepsilon + \varepsilon - \varepsilon + \varepsilon - \varepsilon = 0$$

$$4\varepsilon = 2/5Ri \quad \Rightarrow \quad i = 4\text{A}$$

و چون جواب مثبت جهت انتخابی جریان صحیح است.

۷۱- فرض کنید در حالی که روی صندلی نشسته‌اید، جدایی بار بین لباسهایتان و صندلی شما را در پتانسیل $200\,\text{V}$ قرار دهد و ظرفیت خازن بین شما و صندلی $150\,\text{pF}$ باشد. وقتی می‌ایستید، جدایی بین بدن شما و صندلی زیاد می‌شود و ظرفیت تا $10\,\text{pF}$ کاهش می‌یابد. (الف) حالا پتانسیل بدن شما چقدر است؟ وقتی بار از طریق بدن و کفشها خارج می‌شود (شما خازنی هستید که از طریق یک مقاومت تخلیه انجام می‌گیرد) پتانسیل در طول زمان کاهش می‌یابد. فرض کنید که مقاومت در طول این راه $300\,\text{G}\Omega$ باشد. اگر وقتی پتانسیل شما بیشتر از $100\,\text{V}$ است و قطعه‌ای الکتریکی را لمس کنید، به آن قطعه آسیب خواهد رسید. (ب) چقدر باید منتظر بمانید تا پتانسیل شما به مقدار ایمن $100\,\text{V}$ برسد؟

اگر لباس رسانایی به تن داشته باشید که به زمین متصل باشد، پتانسیل شما تا وقتی که ایستاده‌اید افزایش نمی‌یابد؛ هم‌چنین ممکن است خیلی سریع تخلیه انجام گیرد چون مقاومت از راه اتصال به زمین خیلی کمتر از بدن و کفشهای

شماست.(پ)فرض کنید وقتی ایستاده‌اید پتانسیل شما ۱۴۰۰V و ظرفیت صندلی با بدن شما ۱۰pF باشد. مقاومت لباس رسانا تا زمین چقدر باید باشد تا تخلیه در ۱۰۰V در مدت ۰/۳۰ s انجام گیرد، که کمتر از زمانی است که مثلاً بخواهید به رایانه برسید.

حل: (الف)

$$q = C_1V_1 = C_2V_2$$

$$(150)(200) = (10)V_2 \Rightarrow V_2 = 3000V$$

(ب) برای تخلیه داریم

$$V_C = V_0 e^{-t/\tau}$$

$$100 = 3000 e^{-t/\tau} \Rightarrow \ln\frac{1}{30} = -\frac{t}{\tau}$$

$$t = 3/4\tau$$

$$\tau = RC = (300\times10^{9})(10\times10^{-12}) = 3\,S$$

$$t = (3/4)(3) = 10/2\,s$$

(پ)

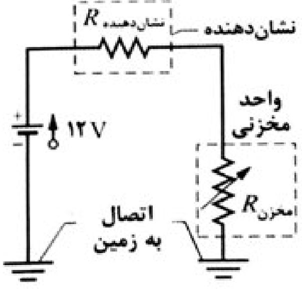
$$V_C = V_0 e^{-t/\tau} \Rightarrow 100 = 1400\,e^{-t/\tau}$$

$$\ln\frac{1}{14} = -\frac{0/3}{\tau} \Rightarrow \tau = 0/114S$$

$$\tau = RC \Rightarrow 0/114 = 10\times10^{-12}\,R$$

$$R = 1/14\times10^{10}\,\Omega$$

۷۲- طرحوار دستگاه اندازه‌گیری بنزین یک اتومبیل در شکل ۲۳-۶۹ نشان داده شده است. مقاومت دستگاه نشان دهنده (خط‌چین) ۱۰Ω است. واحد مخزنی شناوری است که به مقاومتی وصل شده است که مقاومت آن به طور خطی برحسب حجم بنزین تغییر می‌کند. وقتی مخزن خالی است مقدار این مقاومت ۱۴۰Ω و وقتی مخزن پر است مقدار آن ۲۰Ω است. وقتی که مخزن (الف) خالی و (ب) نیمه خالی و (پ) پر است، جریان در مدار را پیدا کنید. باتری را آرمانی فرض کنید.



شکل ۲۳-۶۹ مسئلهٔ ۷۲

حل: (الف) مخزن خالی است، داریم $R_{مخزن}=140\,\Omega$. جریان در مدار برابر است با

$$i = \frac{12}{10+140} = 0/08A$$

(ب) با توجه به اینکه رابطهٔ مقاومت مخزن و حجم گازوئیل خطی است. وقتی مخزن نیمه پر است مقاومت مخزن برابر $R_{مخزن} = \frac{1}{2}(20+140) = 80\,\Omega$ است.

بنابراین جریان در مدار برابر است با:

$$i = \frac{12}{10+80} = 0/13A$$

(پ) هنگامی که مخزن پر است $R_{مخزن} = 20\,\Omega$ بود و داریم:

$$i = \frac{12}{10+20} = 0/40A$$

۷۳- کنترل کنندهٔ روی یک اسباب بازی الکترونیکی دارای یک مقاومت متغیر است که به دو سر یک خازن ۰/۲۲۰μF وصل شده است. خازن تا ۵/۰۰V باردار و سپس از طریق یک مقاومت تخلیه می‌شود. زمان کاهش اختلاف پتانسیل دو سر صفحه‌ها به ۰/۸۰۰V با ساعت داخل وسیله اندازه‌گیری می‌شود. اگر گسترهٔ زمان تخلیه که به طور مؤثر می‌تواند تغییر داده شود از ۱۰/۰μs تا ۶/۰۰ms باشد، (الف) مقدار پایین و (ب) مقدار بالای گسترهٔ مقاومت باید چقدر باشد؟ SSM

حل: (الف) برای تخلیه خازن داریم $V = \varepsilon e^{-t/RC}$ و برای $t_{min} = 10\,\mu s$ داریم

$$e^{-t/RC} = \frac{V}{\varepsilon} \qquad -\frac{t}{RC} = Ln\frac{V}{\varepsilon} \qquad R = \frac{t}{C\,Ln\left(\frac{\varepsilon}{V}\right)}$$

$$R_{min} = \frac{10\times10^{-6}}{(0/22\times10^{-6})\,Ln(5/0/8)} = 24/8\Omega$$

(ب) به ازای $t_{max} = 6ms$

$$R_{max} = \frac{6\times10^{-3}}{(0/22\times10^{-6})\,Ln(5/8)} = 1/49\times10^{4}\,\Omega$$

۷۴- (الف) در شکل ۲۳-۴ الف نشان دهید که آهنگ مصرف انرژی در R به صورت انرژی گرمایی، در $R = r$ بیشینه است. (ب) نشان دهید که این توان بیشینه برابر است با $P = \varepsilon^2/4r$.

حل: (الف) آهنگ اتلاف انرژی گرمایی در R با $P = Ri^2$ داده می‌شود که $i = \frac{\varepsilon}{R+r}$ است.

$$P = R\left(\frac{\varepsilon}{R+r}\right)^2$$

برای بیشینه P باید $\frac{dP}{dR} = 0$ باشد.

$$\frac{dP}{dR} = \frac{\varepsilon^2(R+r)^2 - 2(R+r)\varepsilon^2 R}{(R+r)^4} = 0 \Rightarrow R = r$$

(ب) به ازای $R = r$، اتلاف در مقاومت R برابر است:

$$P = R\left(\frac{\varepsilon}{r+r}\right)^2 = \frac{\varepsilon^2}{4r}$$

۷۵- سیمهای A و B با طولهای مساوی ۴۰/۰m و قطرهای مساوی ۲/۶۰ mm به طور متوالی به هم وصل شده‌اند. اختلاف پتانسیل ۶۰/۰V به دو انتهای سیم مرکب اعمال می‌شود. مقاومت سیمها عبارت‌اند از $R_A = 0/127\,\Omega$ ، $R_B = 0/729\,\Omega$. در مورد سیم A، (الف) بزرگی J چگالی جریان و (ب) اختلاف پتانسیل V، چقدر است؟ (پ) جنس سیم A از چه ماده‌ای است (به جدول ۲۲-۱ نگاه کنید)؟ در مورد سیم B، (ت) J و (ث) V چقدر است؟ (ج) جنس سیم B از چه ماده‌ای است؟ SSM

حل: (الف)

$$A=\pi r^۲=\pi\left(\frac{D}{۲}\right)^۲=(۳/۱۴)(۱/۳\times۱۰^{-۳})^۲=۵/۳۱\times۱۰^{-۶}\,m^۲$$

$$R_{eq}=R_A+R_B=۰/۱۲۷+۰/۷۲۹=۰/۸۵۶\Omega$$

$$i=i_A=i_B=\frac{V}{R_{eq}}=\frac{۶۰}{۰/۸۵۶}=۷۰/۱A$$

$$j_A=\frac{i}{A}=\frac{۷۰/۱}{۵/۳۱\times۱۰^{-۶}}=۱/۳۲\times۱۰^۷\,A/m^۲$$

(ب) $$V_A=R_Ai=(۰/۱۲۷)(۷۰/۱)=۸/۹V$$

(پ) $$R_A=\rho_A\frac{L}{A}\Rightarrow ۰/۱۲۷=\rho_A\frac{۴۰}{۵/۳۱\times۱۰^{-۶}}$$

$$\Rightarrow \rho_A=۱/۶۹\times۱۰^{-۸}\,\Omega\cdot m$$

بنابراین جنس سیم A از مس است.

(ت) $j_B=j_A=۱/۳۲\times۱۰^۷\,A/m^۲$.

(ث) V_B برابر است با

$$V_B=V-V_A=۶۰-۸/۹=۵۱/۱V$$

یا می‌توان گفت

$$V_B=R_Bi=(۰/۷۲۹)(۷۰/۱)=۵۱/۱V$$

(ج) $$R_B=\rho_B\frac{L}{A}\Rightarrow ۰/۷۲۹=\rho_B\frac{۴۰}{۵/۳\times۱۰^{-۶}}$$

$$\rho_B=۹/۶۸\times۱۰^{-۸}\,\Omega\cdot m$$

بنابراین جنس سیم B از آهن است.

۷۶- شکل ۲۳-۶۳ یک باتری آرمانی را با $\varepsilon=۱۲V$ ، مقاومت $R=۴/۰\Omega$ و خازن بدون بار $C=۴/۰\mu F$ نشان می‌دهد. پس از بسته شدن کلید، جریان عبوری از مقاومت، پس از باردار شدن خازن به اندازهٔ $۸/۰\mu C$ چقدر است؟

حل: در حالت شارژ خازن در مدار RC داریم

$$q=\varepsilon C(۱-e^{-t/RC})$$

$$۸=(۱۲)(۴)(۱-e^{-t/RC})\Rightarrow e^{-t/RC}=۰/۸۳۳$$

$$i=\frac{dq}{dt}=\frac{\varepsilon}{R}e^{-t/RC}=\frac{۱۲}{۴}(۰/۸۳۳)\Rightarrow i=۲/۵A$$

۷۷- استارت اتومبیلی خیلی آهسته می‌چرخد و تعمیرکار باید دربارهٔ تعویض آن، کابل یا باتری تصمیم بگیرد. از کتابچهٔ راهنمای اتومبیل معلوم می‌شود که مقاومت درونی باتری ۱۲ ولتی نباید بیشتر از $۰/۰۲۰\Omega$ ، مقاومت استارت نباید بیشتر از $۰/۲۰۰\Omega$ و مقاومت کابل نباید بیشتر از $۰/۰۴۰\Omega$ باشد. تعمیرکار موتور را روشن می‌کند و ولتاژ دو سر باتری را $۱۱/۴V$، ولتاژ دو سر کابل را $۳/۰V$ و جریان را $۵۰A$ اندازه‌گیری می‌کند. کدام قطعه معیوب است؟ SSM

حل: ولتاژ دو سر باتری برابر است با

$$V=\varepsilon-ir\Rightarrow ۱۱/۴=۱۲-(۵۰)r\Rightarrow$$

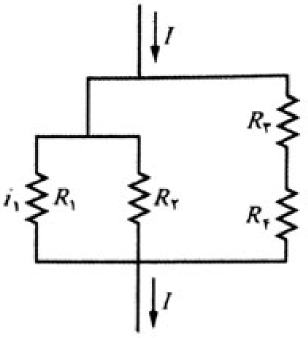
$$r=۰/۰۱۲\Omega<۰/۰۲\Omega$$

پس باتری سالم است. مقاومت کابل برابر است با

$$R=\frac{۳۰}{۵۰}=۰/۰۶\Omega>۰/۰۴$$

پس کابل معیوب است و باید تعویض شود.

۷۸- شکل ۲۳-۷۰ قسمتی از مداری را نشان می‌دهد که جریان $I=۶/۰۰A$ از آن می‌گذرد. مقاومتها عبارت‌اند از $R_۱=R_۲=۲/۰۰R_۳=۲/۰۰R_۴=۴/۰۰\Omega$. جریان $i_۱$ در مقاومت ۱ چقدر است؟



شکل ۲۳-۷۰ مسئلهٔ ۷۸

حل: (الف) با استفاده از مقاومت معادل مسئله را حل می‌کنیم

$$R_{۳۴}=R_۳+R_۴=۴\Omega$$

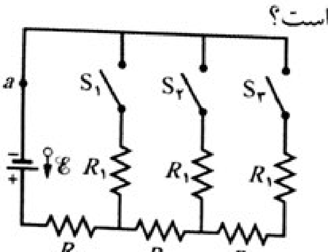
$$R_{۱۲}=\frac{R_۱R_۲}{R_۱+R_۲}=۲\Omega$$

$$R_{eq}=\frac{R_{۱۲}R_{۳۴}}{R_{۱۲}+R_{۳۴}}=\frac{(۴)(۲)}{۴+۲}=\frac{۴}{۳}\Omega$$

$$V_۱=V=R_{eq}i=\left(\frac{۴}{۳}\right)(۶)=۸V$$

$$i_۱=\frac{V_۱}{R_۱}=\frac{۸}{۴}=۲A$$

۷۹- در شکل ۲۳-۷۱، $R_۱=۲۰/۰\Omega$ ، $R_۲=۱۰/۰\Omega$ و emf باتری آرمانی $\varepsilon=۱۲۰V$ است. اگر (الف) فقط کلید $S_۱$ ، (ب) فقط کلید $S_۱$ و $S_۲$ و (پ) هر سه کلید، بسته شوند، جریان در نقطهٔ a چقدر است؟



شکل ۲۳-۷۱ مسئلهٔ ۷۹

حل» (الف) وقتی فقط کلید $S_۱$ بسته شود، داریم:

$$i=\frac{\varepsilon}{۲R_۱}=\frac{۱۲۰}{۲(۲۰)}=۳A$$

(ب) وقتی کلید $S_۱$ و $S_۲$ بسته شوند، در حلقهٔ دوم داریم:

$$R_{۱۲}=R_۱+R_۲=(۲۰+۱۰)=۳۰\Omega$$

حال مقاومت معادل حلقه اول و دوم را به دست می‌آوریم

$$R'=\frac{R_۱R_{۱۲}}{R_۱+R_{۱۲}}+R_۱=۱۲+۲۰=۳۲$$

$$i=\frac{\varepsilon}{R'}=\frac{۱۲۰}{۳۲}=۳/۷۵A$$

(پ) بالاخره وقتی هر سه کلید بسته شوند، با کمی دقت می‌بینیم که مقاومت حلقهٔ سوم $R'_3 = 30\Omega$، مقاومت حلقه دوم $R'_2 = 30\Omega$ و مقاومت شاخه دوم $R_1 = 20\Omega$.

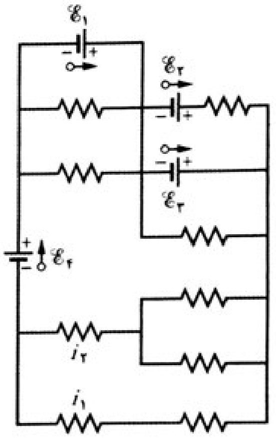
$$\frac{1}{R'} = \frac{1}{30} + \frac{1}{30} + \frac{1}{20} \Rightarrow R' = 8/57\Omega$$

مقاومت معادل کل مدار برابر است

$$R_{eq} = R' + R_1 = 8/57 + 20 = 28/75\Omega$$

$$i = \frac{\varepsilon}{R_{eq}} = \frac{120}{28/75} = 4/2\,A$$

۸۰- در شکل ۲۳-۷۲، emf باتریهای آرمانی $\varepsilon_1 = 20/0\,V$، $\varepsilon_2 = 10/0\,V$، $\varepsilon_3 = 5/00\,V$ و $\varepsilon_4 = 5/00\,V$ و مقاومت هر یک از مقاومتها برابر با $2/00\Omega$ است. (الف) اندازه و (ب) جهت (چپ یا راست) جریان i_1 و (پ) اندازه و (ت) جهت جریان i_2 چیست؟ (این را فقط با یک محاسبهٔ ذهنی می‌توان پاسخ داد.) (ث) با چه آهنگی انرژی به باتری ۴ منتقل می‌شود و آیا (ج) انرژی توسط باتری تولید می‌شود یا جذب؟



شکل ۲۳-۷۲ مسئلهٔ ۸۰

حل: (الف) مقاومت معادل دو مقاومت پایینی که متوالی هستند برابر $R' = 4\Omega$ است و جریان i_1 از آن می‌گذرد. حلقه شامل این مقاومت معادل و باتریهای ε_1 و ε_3 و ε_4 را در نظر گرفته و با استفاده از قاعده حلقه داریم

$$i_1 = \frac{\varepsilon_1 + \varepsilon_3 + \varepsilon_4}{R'} = \frac{20 + 5 + 5}{4} = 7/5\,A$$

(ب) جواب مثبت است پس جهت جریان i_1 که به سمت چپ انتخاب کردیم، صحیح است.

(پ) اختلاف پتانسیل دو سر این مقاومت معادل برابر با $i_1 R' = (7/5)(4) = 30\,V$ این ولتاژ برابر ولتاژ دو سر سایر مقاومتهایی است که در بالای این جفت مقاومت واقع‌اند. در یکی از شاخه‌ها جریان i_2 و $i_2/2$ از مقاومتها می‌گذرد، لذا داریم:

$$30 = 2i_2 + 2\left(\frac{i_2}{2}\right) \Rightarrow i_2 = 10\,A$$

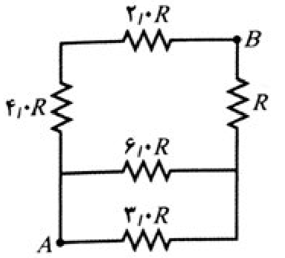
(ت) جواب مثبت است پس i_2 به سمت چپ است.

(ث) آهنگ انتقال انرژی به باتری ۴ برابر است با:

$$P_4 = \varepsilon_4(i_1 + i_2) = (5)(7/5 + 10) = 87/5\,W$$

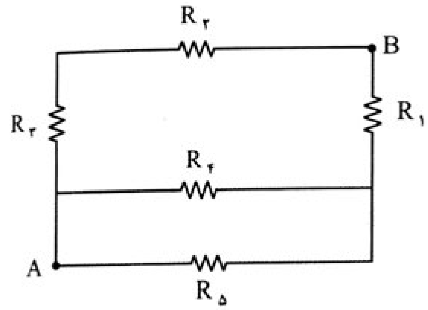
(ج) با توجه به جهت جریان مشاهده می‌شود که انرژی به مدار داده می‌شود.

۸۱- در شکل ۲۳-۷۳، $R = 10\Omega$ است. مقاومت معادل میان نقطه‌های A و B چقدر است؟ (*راهنمایی:* اگر در ابتدا فرض کنیم که نقطه‌های A و B به یک باتری وصل شده‌اند این مدار ساده‌تر خواهد شد.)



شکل ۲۳-۷۳ مسئلهٔ ۸۱

حل:



$$R_{45} = \frac{R_4 R_5}{R_4 + R_5} = \frac{(6R)(3R)}{6R + 3R} = 2R$$

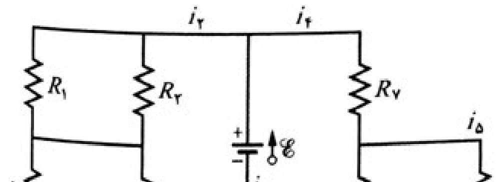
$$R_{145} = R_1 + R_{45} = R + 2R = 3R$$

$$R_{23} = (2R) + (4R) = 6R$$

$$R_{eq} = \frac{R_{23} R_{145}}{R_{23} + R_{145}} = \frac{(6R)(3R)}{6R + 3R} = 2R$$

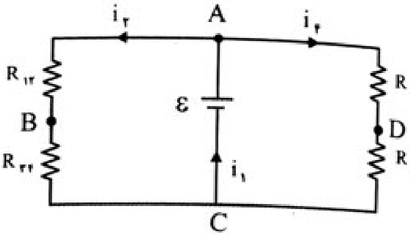
$$R_{eq} = 2(10) = 20\Omega$$

۸۲- در شکل ۲۲-۷۴، emf باتری آرمانی $\mathscr{E} = 30/0\,V$ و مقاومتها عبارت‌اند از $R_1 = R_2 = 14\Omega$، $R_3 = R_4 = R_5 = 6/0\Omega$، $R_6 = 2/0\Omega$ و $R_7 = 1/5\Omega$. جریانهای (الف) i_2، (ب) i_4، (پ) i_1، (ت) i_3 و (ث) i_5 چقدرند؟



شکل ۲۳-۷۴ مسئلهٔ ۸۲

حل: (الف) مدار را می‌توان به صورت ساده زیر در نظر گرفت.



$$R_{12}=\frac{R_1R_2}{R_1+R_2}=7\Omega \qquad R_{34}=\frac{R_3R_4}{R_3+R_4}=3\Omega$$

$$\varepsilon-(R_{12}+R_{34})i_2=0\Rightarrow 30-(7+3)i_2=0\Rightarrow i_2=3A$$

(ب)

$$R_{56}=\frac{R_5R_6}{R_5+R_6}=1.5\Omega$$

$$\varepsilon-(R_7+R_{56})i_4=0\Rightarrow 30-(1.5+1.5)i_4=0\Rightarrow i_4=10A$$

(پ) با استفاده از قانون انشعاب در نقطه A می‌توان نوشت

$$i_1=i_2+i_4=3+10=13A$$

(ت)

$$V_{34}=R_{34}i_2=(3)(3)=9V$$

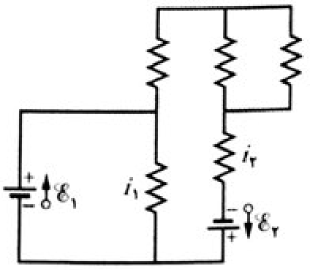
$$i_3=\frac{V_{34}}{R_3}=\frac{9}{6}=1.5A$$

(ث)

$$V_{56}=R_{56}i_4=(1.5)(10)=15V$$

$$i_5=\frac{V_{56}}{R_6}=\frac{15}{2}=7.5A$$

۸۳- در شکل ۲۳-۷۵، emf های باتریهای آرمانی $\varepsilon_1=12.0V$ و $\varepsilon_2=4.00V$ و اندازهٔ هر یک از مقاومتها 4.00Ω است. (الف) اندازه و (ب) جهت (بالا یا پایین) i_1 چیست؟ (پ) اندازه و (ت) جهت i_2 چیست؟ (ث) آیا باتری ۱ انرژی تولید می‌کند یا جذب؟ و (ج) آهنگ انتقال انرژی آن چقدر است؟ (چ) آیا باتری ۲ انرژی تولید می‌کند یا جذب و (ح) آهنگ انتقال انرژی آن چقدر است؟



شکل ۲۳-۷۵ مسئلهٔ ۸۳

حل: (الف) برای حلقهٔ سمت چپ داریم

$$i_1=\frac{\varepsilon_1}{R}=\frac{12}{4}=3A$$

(ب) جهت i_1 روبه‌پایین است

(پ) قاعده حلقه را برای حلقه وسط می‌نویسیم

$$\varepsilon_2+i_1R-i_2R+\frac{i_2}{2}R-i_2R=0$$

که با قرار دادن مقادیر معلوم، $i_2=1.6A$ به دست می‌آید. **(ت)** جواب مثبت است پس جهت روبه‌پایین انتخابی برای i_2 صحیح است.

(ث) باتری ۱ تولید انرژی می‌کند چون جریان عبوری در باتری روبه‌جلو است.

(ج) با استفاده از قانون انشعاب داریم:

$$i_3=i_1+i_2=3+1.6=4.6A$$

در نتیجه آهنگ انتقال انرژی برابر است با

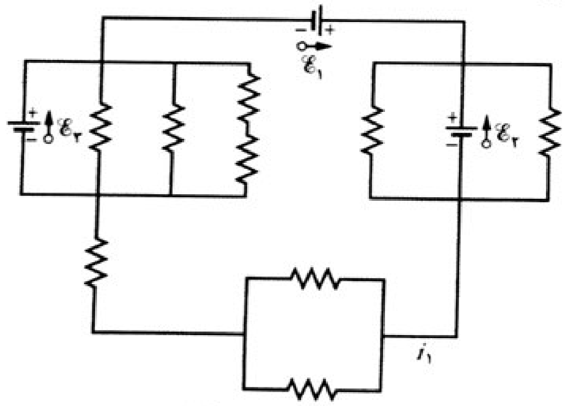
$$P=\varepsilon i=(12)(4.6)=55.2W$$

(چ) چون جریان عبوری در باتری ۲ روبه‌جلو است لذا این توان را تولید می‌کند.

(ح) آهنگ انتقال انرژی برابر است با:

$$P=(4)i_2=6.4W$$

۸۴- در شکل ۲۳-۷۶، emf باتریهای آرمانی $\varepsilon_1=20.0V$ و $\varepsilon_2=10.0V$ و $\varepsilon_3=5.00V$ و اندازه هر یک از مقاومتها 2.00Ω است. (الف) اندازه و (ب) جهت (چپ یا راست) جریان i_1 چیست؟ (پ) آیا باتری ۱ انرژی تولید می‌کند یا جذب، و (ت) توان آن چقدر است؟ (ث) آیا باتری ۲ انرژی تولید می‌کند یا جذب و (ج) توان آن چقدر است؟ (چ) آیا باتری ۳ انرژی تولید می‌کند یا جذب و (ح) توان آن چقدر است؟



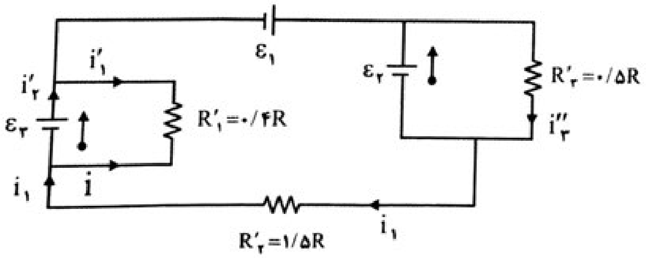
شکل ۲۳-۷۶ مسئلهٔ ۸۴

حل: مدار را به صورت ساده‌تر در می‌آوریم.

$$R'_1=0.4R=0.8\Omega$$

$$R'_2=1.5R=3\Omega$$

$$R'_3=0.5R=1\Omega$$



(الف) با استفاده از قاعده حلقه می‌توان نوشت:

$$\varepsilon_3+\varepsilon_1-\varepsilon_2-i_1R'_2=0$$

$$50+20-10-i_1(3)=0 \qquad \Rightarrow i_1=5A$$

(ب) جهت i_1 به سمت چپ صحیح است.

(پ) چون جریان i_1 از باتری ۱ روبه‌جلو است یعنی وارد قطب منفی آن می‌شود این باتری در حال کار و انرژی دادن به مدار است.

(ت) توان باتری ۱ برابر است با

$$P_1 = \varepsilon i = (۲۰)(۵) = ۱۰۰\,W$$

(ث) جریان i'_2 از R'_2 می‌گذرد

$$\varepsilon_2 = R'_2 i'_2 \Rightarrow ۱۰ = (۱)\, i'_2 \Rightarrow i'_2 = ۱۰\,A$$

جهت این جریان در R'_2 روبه‌پایین است پس جریان i_2 که از باتری ε_2 می‌گذرد روبه‌بالا است و مقدار آن $i_2 = i'_2 - i_1 = ۵A$ است و چون به قطب منفی وارد می‌شود این باتری در حال انرژی دادن است.

(ج) توان باتری ۲ برابر است با

$$P_2 = \varepsilon_2 i_2 = (۱۰)(۵) = ۵۰\,W$$

(چ) جهت جریانی که از R'_1 می‌گذرد i'_1 نامیده می‌شود و روبه‌پایین در نظر می‌گیریم

$$\varepsilon_3 = R'_1 i'_1 \Rightarrow ۵ = ۰/۸\, i'_1 \Rightarrow i'_1 = ۶/۲۵\,A$$

جریان i_3 که از باتری می‌گذرد روبه‌بالا و برابر است با:

$$i_3 = i'_1 + i_1 = ۶/۲۵ + ۵ = ۱۱/۲۵\,A$$

این باتری در حل جذب انرژی از مدار و در حال پر شدن است.

(ح) توان باتری ۳ برابر است با

$$P_3 = \varepsilon_3 i_3 = (۵)(۱۱/۲۵) = ۵۶/۲۵\,W$$

۸۵- یک مقاومت دمایی- پایدار از یک مقاومت ساخته شده از سیلیسیوم و یک مقاومت ساخته شده از آهن تشکیل شده است که به طور متوالی به هم متصل‌اند. اگر در گسترهٔ دمایی وسیعی حول $۲۰^\circ C$ مقاومت کل ۱۰۰۰Ω مورد نیاز باشد، (الف) مقاومت سیلیسیومی و (ب) مقاومت آهنی چقدر است؟ (به جدول ۲۲-۱ نگاه کنید.) **SSM**

حل: (الف) سیلیسیوم نیمه‌هادی است لذا با افزایش دما، مقاومت آن کاهش می‌یابد. سیلیسیوم را با شاخص پایین ۱ و آهن را با شاخص پایین ۲ مشخص می‌کنیم. یادآوری می‌کنیم که مقاومت آهن با افزایش دما، افزایش می‌یابد. دو مقاومت به صورت متوالی بسته شده‌اند، لذا می‌توان نوشت

$$R = R_1(1 - \alpha_1 \Delta T) + R_2(1 + \alpha_2 \Delta T)$$

$$R = R_1 + R_2 + (R_2\alpha_2 - R_1\alpha_1)\Delta T$$

چون می‌خواهیم با تغییر دما، مقاومت ثابت بماند لذا خواهیم داشت

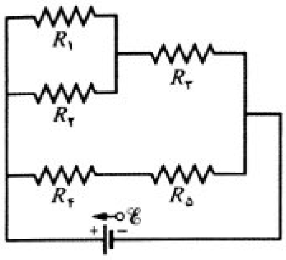
$$R_2\alpha_2 - R_1\alpha_1 = ۰ \Rightarrow R_2 = R_1 \frac{\alpha_1}{\alpha_2}$$

$$R_2 = R_1 \frac{۶/۵\times۱۰^{-۳}}{۷۰\times۱۰^{-۳}} \Rightarrow R_2 = \frac{۶/۵}{۷۰} R_1$$

ضمناً داریم $R_1 + R_2 = ۱۰۰۰$ لذا با حل همزمان این دو معادله داریم:

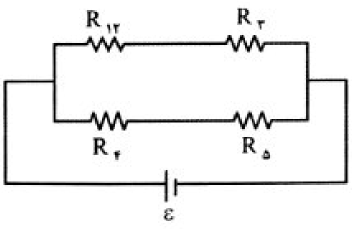
$$R_1 = ۹۱۵\Omega \qquad R_2 = ۸۵\Omega$$

۸۶- در شکل ۲۳-۷۷، یک باتری آرمانی با $\varepsilon = ۱۲/۰\,V$ به شبکهٔ مقاومتهای $R_1 = ۶/۰۰\Omega$، $R_2 = ۱۲/۰\Omega$، $R_3 = ۴/۰۰\Omega$، $R_4 = ۳/۰۰\Omega$ و $R_5 = ۵/۰۰\Omega$ بسته شده است. اختلاف پتانسیل دو سر مقاومت ۵ چقدر است؟



شکل ۲۳-۷۷ مسئلهٔ ۸۶

حل: مدار را ساده می‌کنیم



$$i_5 = \frac{\varepsilon}{R_{45}} = \frac{۱۲}{۳+۵} = ۱/۵\,A$$

$$V_5 = i_5 R_5 = (۱/۵)(۵) = ۷/۵\,V$$

۸۷- در یک مقاومت $۰/۱۰\Omega$ که به یک باتری $۱/۵V$ متصل است، انرژی گرمایی با آهنگ $۱۰\,W$ ظاهر می‌شود، (الف) چه اختلاف پتانسیلی باید در دوسر مقاومت برقرار باشد؟ (ب) مقاومت داخلی باتری باید چقدر باشد؟

حل: (الف)

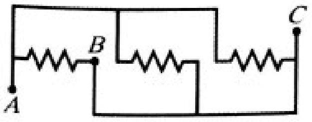
$$P = Ri^2 \Rightarrow ۱۰ = (۰/۱)i^2 \Rightarrow i = ۱۰\,A$$

$$V = Ri = (۰/۱)(۱۰) = ۱V$$

(ب)

$$i = \frac{\varepsilon}{R+r} \Rightarrow ۱۰ = \frac{۱/۵}{۰/۱ + r} \Rightarrow r = ۰/۰۵\Omega$$

۸۸- شکل ۲۳-۷۸ سه مقاومت $۲۰/۰$ اهمی را نشان می‌دهد. مقاومت معادل میان نقطه‌های (الف) A و B، (ب) A و C و (پ) B و C را پیدا کنید. (*راهنمایی:* تصور کنید که به هر زوج نقطهٔ داده شده یک باتری متصل است.)



شکل ۲۳-۷۸ مسئلهٔ ۸۸

حل: (الف) مقاومت معادل بین A و B برابر است با (سه مقاومت موازی داریم)

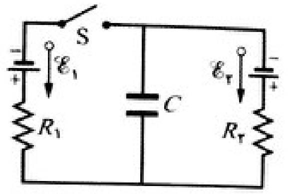
$$R_{eq} = \frac{۲۰}{۳} = ۶/۶۷\Omega$$

(ب) مقاومت معادل بین A و C برابر است با (سه مقاومت موازی داریم)

$$R_{eq} = \frac{۲۰}{۳} = ۶/۶۷\Omega$$

(پ) مقاومت معادل بین B و C صفر است چون B و C با یک سیم رسانا متصل شده‌اند.

۸۹- مدار شکل ۲۳-۷۹ یک خازن، دو باتری آرمانی، دو مقاومت و یک کلید را نشان می‌دهد. در آغاز S به مدت طولانی باز است. اگر سپس این کلید به مدت طولانی بسته شود، تغییر در بار خازن چقدر می‌شود؟ فرض کنید که $C = ۳/۰V$ ، $R_۱ = ۰/۲۰\Omega$ و $R_۲ = ۰/۴۰\Omega$.



شکل ۲۳-۷۹ مسئلهٔ ۸۹

حل: وقتی کلید S به مدت طولانی باز است بار $q_۱$ توسط باتری $\varepsilon_۱$ در خازن انباشته می‌شود

$$q_i = \varepsilon_۲ C = (۳)(۱۰) = ۳۰\mu C$$

وقتی کلید S بسته می‌شود بار خازن پس از رسیدن به حالت تعادل موجب می‌شود که خازن اتصال باز شود در این حالت داریم

$$i = \frac{\varepsilon_۲ - \varepsilon_۱}{R_۱ + R_۲} = \frac{۳-۱}{۰/۲+۰/۴} = ۳/۳۳A$$

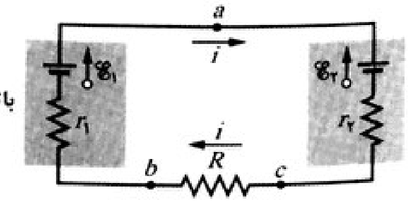
با داشتن i می‌توان اختلاف پتانسیل دو سر باتری را به دست آورد.

$$V = \varepsilon_۲ - iR_۲ = ۳ - (۳/۳۳)(۰/۴) = ۱/۶۷V$$

بار نهایی روی خازن برابر است با $q_f = CV$ لذا تغییر بار روی خازن برابر خواهد بود:

$$\Delta q = q_f - q_i = C(V - \varepsilon_۲) = (۱۰)(۱/۶۷ - ۳) = -۱۳/۳۳\mu C$$

۹۰- در شکل ۲۳-۸ الف، با در نظر گرفتن مسیری که شامل R، $r_۱$ و $\mathscr{E}_۱$ است، اختلاف پتانسیل میان a و c را محاسبه کنید.



حل:

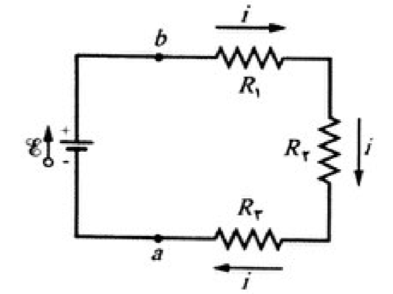
با استفاده از قاعده حلقه ابتدا جریان i را به دست می‌آوریم.

$$-\varepsilon_۲ - r_۲ i - Ri - r_۱ i + \varepsilon_۱ = ۰$$

$$i = \frac{\varepsilon_۱ - \varepsilon_۲}{R + r_۱ + r_۲} = \frac{۴/۴ - ۲/۱}{۵/۵ + ۱/۸ + ۲/۳} = ۰/۲۴A$$

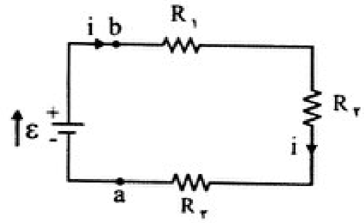
$$V_a - V_c = \varepsilon_۲ + r_۲ i = ۲/۱ + (۲/۳)(۰/۲۴) = ۲/۵۳V$$

۹۱- در شکل ۲۳-۵۷ الف، اگر $\mathscr{E} = ۱۲V$ ، $R_۱ = ۳/۰\Omega$ ، $R_۲ = ۴/۰\Omega$ و $R_۳ = ۵/۰\Omega$ باشد، اختلاف پتانسیل دو سر $R_۲$ را پیدا کنید.



شکل ۲۳-۵۷ مسئلهٔ ۹۱

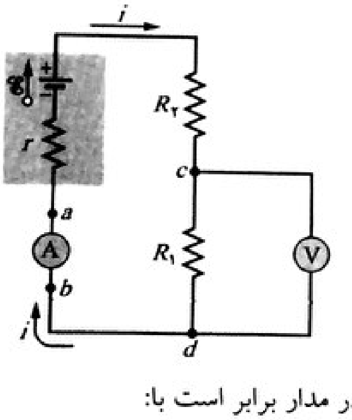
حل:



اختلاف پتانسیل در سر $V_۲$ برابر است با

$$V_۲ = iR_۲ = \frac{\varepsilon}{R_۱ + R_۲ + R_۳} R_۲ = \frac{۱۲}{۳+۴+۵}(۴) = ۴V$$

۹۲- در شکل ۲۳-۱۴، فرض کنید که $\mathscr{E} = ۵/۰V$ ، $r = ۲/۰\Omega$ ، $R_۱ = ۵/۰\Omega$ و $R_۲ = ۴/۰\Omega$ است. اگر مقاومت آمپرسنج R_A برابر $۰/۱۰\Omega$ باشد، در اندازه‌گیری جریان چه درصد خطایی وارد می‌شود؟ فرض کنید که ولت سنج وجود ندارد.



حل: جریان در مدار برابر است با:

$$i = \frac{\varepsilon}{R_۱ + R_۲ + r + r_A} = \frac{۵}{۵+۴+۲+r_A} = \frac{۵}{۱۱+r_A}$$

بدون آمپرسنج جریان برابر $i_1 = \frac{5}{11} = 0/455\,A$ و با آمپرسنج برابر $i_2 = \frac{5}{11/1} = 0/450\,A$ است. لذا درصد خطا چنین است

$$\frac{\Delta i}{i_1} = \frac{0/455 - 0/450}{0/455} = 0/011 \quad \text{یا} \quad \%1/1$$

۹۳- یک خط قدرت ۱۲۰ V با یک فیوز ۱۵A حفاظت می‌شود. بیشینهٔ تعداد لامپ ۵۰۰ واتی که به طور همزمان و به طور موازی در این خط می‌توانند کار کنند بدون آنکه فیوز بر اثر اضافه جریان بسوزد، چقدر است؟

حل: مقاومت مجاز برابر است با $R = \frac{120}{15} = 8\Omega$ و مقاومت هر لامپ از رابطهٔ زیر به دست می‌آید:

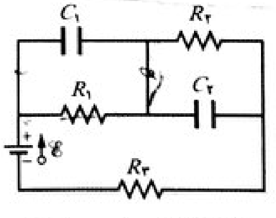
$$P = \frac{V^2}{r} \Rightarrow 500 = \frac{(120)^2}{r} \Rightarrow r = 28/8\Omega$$

لامپها به صورت موازی بسته شده‌اند لذا داریم:

$$R = \frac{r}{N} \Rightarrow 8 = \frac{28/8}{N} \Rightarrow N = 3/6$$

به این ترتیب باید ۳ عدد قرار داد چون ۴ لامپ فیوز را می‌سوزاند.

۹۴- در شکل ۲۳-۸۰، $R_1 = 5/00\,\Omega$، $R_2 = 10/0\,\Omega$، $R_3 = 15/0\,\Omega$، $C_1 = 5/00\,\mu F$، $C_2 = 10/0\,\mu F$ و emf باتری آرمانی $\varepsilon = 20/0\,V$ است. با فرض اینکه مدار در حالت پایا باشد، انرژی کل ذخیره شده در دو خازن چقدر است؟



شکل ۲۳-۸۰ مسئلهٔ ۹۴

حل: در حالت پایا و تعادل جریانی از خازنها عبور نمی‌کند و خازن‌ها اتصال باز هستند. مقاومتها متوالی‌اند و از قاعده حلقه داریم

$$i = \frac{\varepsilon}{R_1 + R_2 + R_3} = \frac{20}{5+10+15} = 0/67A$$

$$V_1 = R_1 i = (5)(0/67) = 3/35V$$

$$U_1 = \frac{1}{2}C_1V_1^2 = \frac{1}{2}(5\times10^{-6})(3/35)^2 = 2/81\times10^{-5}\,J$$

$$V_2 = R_2 i = (10)(0/67) = 6/7V$$

$$U_2 = \frac{1}{2}C_2V_2^2 = \frac{1}{2}(10\times10^{-6})(6/7)^2 = 2/24\times10^{-4}\,J$$

۹۵- خازن C که در ابتدا بدون بار است توسط وسیله‌ای با emf ثابت که به طور متوالی توسط مقاومت R به آن وصل شده است کاملاً باردار می‌شود. (الف) نشان دهید که انرژی ذخیره شدهٔ نهایی در خازن نصف انرژی تولید شده توسط منبع emf است. (ب) با انتگرالگیری مستقیم از i^2R روی زمان باردارشدن نشان دهید که انرژی گرمایی مصرف شده به وسیلهٔ مقاومت نیز نصف انرژی تولید شده توسط منبع emf است. SSM

حل: **(الف)** برای شارژ بار روی خازن داریم

$$q = \varepsilon C e^{-t/RC}$$

انرژی ذخیره شده در خازن برابر است با

$$U_C = \frac{1}{2}\frac{q_0^2}{C} = \frac{\varepsilon^2C^2}{2C} = \frac{1}{2}C\varepsilon^2$$

انرژی‌ای که emf در dt تولید می‌کند برابر است با:

$$dU_{emf} = Pdt = \varepsilon i\,dt = \varepsilon\left(\frac{dq}{dt}\right)dt = \varepsilon\left[\frac{\varepsilon C}{RC}\right]e^{-t/RC}dt$$

$$U_{emf} = \frac{\varepsilon^2}{R}\int_0^\infty e^{-t/RC}dt = \frac{\varepsilon^2}{R}RC = C\varepsilon^2 = 2U_C$$

(ب)

$$dU_R = Pdt = Ri^2dt = R\left(\frac{\varepsilon^2}{R^2}e^{-2t/RC}\right)dt$$

$$U_R = \frac{\varepsilon^2}{R}\int_0^\infty e^{-2t/RC}dt = \frac{\varepsilon^2}{R}\frac{RC}{2} = \frac{1}{2}C\varepsilon^2$$

۹۶- دو مقاومت R_1 و R_2 می‌توانند به طور متوالی یا به طور موازی به باتری با emf برابر با ε وصل شوند. می‌خواهیم آهنگ مصرف انرژی ترکیب موازی پنج برابر مقدار آن در ترکیب متوالی باشد. اگر $R_1 = 100\,\Omega$ باشد، (الف) کمترین و (ب) بیشترین دو مقدار R_2 باید چقدر باشد تا این آهنگ مصرف حاصل شود؟

حل: وقتی اتصال دو مقاومت R_1 و R_2 متوالی باشند آهنگ اتلاف انرژی برابر است با $P_S = \frac{\varepsilon^2}{R_{eq}} = \frac{\varepsilon^2}{R_1+R_2}$ و وقتی اتصال موازی است داریم $P_P = \frac{\varepsilon^2(R_1+R_2)}{R_1R_2}$. با توجه به صورت مسئله داریم $P_P = 5P_S$، لذا خواهیم داشت:

$$\frac{\varepsilon^2(R_1+R_2)}{R_1R_2} = 5\frac{\varepsilon^2}{R_1+R_2} \Rightarrow (R_1+R_2)^2 = 5R_1R_2$$

با توجه به اینکه $R_1 = 100\Omega$ است لذا خواهیم داشت

$$\Rightarrow R_2^2 - 300R_2 + 10^4 = 0$$

که با حل این معادله درجه دوم خواهیم داشت:

(الف) کمترین مقدار R_2 برابر است با $38/2\Omega$.

(ب) بیشترین مقدار R_2 برابر است با $261/8\Omega$.

۹۷- در شکل ۲۳-۶۶، emf باتری آرمانی $\varepsilon = 30\,V$، مقاومتها $R_1 = 20\,k\Omega$ و $R_2 = 10\,k\Omega$ و خازن بدون بار است. وقتی در لحظهٔ $t = 0$ کلید بسته شود، جریان در (الف) مقاومت ۱ و (ب) مقاومت ۲ چقدر است؟ (پ) پس از زمان طولانی جریان در مقاومت ۲ چقدر است؟ SSM

حل: **(الف)** درست پس از بسته شدن کلید خازن به صورت اتصال کوتاه عمل می‌کند و اختلاف پتانسیل دو سر R_2 برابر صفر است، لذا داریم:

$$i_{01} = \frac{\varepsilon}{R_1} = \frac{30}{20\times10^3} = 1/5\times10^{-3}\,A$$

(ب) $i_2 = 0$ است.

(پ) پس از گذشت زمان طولانی خازن به صورت اتصال باز عمل می‌کند و داریم:

$$i_1 = i_2 = \frac{\varepsilon}{R_1 + R_2} = \frac{30}{(20+10)\times 10^{3}} = 1\times 10^{-3}\ \text{A}$$

۹۸- در شکل ۲۳-۴۳، $R_1 = ۱۰/۰\ \Omega$ ، $R_2 = ۲۰/۰\ \Omega$ و emf باتریهای آرمانی $\varepsilon_1 = ۲۰/۰$ V و $\varepsilon_2 = ۵۰/۰$ V است. به ازای چه مقدار از R_3 هیچ جریانی از باتری ۱ نمی‌گذرد؟

حل: با استفاده از قاعده انشعاب $i_1 = i_2 + i_3$ و از قاعده حلقه داریم

$$20 - i_1 R_1 - i_2 R_2 = 0$$

$$20 - i_1 R_1 - i_3 R_3 = 0$$

چون جریانی از باتری نمی‌گذرد لذا $i_1 = 0$ و در نتیجه $i_2 = i_3$ است. با حل همزمان دو معادله فوق به ازای $R_1 = 10\Omega$ و $R_2 = 20\Omega$ به رابطهٔ زیر می‌رسیم:

$$i_1 = \frac{40 - 3R_3}{20 + 3R_3}$$

که چون $i_1 = 0$ باید صفر باشد، خواهیم داشت:

$$R_3 = \frac{40}{3} = ۱۳/۳\,\Omega$$

۹۹- در شکل ۲۳-۴۶، $R_1 = R_2 = ۱۰/۰\ \Omega$ و emf باتری آرمانی $\varepsilon = ۱۲/۰$ V است. (الف) چه مقداری از R_3 آهنگ تولید انرژی در باتری را بیشینه می‌کند و (ب) این آهنگ بیشینه چقدر است؟ SSM

حل:

$$R_{eq} = R_1 + \frac{R_2 R_3}{R_2 R_3} = \frac{20 R_3 + 100}{R_3 + 10}$$

$$P = \frac{V^2}{R_{eq}} = \frac{V^2 (R_3 + 10)}{20 R_3 + 100} = \frac{144(R_3 + 10)}{20(R_3 + 5)}$$

برای اینکه P بیشینه باشد:

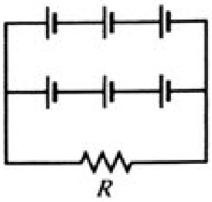
$$\frac{dP}{dR_3} = 0 \Rightarrow \frac{dP}{dR_3} = -\frac{36}{(R_3 + 5)^2}$$

(الف) چون شیب منفی به دست آمده نتیجه می‌گیریم که تابع همواره نزولی است. پس هرچه R_3 بیشتر باشد P کمتر است و برعکس هرچه R۳ کمتر باشد P بیشتر است. لذا به ازای $R_3 = 0$ ، P بیشترین مقدار را دارد.

(ب) P به ازای $R_3 = 0$ برابر است با

$$P = \frac{144(0+10)}{20(0+5)} = ۱۴/۴\ \text{W}$$

۱۰۰- emf هر یک از شش باتری واقعی شکل ۲۳-۸۱ برابر با ۲۰V و مقاومت آن ۴/۰Ω است. (الف) چه جریانی از مقاومت (خارجی) $R = ۴/۰\,\Omega$ می‌گذرد؟ (ب) اختلاف پتانسیل دو سر هر باتری چقدر است؟ (پ) توان هر باتری چقدر است؟ (ت) با چه آهنگی هر باتری انرژی را به انرژی گرمایی درونی تبدیل می‌کند؟ GO



شکل ۲۳-۸۱ مسئلهٔ ۱۰۰

حل: (الف) با توجه به تقارن مدار، جریان در هر شاخهٔ شامل باتریها یکسان‌اند و اگر آن را i_b بنامیم جریانی که از مقاومت R می‌گذرد برابر $i = 2i_b$ است. برای حلقهٔ پایینی داریم:

$$-3ri_b + 3\varepsilon - Ri = 0$$

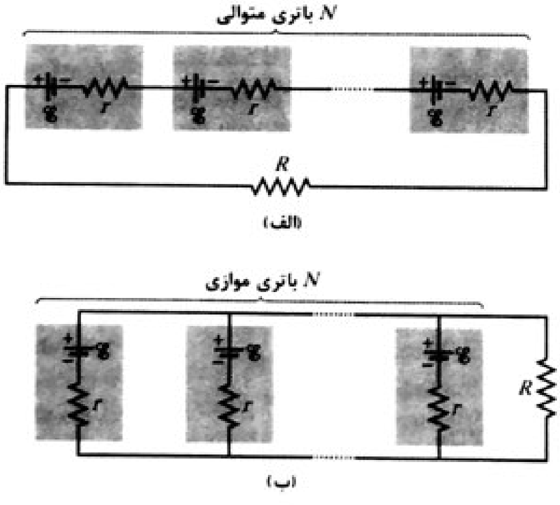
$$-3(4)\left(\frac{i}{2}\right) - 3(20) - 4i = 0 \qquad i = 6$$

$$i = 6\text{A} \quad \Rightarrow \quad i_b = 3\text{A}$$

(ب) $V = \varepsilon - i_b r = 20 - (3)(4) = 8\text{V}$

(پ) $P = \varepsilon i_b = (20)(3) = 60\text{W}$

۱۰۱- فرض کنید دسته‌ای شامل N باتری مشابه با emf برابر با $\mathscr{E}$ و مقاومت درونی r، همه به طور متوالی (شکل ۲۳-۸۲ الف) یا همه به طور موازی (شکل ۲۳-۸۲ ب) بسته شده و به دو سر مقاومت R متصل‌اند. نشان دهید که اگر $R = r$ باشد هر دو آرایش در R جریان یکسانی به دست می‌دهند.



شکل ۲۳-۸۲ مسئلهٔ ۱۰۱

حل: قاعده حلقه برای حالت متوالی رابطهٔ زیر است:

$$N\varepsilon - Nri - Ri = 0 \quad \Rightarrow \quad i = \frac{N\varepsilon}{Nr + R}$$

برای حالت موازی با استفاده از قاعدهٔ حلقه داریم:

$$\varepsilon - r\frac{i}{N} - Ri = 0 \quad \Rightarrow \quad i = \frac{N\varepsilon}{r + NR}$$

حل از مقایسه این دو نتیجه مشاهده می‌کنیم که به ازای $r = R$ آنها برابر می‌شوند.

۱۰۲- جدول اختلاف پتانسیل الکتریکی V_T دو سر پایانه‌های یک باتری را برحسب تابعی از جریان i که از باتری کشیده می‌شود نشان می‌دهد. (الف) معادله‌ای بنویسید که رابطهٔ میان

V_T و i را نشان دهد. داده‌ها را به ماشین حساب خود وارد کنید و برازش برگشتی خطی از V_T را برحسب i به دست آورید. از پارامترهای برازش (ب) emf باتری و (پ) مقاومت درونی آن را به دست آورید.

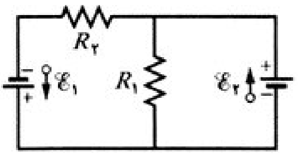
$i(A)$	۵۰/۰	۷۵/۰	۱۰۰	۱۲۵	۱۵۰	۱۷۵	۲۰۰
$V_T(V)$	۱۰/۷	۹/۰۰	۷/۷۰	۶/۰۰	۴/۸۰	۳/۰۰	۱/۷۰

حل: (الف) اختلاف پتانسیل دو سر پایانه‌های باتری $V_T = \varepsilon - ir$ می‌شود.

(ب) با روشهای کامپیوتری آزمون خطا می‌توان V_T را به دست آورد. V_T بر حسب i به صورت $V_T = ۱۳/۶۲ - ۰/۰۵۹۹i$ به دست می‌آید که از آنجا $\varepsilon = ۱۳/۶۱V$ به دست می‌آید.

(پ) از رابطه V_T دیده می‌شود که $r = ۰/۰۶۰\Omega$ است.

۱۰۳- درشکل ۲۳-۸۳، $\varepsilon_1 = ۶/۰۰V$، $\varepsilon_2 = ۱۲/۰V$، $R_1 = ۲۰۰\Omega$ و $R_2 = ۱۰۰\Omega$. (الف) اندازه و (ب) جهت (بالا یا پایین) جریان در مقاومت ۱، (پ) اندازه و (ت) جهت جریان در مقاومت ۲ و (ث) اندازه و (ج) جهت جریان در باتری ۲ چیست؟



شکل ۲۳-۸۳ مسئلهٔ ۱۰۳

حل: (الف) برای حلقه سمت راست جریان را پادساعتگرد در نظر می‌گیریم جریان عبوری از R_1 را i_1 می‌نامیم که روبه‌پایین می‌شود. با استفاده از قاعده حلقه برای این حلقه داریم

$$\varepsilon_2 - i_1R_1 = ۰ \Rightarrow ۱۲ - i_1(۲۰۰) = ۰ \Rightarrow i_1 = ۰/۰۶A$$

(ب) جواب مثبت است لذا جهت انتخابی ما صحیح بوده و روبه‌پایین است.

(پ) جریان را در حلقه سمت چپ پادساعتگرد درنظر می‌گیریم. جریان در R_2 را i_2 نامیده که جهت آن به سمت چپ است. با استفاده از قاعده حلقه داریم:

$$\varepsilon_1 + i_1R_1 - i_2R_2 = ۰$$

$$۶ + (۰/۰۶)(۲۰۰) - i_2(۱۰۰) = ۰ \Rightarrow i_2 = ۰/۱۸A$$

(ت) چون i_2 مثبت است لذا جهت سمت چپ برای آن صحیح است.

(ث) و (ج) از قاعده انشعاب می‌توان جریان عبوری از باتری را به دست آورد که برابر $۰/۱۸ + ۰/۰۶ = ۰/۲۴$ است و جهت آن نیز به سمت بالا است.

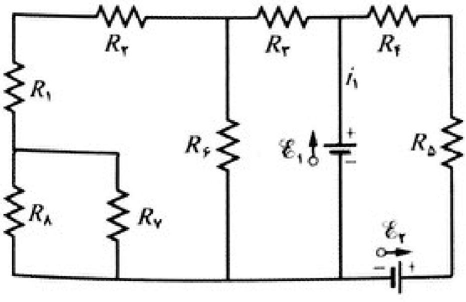
۱۰۴- یک لامپ ۱۲۰ ولتی سه راهی که دو رشته دارد در ۱۰۰، ۲۰۰ و ۳۰۰ وات کار می‌کند. یک رشته می‌سوزد. پس از این لامپ با همان شدت (مصرف انرژی با همان آهنگ) در وضعیت کلید پایینی مانند وضعیت کلید بالا کار می‌کند ولی در وضعیت وسط کار نمی‌کند. (الف) وضعیت دو رشته نسبت به کلید سه وضعیتی چگونه است؟ مقدار مقاومت‌های رشتهٔ (ب) کوچکتر و (پ) بزرگتر چقدر است؟

حل: (الف) داریم $P = \dfrac{\varepsilon^2}{R_{eq}}$ لذا می‌توان چنین بحث کرد که بیشترین توان مربوط به کمترین مقدار R_{eq} است. در نتیجه وضعیت اتصال به مقاومت بزرگتر R_1 به کمترین توان، وضعیت اتصال به مقاومت کوچکتر R_2 به توان میانی و وضعیت اتصال به هر دو مقاومت به طور موازی، به بیشترین توان دست می‌یابیم.

(ب) و (پ)
$$\begin{cases} R_{eq} = \dfrac{R_1R_2}{R_1 + R_2} \\ R_{eq} = R_1 = \dfrac{\varepsilon^2}{P} = \dfrac{(۱۲۰)^2}{۱۰۰} = ۱۴۴\Omega \end{cases}$$

که از حل همزمان این دو معادله $R_1 = ۱۴۴\Omega$ و $R_2 = ۷۲\Omega$.

۱۰۵- در شکل ۲۳-۸۴، $R_1 = R_2 = ۲/۰\Omega$، $R_3 = ۴/۰\Omega$، $R_4 = ۳/۰\Omega$، $R_5 = ۱/۰\Omega$ و $R_6 = R_7 = R_8 = ۸/۰\Omega$ و emf باتریهای آرمانی $\varepsilon_1 = ۱۶V$ و $\varepsilon_2 = ۸/۰V$ است. (الف) اندازه و (ب) جهت (بالا یا پایین) جریان i_1 و (پ) اندازه و (ت) جهت جریان i_2 چیست؟ آهنگ انتقال انرژی در (ث) باتری ۱ و (ج) باتری ۲ چقدر است؟ آیا در (چ) باتری ۱ و (ح) در باتری ۲، انرژی تولید می‌شود یا جذب؟



شکل ۲۳-۸۴ مسئلهٔ ۱۰۵

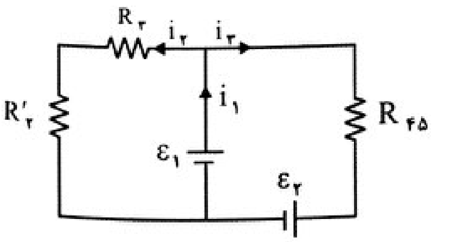
حل: ابتدا مقاومت معادل را طی مراحل زیر به دست می‌آوریم.

$$R_{78} = \frac{R_7R_8}{R_7 + R_8} = ۴\Omega$$

$$R_{12} = R_1 + R_2 = ۴\Omega \qquad R'_1 = R_{12} + R_{78} = ۴ + ۴ = ۸\Omega$$

$$R'_2 = \frac{R_6R'_1}{R_6 + R'_1} = \frac{(۸)(۸)}{۸ + ۸} = ۴\Omega \quad R_{45} = R_4 + R_5 = ۳ + ۱ = ۴\Omega$$

حال مدار ساده شده را رسم می‌کنیم



(الف) با استفاده از قاعده حلقه می‌توان نوشت:

$$\varepsilon_1 - i_2 R_{25} - \varepsilon_2 = 0 \Rightarrow 16 - 4i_2 - 8 = 0 \Rightarrow i_2 = 2\text{A}$$

$$\varepsilon_1 - i'_2 R_2 - i'_2 R'_2 = 0 \Rightarrow 16 - i'_2(4+4) = 0 \Rightarrow i_2 = 2\text{A}$$

و از قاعده انشعاب خواهیم داشت:

$$i_1 - i_2 - i_3 = 0$$

$$i_1 - 2 - 2 = 0 \quad \Rightarrow \quad i_1 = 4\text{A}$$

(ب) جواب i_1 مثبت است، لذا جهت آن به سمت بالا است.

(پ) ابتدا مقاومت معادل سمت چپ را به دست می‌آوریم. آن را R می‌نامیم.

$$R = R'_2 + R_3 = 4 + 4 = 8\Omega$$

لذا جریان عبوری از آن برابر است با:

$$i_R = \frac{\varepsilon_1}{R} = \frac{16}{8} = 2\text{A}$$

حال می‌توان جریان i_4 را از تقسیم پی‌درپی i_R در سایر مقاومتها به دست آورد. جریان عبوری از R_3 همان i_R است ولی این جریان پس از آنکه به دو شاخه انشعاب می‌یابد یکی از مقاومت $R_6(8\Omega)$ می‌گذرد و دیگری از مقاومت معادل R_4، R_5، R_7 و $R_8(8\Omega)$ می‌گذرد پس i_R به طور مساوی بین این دو شاخه تقسیم می‌شود و از هر شاخه $iR/2$ می‌گذرد. در اینجا R_4، R_5 و مقاومت معادل R_7 و R_8 اتصال متوالی دارند و چون $R_7 = R_8$ لذا جریان $iR/2$ مجدد به طور مساوی بین R_7 و R_8 تقسیم می‌شود در نتیجه جریان i_4 که از مقاومت R_8 می‌گذرد خواهد بود

$$i_4 = \frac{1}{2}\left(\frac{i_R}{2}\right) = 0.5\text{A}$$

(ت) جهت i_4 به سمت پایین است.

(ث) توان باتری ۱ برابر است با

$$P_1 = \varepsilon_1 i_1 = (16)(4) = 64\text{ W}$$

(ج) انرژی باتری ۱ تولید و به مدار داده می‌شود.

(چ) انرژی توسط باتری ۲ جذب می‌شود.

۱۰۶- در شکل ۲۳-۴۶، $\varepsilon = 6.00\text{V}$، $R_1 = 100\Omega$، $R_2 = 300\Omega$ و $R_3 = 600\Omega$ است. (الف) مقاومت معادل سه مقاومت. (ب) پتانسیل الکتریکی دو سر مقاومت ۱ و (پ) جریان در مقاومت ۳ چقدر است؟

حل: (الف) R_2 و R_3 موازی . مقاومت معادل آنها با R_1 اتصال متوالی دارد. لذا داریم:

$$R_{eq} = R_1 + \frac{R_2 R_3}{R_2 + R_3} = 100 + \frac{(300)(600)}{300 + 600} = 300\Omega$$

(ب) جریان عبوری از مدار معادل i با جریان عبوری از R_1 یکسان است. یعنی داریم:

$$i_1 = i = \frac{\varepsilon}{R_{eq}} = \frac{6}{300} = 0.02\text{A}$$

در نتیجه می‌توان اختلاف پتانسیل دو سر R_1 را به دست آورد.

$$V_1 = i_1 R_1 = (0.02)(100) = 2\text{V}$$

(پ) از قاعده حلقه داریم

$$\varepsilon - V_1 - i_3 R_3 = 0 \Rightarrow 6 - 2 - i_3(600) \Rightarrow i_3 = 6.67 \times 10^{-3}\text{ A}$$

۱۰۷- در شکل ۲۳-۴۶، emf باتری آرمانی $\varepsilon = 12.0\text{ V}$ و مقدار هر مقاومت 4.00Ω است. (الف) جریان در مقاومت ۳ و (ب) آهنگ تولید انرژی چقدر است؟

حل: ابتدا مقاومت معادل مدار را به دست می‌آوریم

$$R_{eq} = R_1 + R_{23} = R_1 + \frac{R_2 R_3}{R_2 + R_3} = 6\Omega$$

$$i = \frac{\varepsilon}{R_{eq}} = \frac{12}{6} = 2\text{A}$$

بنا به تقارن $i_3 = 1\text{A}$ می‌شود. این‌را می‌توان به صورت زیر نیز به دست آورد.

$$V_{23} = R_{23} i = (2)(2) = 4\text{V}$$

$$i_3 = \frac{V_{23}}{R_3} = \frac{4}{4} = 1\text{A}$$

۱۰۸- خازنی با ظرفیت C_0 پس از اینکه به باتری با emf برابر با ε_0 به مدت طولانی بسته شد، در لحظهٔ $t = 0$ از طریق مقاومت 200000Ω تخلیه می‌شود. سپس اختلاف پتانسیل دو سر خازن برحسب تابعی از زمان در یک بازهٔ زمانی کوتاه اندازه‌گیری می‌شود؛ نتایج آن در زیر آمده است. (الف) معادله‌ای بنویسید که اختلاف پتانسیل دو سر خازن را برحسب زمان توصیف کند. داده‌ها را وارد ماشین حساب خود کنید و یک برازش برگشتی خطی از $\ln V_C$ برحسب t انجام دهید. از پارامترهای برازش، (ب) emf باتری یعنی ε_0 و (ب) ثابت زمانی τ را برای این مدار تعیین کنید. (ت) سرانجام مقدار C_0 را تعیین کنید.

V_C(V)	۹/۹	۷/۲	۵/۷	۴/۴	۳/۴	۲/۷	۲/۰
t(s)	۰/۲۰	۰/۴۰	۰/۶۰	۰/۸۰	۱/۰	۱/۲	۱/۴

حل: (الف) معادله تخلیه خازن برابر است با:

$$q = q_0 e^{-t/RC} = q_0 e^{-t/\tau}$$

از تقسیم کردن معادله فوق بر ظرفیت معادله اختلاف پتانسیل به دست می‌آید $V_C = \frac{q_0}{C} e^{-t/\tau}$ یا $V_C = \varepsilon_0 e^{-t/\tau}$. از طرفین رابطه لگاریتم طبیعی می‌گیریم.

$$LnV_C = -\frac{1}{\varepsilon_0} t + Ln\varepsilon_0$$

رابطه را به صورت $y = ax + b$ می‌نویسیم که $y \to LnV_C$ و $a \to \frac{۱}{\tau}$ و $b \to Ln\varepsilon_۰$ که با دادن مقادیر به دستگاه می‌توان ثابتها را به دست آورد.

(ب) با توجه به قسمت (الف) $LnV_C = -۱/۲۹۹۴t + ۲/۴۸۴۹$ لذا:

$$b = Ln\varepsilon_۰ \Rightarrow ۲/۴۸۴۹ = Ln\varepsilon_۰ \Rightarrow \varepsilon_۰ = ۱۲V$$

(پ) $a = \frac{۱}{\tau} \Rightarrow ۱/۲۹۹۴ = \frac{۱}{\tau} \Rightarrow \tau = ۰/۷۷s$

(ت) $\tau = RC \Rightarrow ۰/۷۷ = ۲\times۱۰^۵ C \Rightarrow C = ۳/۸\times۱۰^{-۶} F$

۱۰۹- توسط یک منبع با emf برابر با E به یک خط انتقالی با مقاومت R توان داده می‌شود. نسبت توان مصرف شده در خط با $\varepsilon = ۱۱۰۰۰۰ V$ به توان مصرف شده به ازای $\varepsilon = ۱۱۰ V$ را با فرض اینکه توان داده شده در دو حالت یکسان است پیدا کنید.

حل: نسبت توان مصرف شده از مقاومت R در دو حالت برابر است با

$$\frac{P_۱}{P_۲} = \frac{Ri_۱^۲}{Ri_۲^۲} = \left(\frac{\varepsilon_۱}{R+r}\right)^۲\left(\frac{R+r}{\varepsilon_۲}\right)^۲ = \left(\frac{\varepsilon_۱}{\varepsilon_۲}\right)^۲$$
$$= \left(\frac{۱۱۰۰۰۰}{۱۱۰}\right)^۲ = ۱\times۱۰^۶$$

۱۱۰- یک باتری با emf برابر با $\varepsilon = ۲/۰۰V$ و مقاومت درونی $r = ۰/۵۰۰\Omega$ موتوری را به حرکت درمی‌آورد. این موتور یک وزنهٔ ۲/۰۰ نیوتونی را با تندی ثابت $v = ۰/۵۰۰ m/s$ بلند می‌کند. دو ترکیب در جریان i مدار باتری - موتور و اختلاف پتانسیل V در دو سر پایانه‌های موتور این کار را امکان‌پذیر می‌کند. از میان دو پاسخ ممکن، (الف) i بزرگتر و (ب) V متناظر و (پ) i کوچکتر و (ت) V متناظر، چقدرند؟

حل: توان موتور برابر است با:

$$P = \frac{dW}{dt} = \frac{d}{dt}(mgy) = mg\frac{dy}{dt} = (mg)\upsilon$$
$$= (۲)(۰/۵) = ۱W$$

باتری علاوه بر اتلاف داخلی باید توان لازم برای بالا آوردن وزنه را نیز تامین کنید. اگر توان باتری P_b بنامیم خواهیم داشت:

$$P_b = ri^۲ + Ri^۲$$

که R مقاومت درونی موتور و r مقاومت درونی باتری است. اگر ولتاژ دو سر موتور را V در نظر بگیریم، داریم $\varepsilon = ri + Ri$ و همچنین $V_i = Ri^۲ = P$ که در i ضرب کنیم $\varepsilon i = ri^۲ + Ri^۲$ که $P_b = \varepsilon i$ است، لذا می‌توان نوشت:

$$\varepsilon i = ri^۲ + P \Rightarrow ۲i = ۰/۵i^۲ + ۱$$

که از حل این معادله درجه ۲ خواهیم داشت $i_۱ = ۳/۴۱A$ و $i_۲ = ۰/۵۹A$.

(الف) جریان بیشتر برابر است با ۳/۱۴A.

(ب) از $V = \varepsilon - ir$ با قرار دادن $i = ۳/۴۱$ داریم

$$V = ۲-(۳/۱۴)(۰/۵) = ۰/۲۹۳V$$

(پ) جریان کمتر برابر است با ۰/۵۹A.

(ت) مقدار V مربوط به آن برابر است با

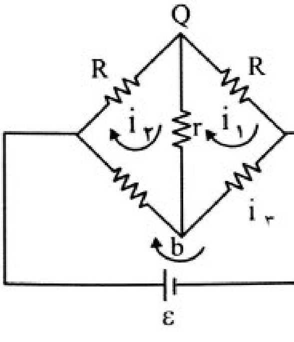
$$V = \varepsilon - ir = ۲-(۰/۵۹)(۰/۵) = ۱/۷۱V$$

۱۱۱- (الف) اگر نقطه‌های a و b در شکل ۲۳-۶۱ با سیمی با مقاومت r به هم وصل شوند، نشان دهید که جریان در مدار عبارت است از

$$i = \frac{\varepsilon(R_s + R_x)}{(R+۲r)(R_s+R_x)+۲R_sR_x}$$

که در آن E برابر با emf باتری آرمانی و $R = R_۱ = R_۲$ است. فرض کنید که $R_۰$ برابر با صفر است. (ب) آیا این فرمول با نتیجهٔ مسئله ۵۵ سازگار است؟

حل: **(الف)** سه جریان $i_۱$، $i_۲$ و $i_۳$ را در نظر می‌گیریم. جریانی که از سیم یا شاخه وسط می‌گذرد $i = i_۱ + i_۲$ است. با استفاده از قاعده حلقه می‌توان برای حلقه سمت چپ، راست و حلقه پایین به ترتیب نوشت:



$$(R+r+R_s)i - ri_۲ - R_si_۳ = ۰$$
$$ri_۱ - (R+r+R_x)i_۲ + R_xi_۳ = ۰$$
$$R_si_۱ + R_xi_۲ - (R_s+R_x)i_۳ = -\varepsilon$$

این روابط را می‌توان مانند یک دستگاه حل کرد. دترمینان ضرایب برابر است با:

$$\Delta = \begin{vmatrix} (R+r+R_s) & -r & -R_s \\ r & -(R+r+R_x) & R_x \\ R_s & R_x & -(R_s+R_x) \end{vmatrix}$$

$$\begin{vmatrix} (R+r+R_s) & -r & -R_s \\ r & -(R+r+R_x) & R_x \\ R_s & R_x & -(R_s+R_x) \end{vmatrix}$$
$$\begin{bmatrix} i_۱ \\ i_۲ \\ i_۳ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ۰ \\ ۰ \\ -\varepsilon \end{bmatrix}$$

$$i_1=\frac{1}{\Delta}\begin{vmatrix}0 & -r & -R_s\\ 0 & -(R+r+R_x) & R_x\\ -\varepsilon & R_x & -(R_s+R_x)\end{vmatrix}$$

$$i_2=\frac{1}{\Delta}\begin{vmatrix}(R+r+R_s) & 0 & -R_s\\ r & 0 & R_x\\ R_s & -\varepsilon & -(R_s+R_x)\end{vmatrix}$$

جریانی که از شاخه وسط می‌گذرد $i=i_1+i_2$.

$$i=\frac{1}{\Delta}\begin{vmatrix}(R+r+R_s) & -r & -2R_s\\ r & -(R+r+R_s) & 2R_x\\ R_s-\varepsilon & -\varepsilon+R_x & -2(R_s+R_x)\end{vmatrix}$$

با حل این دترمینان خواهیم داشت:

$$i=\frac{\varepsilon(R_s-R_x)}{(R+2r)(R_s+R_x)+2R_sR_x}$$

(ب) در حالت خاص برای $i=0$ داریم $R_s=R_x$ و این مجموعه را که پل وتستون می‌نامند، در حالت تعادل خواهد بود. این فرمول با نتیجه مسئله ۵۵ سازگار است. جریانی از شاخه وسط نمی‌گذرد و می‌توان این شاخه را حذف کرد.

07715

۲۴ میدان‌های مغناطیسی

دانشگاه فردوسی مشهد
کتابخانهٔ دانشکدهٔ مهندسی
تاریخ ورود کتاب ۱۳۹۰/۲۸/۳۵
شماره ثبت ۵۱۲۴۵

بخش ۲۴-۳ تعریف $\vec{B}$

۱۰- الکترونی با سرعت
$$\vec{v} = (2.0\times10^{6}\ m/s)\hat{i} + (3.0\times10^{6}\ m/s)\hat{j}$$
در میدان مغناطیسی یکنواخت $\vec{B} = (0.030\ T)\hat{i} + (0.15\ T)\hat{j}$ حرکت می‌کند. (الف) نیروی وارد بر الکترون را پیدا کنید. (ب) محاسبه را برای پروتونی با همین سرعت تکرار کنید.

حل: (الف)
$$\vec{F} = q\vec{v}\times\vec{B} = -(1.6\times10^{-19})\begin{vmatrix}\hat{i} & \hat{j} & \hat{k}\\ 2\times10^{6} & 3\times10^{6} & 0\\ 0.03 & -0.15 & 0\end{vmatrix}$$
$$= -(1.6\times10^{-19})[(-0.3\times10^{6} - 0.09\times10^{6})]\hat{k}$$
$$= 6.24\times10^{-14}\ \hat{k}\ N$$

(ب) وقتی به جای الکترون پروتون داشته باشیم مقدار نیرو تغییر نمی‌کند ولی جهت آن عوض می‌شود.
$$\vec{F} = -6.24\times10^{-14}\ \hat{k}\ N$$

۲۰- یک ذرهٔ آلفا با سرعت $\vec{v}$ با بزرگی $550 m/s$ در میدان مغناطیسی یکنواخت $\vec{B}$ به بزرگی $0.045 T$ حرکت می‌کند (بار ذره آلفا $+3.2\times10^{-19} C$ و جرم آن $6.6\times10^{-27} kg$ است.) زاویهٔ میان $\vec{v}$ و $\vec{B}$ برابر با 52° است. بزرگی (الف) نیروی $\vec{F}_B$ وارد بر ذره ناشی از میدان و (ب) شتاب ذره ناشی از $\vec{F}_B$ چقدر است؟ (پ) آیا تندی ذره افزایش می‌یابد یا کاهش یا ثابت می‌ماند؟

حل: (الف)
$$F = qvB\sin\theta$$
$$= (3.2\times10^{-19})(550)(0.045)(\sin 52^\circ)$$
$$= 6.24\times10^{-18}\ N$$

(ب) از قانون دوم نیوتون داریم
$$F = ma \Rightarrow 6.24\times10^{-18} = (6.6\times10^{-27})a$$
$$\Rightarrow a = 9.46\times10^{8}\ m/s$$

(پ) چون نیرو بر سرعت عمود است لذا کاری روی ذره انجام نمی‌دهد و تندی ذره بدون تغییر می‌ماند. شتاب جانب مرکز است فقط صرف تغییر جهت سرعت می‌شود و مقدار آن را تغییر نمی‌دهد.

۳۰- پروتونی با زاویهٔ 23.0° نسبت به جهت یک میدان مغناطیسی باشدت $2.60 mT$ حرکت می‌کند و نیروی مغناطیسی $6.50\times10^{-17}N$ بر آن وارد می‌شود. (الف) تندی پروتون و (ب) انرژی جنبشی آن را برحسب الکترون ولت، محاسبه کنید. SSM ILW

حل: (الف)
$$F = qvB\sin\theta \Rightarrow v = \frac{F}{qB\sin\theta}$$
$$v = \frac{6.5\times10^{-17}}{(1.6\times10^{-19})(2.6\times10^{-3})(\sin 23^\circ)} = 4\times10^{5}\ m/s$$

(ب)
$$K = \frac{1}{2}mv^2 = \frac{1}{2}(1.67\times10^{-27})(4\times10^{5})^2 = 1.34\times10^{-16}\ J$$
$$= (1.34\times10^{-16})(1.6\times10^{-19}) = 835\ eV$$

●۴- ذره‌ای به جرم $10 g$ و بار $80 \mu C$ در میدان مغناطیسی یکنواخت در ناحیه‌ای که شتاب سقوط آزاد $-9.8\hat{j} m/s^2$ است حرکت می‌کند. سرعت ذره مقدار ثابت $20\hat{i} km/s$ است که بر میدان مغناطیسی عمود است. میدان مغناطیسی چگونه است؟

حل: نیروی وزن نیروی مغناطیسی را خنثی کرده است، لذا داریم:
$$\vec{F}_g = \vec{F}_B \Rightarrow mg\hat{j} = q\vec{v}\times\vec{B}$$
$$(10\times10^{-3})(9.8)\hat{j} = (8\times10^{-6})[(20\times10^{3}\hat{i}) \times(B_x\hat{i} + B_y\hat{j} + B_z\hat{k})]$$
از مساوی قرار دادن مؤلفه‌های متناظر خواهیم داشت:
$$\vec{B} = -6.1\times10^{-2}\ \hat{k}\ N$$
لذا
$$B_x = 0 \quad B_y = 0 \quad B_z = -6.1\times10^{-2}$$

●●۵- الکترونی در میدان مغناطیسی یکنواختی حرکت می‌کند که با $\vec{B} = B_x\hat{i} + (3.0B_x)\hat{j}$ داده شده است. در یک لحظهٔ معین سرعت الکترون $\vec{v} = (2.0\hat{i} + 4.0\hat{j}) m/s$ و نیروی مغناطیسی وارد بر آن $(6.4\times10^{-19}N)\hat{k}$ است. B_x را پیدا کنید.

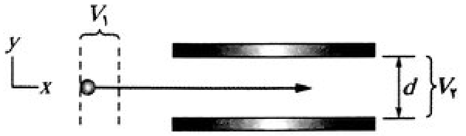
حل:
$$\vec{F} = q\vec{v}\times\vec{B}$$
$$(6.4\times10^{-19})\hat{k} = -(1.6\times10^{-19})[(2\hat{i} + 4\hat{j})\times(B_x\hat{i} + 3B_x\hat{j})]$$
$$= -(1.6\times10^{-19})(6B_x - 4B_x)\hat{k}$$
در نتیجه داریم $B_x = -2T$.

●●۶- پروتونی در میدان مغناطیسی یکنواختی حرکت می‌کند که با $\vec{B} = (10\hat{i} - 20\hat{j} + 30\hat{k}) mT$ داده شده است. در لحظهٔ t_1 سرعت پروتون با $\vec{v} = v_x\hat{i} + v_y\hat{j} + (2.0\ km/s)\hat{k}$ و نیروی مغناطیسی وارد بر پروتون با $\vec{F}_B = (4.0\times10^{-17}\ N)\hat{i} + (2.0\times10^{-17}\ N)\hat{j}$ داده شده است. در آن لحظه (الف) v_x و (ب) v_y چقدر است؟

حل: (الف) و (ب)
$$\vec{F} = q\vec{v}\times\vec{B}$$
$$= (4\times10^{-17}\ \hat{i} + 2\times10^{-17}\ \hat{j})$$
$$= e(v_x\hat{i} + v_y\hat{j} + 2\times10^{3}\ \hat{k})\times(10\hat{i} - 20\hat{j} + 30\hat{k})\times10^{-3}$$
$$= (1.6\times10^{-19})[(0.03v_y + 40)\hat{i} + (20 - 0.03v_x)\hat{j} - (0.02v_x - 0.01v_y)\hat{k}]$$
از برابر قرار دادن مؤلفه‌های متناظر خواهیم داشت
$$v_y = 7\times10^{3}\ m/s \quad , \quad v_x = 3.5\times10^{3}\ m/s$$

بخش ۲۴-۴ میدان‌های عمود برهم: کشف الکترون

●۷- در شکل ۲۴-۳۵، الکترونی از حالت سکون با اختلاف پتانسیل $V_1 = ۱/۰۰\,kV$ شتابدار شده و وارد شکاف میان دو صفحهٔ موازی با فاصلهٔ $d = ۲۰/۰\,mm$ و اختلاف پتانسیل $V_2 = ۱۰۰V$ می‌شود. صفحهٔ پایینی در پتانسیل کمتر است. از اثر لبه‌ها چشم‌پوشی کرده و فرض کنید که بردار سرعت الکترون بر بردار میدان الکتریکی میان صفحه‌ها عمود است. بر حسب بردار یکه، میدان مغناطیسی یکنواختی که موجب حرکت الکترون در راستای یک خط راست در شکاف می‌شود چقدر است؟ ILW



شکل ۲۴-۳۵ مسئلهٔ ۷

حل:

$$eV = K = \frac{۱}{۲}mv^۲ \Rightarrow$$

$$(۱/۶\times۱۰^{-۱۹})(۱\times۱۰^۳) = \frac{۱}{۲}(۹/۱۱\times۱۰^{-۳۱})v^۲$$

$$\Rightarrow v = ۱/۸۷\times۱۰^۷\ m/s$$

$$\vec{F} = q(\vec{E} + \vec{v}\times\vec{B}) = ۰ \Rightarrow E = vB$$

$$\Rightarrow \frac{۱۰۰}{۲۰\times۱۰^{-۳}} = (۱/۸۷\times۱۰^۷)B$$

$$\Rightarrow B = ۲/۶۷\times۱۰^{-۴}\ T$$

●۸- میدان الکتریکی $۱/۵۰\,kV/m$ و میدان مغناطیسی $۰/۴۰۰T$ بر الکترون متحرکی اثر می‌کنند به طوری که هیچ نیروی خالصی ایجاد نمی‌شود. اگر میدانها بر یکدیگر عمود باشند، تندی الکترون چقدر است؟

حل: $|F_E| = |F_B| \Rightarrow qE = qvB\sin\theta$

$$E = vB \Rightarrow ۱۵۰۰ = v(۰/۴) \Rightarrow v = ۳۷۵۰\ m/s$$

●۹- سرعت اولیهٔ الکترونی $(۱۲/۰\hat{j}+۱۵/۰\hat{k})km/s$ و شتاب ثابت آن درناحیه‌ای که میدانهای الکتریکی و مغناطیسی یکنواختی وجود دارند $(۲/۰۰\times۱۰^{۱۲}m/s^۲)\hat{i}$ است. اگر $\vec{B} = (۴۰۰\mu T)\hat{i}$ باشد، میدان الکتریکی $\vec{E}$ را پیدا کنید.

حل: $\vec{F} = m\vec{a} = (۹/۱۱\times۱۰^{-۳۱})(۲\times۱۰^{۱۲}\,\hat{i}) = ۱/۸۲\times۱۰^{-۱۸}\,\hat{i}$

$$\vec{F} = q\vec{E} + q\vec{v}\times\vec{B}$$

ابتدای $\vec{v}\times\vec{B}$ را حساب می‌کنیم:

$$\vec{v}\times\vec{B} = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ ۰ & ۱۲\times۱۰^۳ & ۱۵\times۱۰^۳ \\ ۴۰۰\times۱۰^{-۶} & ۰ & ۰ \end{vmatrix}$$

$$= ۶\hat{j} - ۴/۸\hat{k}$$

حال می‌توان نوشت

$$۱/۸۲\times۱۰^{-۱۸}\,\hat{i} = -(۱/۶\times۱۰^{-۱۹})\vec{E} - (۱/۶\times۱۰^{-۱۹})(۶\hat{j} - ۴/۸\hat{k})$$

$$\Rightarrow \vec{E} = (۱۱/۳۸\hat{i} - ۶\hat{j} + ۴/۸\hat{k})V/m$$

●●۱۰- پروتونی در میدانهای مغناطیسی و الکتریکی یکنواختی حرکت می‌کند. میدان مغناطیسی $\vec{B} = -۲/۵۰\,\hat{i}\,mT$ است. در یک لحظه سرعت پروتون $\vec{v} = ۲۰۰۰\,\hat{j}\,m/s$ است. در این لحظه اگر میدان الکتریکی (الف) $۴/۰۰\hat{k}V/m$، (ب) $-۴/۰۰\hat{k}V/m$ و (پ) $۴/۰۰\hat{i}V/m$ باشد، نیروی خالص وارد بر ذره را برحسب بردار یکه پیدا کنید.

حل: $\vec{F} = q\vec{E} + q\vec{v}\times\vec{B}$

$$\vec{v}\times\vec{B} = (۲۰۰۰\,\hat{j})\times(-۲/۵\times۱۰^{-۳}\,\hat{i}) = ۵\hat{k}$$

(الف) $\vec{F} = (۱/۶\times۱۰^{-۱۹})[۴\hat{k} + ۵\hat{k}] = ۱/۴۴\times۱۰^{-۱۸}\,\hat{k}$

(ب) $\vec{F} = (۱/۶\times۱۰^{-۱۹})[-۴\hat{k} + ۵\hat{k}] = ۱/۶\times۱۰^{-۱۹}\,\hat{k}$

(پ) $\vec{F} = (۱/۶\times۱۰^{-۱۹})[۴\hat{i} + ۵\hat{k}]$

$$= ۶/۴\times۱۰^{-۱۹}\,\hat{i} + ۸\times۱۰^{-۱۹}\,\hat{k}$$

●●۱۱- یک چشمهٔ یون، یونهای ^۶Li ایجاد می‌کند که بار آنها $+e$ و جرم آنها $۹/۹۹\times۱۰^{-۲۷}\,kg$ است. یونها توسط اختلاف پتانسیل $۱۰kV$ شتاب می‌گیرند و به طور افقی وارد ناحیه‌ای می‌شوند که در آنجا میدان مغناطیسی یکنواخت قائمی به بزرگی $B = ۱/۲T$ وجود دارد. شدت کمترین میدان الکتریکی را محاسبه کنید که در همان منطقه برقرار شود و یونهای ^۶Li بتوانند بدون انحراف از آن بگذرند.

حل: شرط آنکه یونهای ^۶L_i بدون انحراف عبور کنند این است که $\vec{F} = q\vec{E} + q\vec{v}\times\vec{B}$ باشد، یعنی داریم:

$$E = vB$$

از طرف دیگر یونها تحت ولتاژ V شتاب می‌گیرید، یعنی:

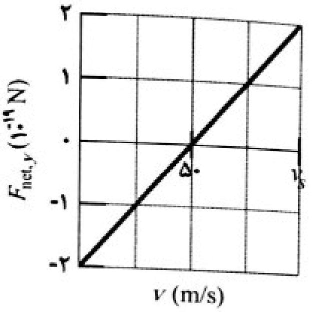
$$eV = \frac{۱}{۲}mv^۲ \Rightarrow (۱/۶\times۱۰^{-۱۹})(۱۰\times۱۰^۳)$$

$$= \frac{۱}{۲}(۹/۹۹\times۱۰^{-۲۷})v^۲ \Rightarrow v = ۵/۶۶\times۱۰^۵\ m/s$$

لذا داریم:

$$E = (۵/۶۶\times۱۰^۵)(۱/۲) = ۶/۸\times۱۰^۵\ V/m$$

●●●۱۲- در لحظهٔ t_1، الکترونی در جهت مثبت محور x از میان دو میدان الکتریکی $\vec{E}$ و میدان مغناطیسی $\vec{B}$ فرستاده می‌شود که $\vec{E}$ موازی محور y است. شکل ۲۴-۳۶ مؤلفهٔ y نیروی خالص وارد بر الکترون، $F_{net,y}$ را از طرف دو میدان برحسب تابعی از تندی v الکترون در لحظهٔ t_1 نشان می‌دهد. مقیاس محور سرعت با $v_s = ۱۰۰/۰ m/s$ مشخص شده است. مؤلفه‌های x و z نیروی خالص در لحظهٔ t_1 برابر صفرند. با فرض $B_x = ۰$، (الف) بزرگی E و (ب) $\vec{B}$ را برحسب بردار یکه پیدا کنید. GO



شکل ۲۴-۳۶ مسئلهٔ ۱۲

حل: (الف) نیروی الکتریکی $\vec{F} = q\vec{E}$ و نیروی مغناطیسی $\vec{F} = q\vec{v}\times\vec{B}$ است. در $v = ۰$ نیروی مغناطیسی صفر است. از منحنی دیده می‌شود که $v = ۰$ مؤلفهٔ y نیروی برابر با $-۲\times۱۰^{-۱۹} N$ است. لذا بزرگی میدان الکتریکی

$$E = \frac{F}{e} = \frac{۲\times۱۰^{-۱۹}}{۱/۶\times۱۰^{-۱۹}} = ۱/۲۵ \quad N/C$$

(ب) طبق فرض مسئله نیروفقط در امتداد محور x عمل می‌کند و الکترون در این راستا حرکت می‌کند و نیروهای الکتریکی و مغناطیسی همدیگر را خنثی می‌کنند. از روی نمودار در چنین حالتی که نیروی خالص صفر است، $v = ۵۰ m/s$ است. در نتیجه داریم

$$B = \frac{E}{v} = \frac{۱/۲۵}{۵۰} = ۲/۵\times۱۰^{-۲}\ T$$

برای اینکه F_B و F_E یکدیگر را خنثی کنند باید $\vec{v}\times\vec{B}$ در خلاف جهت $\vec{E}$ که رو به سمت $+y$ است، باشد و چون v در جهت $+x$ است لذا طبق قاعدهٔ دست راست میدان مغناطیسی باید در جهت $+z$ باشد.

بخش ۲۴-۵ میدان‌های عمود بر هم: اثر هال

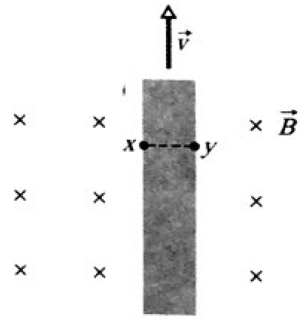
●۱۳- یک نوار مسی به ضخامت $۱۵۰ \mu m$ و پهنای $۴/۵ mm$ در میدان مغناطیسی یکنواخت $\vec{B}$ با بزرگی $۰/۶۵T$ و با $\vec{B}$ عمود بر نوار قرار دارد. سپس جریان $i = ۲۳A$ در نوار فرستاده می‌شود به طوری که اختلاف پتانسیل هال V در دو سر پهنای نوار برقرار می‌شود. V را محاسبه کنید. (تعداد حاملهای بار بکای حجم مس $۸/۴۷\times۱۰^{۲۸}$ الکترون بر متر مکعب است.)

حل: از معادله (۲۴-۱۲) داریم

$$n = \frac{Bi}{Vle} \Rightarrow ۸/۴۷\times۱۰^{۲۸} = \frac{(۰/۶۵)(۲۳)}{V(۴/۵\times۱۰^{-۳})(۱/۶\times۱۰^{-۱۹})}$$

$$\Rightarrow V = ۲/۴۵\times۱۰^{-۷}\ V$$

●۱۴- همان‌طور که در شکل ۲۴-۳۷ نشان داده شده است، یک نوار فلزی به درازای $۶/۵۰cm$، به پهنای $۰/۸۵۰cm$ و ضخامت $۰/۷۶۰ mm$ با سرعت ثابت $\vec{v}$ در میدان مغناطیسی یکنواخت $B = ۱/۲۰ mT$ که عمود بر نوار است حرکت می‌کند. اختلاف پتانسیل $۳/۹۰\mu V$ بین نقطه‌های x و y در دو طرف نوار برقرار است. تندی v را محاسبه کنید.

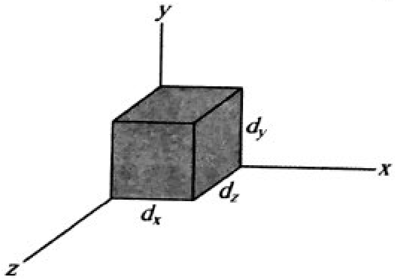


شکل ۲۴-۳۷ مسئلهٔ ۱۴

حل: شرط آنکه حامل بار منحرف نشود این است که نیروهای الکتریکی و مغناطیسی یکدیگر را خنثی کنند. یعنی $\vec{E} = v\vec{B}$ باشد، لذا می‌توان نوشت

$$\frac{\Delta V}{L} = vB \Rightarrow \frac{۳/۹\times۱۰^{-۶}}{۰/۸۵\times۱۰^{-۲}} = v(۱/۲\times۱۰^{-۳}) \Rightarrow v = ۰/۳۸ m/s$$

●●۱۵- در شکل ۲۴-۳۸، مکعب رسانای توپری با ابعاد $d_x = ۵/۰۰m$، $d_y = ۳/۰۰m$ و $d_z = ۲/۰۰m$ با سرعت ثابت $\vec{v} = (۲۰/۰ m/s)\hat{i}$ در میدان مغناطیسی یکنواخت $\vec{B} = (۳۰/۰ mT)\hat{j}$ حرکت می‌کند. (الف) میدان الکتریکی داخل مکعب بر حسب بردار یکه و (ب) اختلاف پتانسیل دو سر مکعب چقدر است؟



شکل ۲۴-۳۸ مسئله‌های ۱۵ و ۱۶

حل: (الف) چون سرعت ثابت است لذا $\vec{F} = ۰$ است و داریم

$$\vec{F} = q\vec{E} + q\vec{v}\times\vec{B} = ۰ \Rightarrow \vec{E} = -\vec{v}\times\vec{B}$$

$$\vec{E} = -(۲۰\hat{i})\times(۳۰\times۱۰^{-۳}\hat{j}) = -۰/۶\hat{k}\ V/m$$

(ب)

$$V = Ed = (۰/۶)(۲) = ۱/۲\ V$$

●●●۱۶- شکل ۲۴-۳۸ قطعه فلزی را نشان می‌دهد که وجه‌های آن با محورهای مختصات موازی‌اند. این قطعه در میدان مغناطیسی یکنواختی به بزرگی $0/020\,T$ قرار دارد. طول یک ضلع این قطعه $25\,cm$ است که با مقیاس نشان داده نشده است. این قطعه با تندی $3/0\,m/s$ به نوبت موازی با هر محور حرکت می‌کند و اختلاف پتانسیل V ظاهر شده در دو طرف قطعه اندازه‌گیری می‌شود. در حرکت موازی با محور y، $V = 12\,mV$، موازی با محور z، $V = 18\,mV$ و موازی با محور x، $V = 0$ است. ابعاد قطعه (الف) d_x، (ب) d_y و (پ) d_z چقدرند؟

حل: (الف)، (ب) و (پ): ΔV را اختلاف پتانسیل دو سر هر ضلع و d طول آن ضلع در نظر می‌گیریم، داریم:

$$E = \frac{\Delta V}{d},\quad E = vB \Rightarrow vB = \frac{\Delta V}{d}$$

$$d_y = \frac{\Delta V}{vB} = \frac{12\times10^{-3}}{(3)(0/02)} = 0/2\,m = 20\,cm$$

$$d_z = \frac{18\times10^{-3}}{(3)(0/02)} = 0/3\,m = 30\,cm$$

به این ترتیب طول ضلع داده شده در مسئله $(25\,cm)$ مربوط به d_x است. یعنی $d_x = 25\,cm$.

بخش ۲۴-۶ ذرهٔ باردار در حرکت دایره‌ای

●۱۷- الکترونی با انرژی جنبشی $1/20\,keV$ دایره‌ای را در صفحهٔ عمود بر میدان مغناطیسی یکنواختی می‌پیماید. شعاع مدار $25/0\,cm$ است. (الف) تندی الکترون، (ب) بزرگی میدان مغناطیسی، (پ) بسامد چرخش و (ت) دورهٔ تناوب حرکت را پیدا کنید. SSM

حل: (الف)
$$K = \frac{1}{2}m_e v^2 \Rightarrow v = \sqrt{\frac{2K}{m_e}}$$

$$v = \sqrt{\frac{2(1/2\times10^{3})(1/6\times10^{-19})}{(9/11\times10^{-31})}} = 2/05\times10^{7}\,m/s$$

(ب)
$$m_e\frac{v^2}{r} = evB \Rightarrow B = \frac{m_e v}{er}$$

$$B = \frac{(9/11\times10^{-31})(2/05\times10^{7})}{(1/6\times10^{-19})(25\times10^{-2})} = 4/67\times10^{-4}\,T$$

(پ)
$$v = rw = r2\pi f \Rightarrow f = \frac{v}{2\pi r} = \frac{2/05\times10^{7}}{2(3/14)(25\times10^{-2})}$$

$$= 1/31\times10^{-4}\,T$$

(ت)
$$T = \frac{1}{f} = \frac{1}{1/31\times10^{-4}} = 7/63\times10^{-8}\,s$$

●۱۸- الکترونی از حالت سکون توسط اختلاف پتانسیل $350\,V$ شتاب می‌گیرد. الکترون سپس با سرعتی عمود بر میدان وارد میدان مغناطیسی یکنواختی (بابزرگی $200\,mT$) می‌شود. (الف) تندی الکترون و (ب) شعاع مسیر آن در میدان مغناطیسی را محاسبه کنید.

حل: (الف)
$$eV = \frac{1}{2}m_e v^2 \Rightarrow v = \sqrt{\frac{2eV}{m_e}}$$

$$v = \sqrt{\frac{2(1/6\times10^{-19})(350)}{(9/11\times10^{-31})}} = 1/11\times10^{7}\,m/s$$

(ب)
$$m\frac{v^2}{r} = qvB \Rightarrow r = \frac{m_e v}{eB} = \frac{(9/11\times10^{-31})(1/11\times10^{7})}{(1/6\times10^{-19})(200\times10^{-3})}$$

$$= 3/16\times10^{-4}\,m$$

●۱۹- چه میدان مغناطیسی یکنواختی باید عمود بر باریکه‌ای از الکترونهای متحرک با تندی $1/30\times10^{6}\,m/s$ اعمال شود تا الکترونها در دایره‌ای به شعاع $0/350\,m$ حرکت کنند؟

حل:

$$B = \frac{m_e v}{er} = \frac{(9/11\times10^{-31})(1/3\times10^{6})}{(1/6\times10^{-19})(0/35)} = 2/11\times10^{-5}\,T$$

●۲۰- در یک آزمایش هسته‌ای پروتونی با انرژی جنبشی $1/0\,MeV$ در مسیری دایره‌ای در میدان مغناطیسی یکنواختی حرکت می‌کند. انرژی (الف) یک ذرهٔ آلفا $(q = +2e, m = 4/0u)$ و (ب) یک دوترون $(q = +e, m = 2/0u)$ چقدر باید باشد تا در همان مسیر دایره‌ای حرکت کنند؟

حل: (الف)
$$K = \frac{1}{2}mv^2 \Rightarrow v = \sqrt{\frac{2k}{m}}$$

$$m\frac{v^2}{r} = qvB \Rightarrow v = \frac{qBr}{m} \Rightarrow \sqrt{\frac{2K}{m}} = \frac{qBr}{m} \Rightarrow r = \frac{\sqrt{2mK}}{qB}$$

می‌خواهیم شعاع دوران دو ذره با هم برابر باشد، لذا می‌توان نوشت:

$$r_\alpha = r_p \Rightarrow \frac{m_\alpha K_\alpha}{q_\alpha^2} = \frac{m_p K_p}{q_p^2} \Rightarrow$$

$$K_\alpha = \left(\frac{mp}{m_\alpha}\right)\left(\frac{q_\alpha}{q_p}\right)^2 K_p = \left(\frac{1}{4}\right)(2)^2 K_p = K_p = 1\,MeV$$

(ب)
$$K_d = \left(\frac{mp}{m_d}\right)\left(\frac{q_d^2}{q_p}\right)^2 K_p = \left(\frac{1}{2}\right)(1)^2 = \frac{K_p}{2} = 0/5\,MeV$$

●۲۱- (الف) بسامد چرخش الکترونی با انرژی $100\,eV$ را در میدان مغناطیسی یکنواختی به بزرگی $35/0\,\mu T$ پیدا کنید. (ب) اگر سرعت الکترون بر میدان مغناطیسی عمود باشد، شعاع مسیر آن را محاسبه کنید.

حل: (الف) از معادلهٔ (۲۴-۱۸) داریم

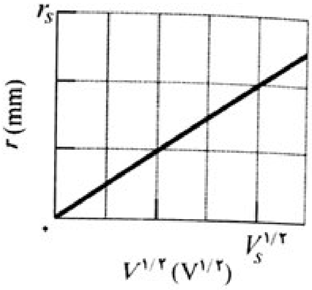
$$f = \frac{eB}{2\pi m_e} = \frac{(1/6\times10^{-19})(35\times10^{-6})}{2(3/14)(9/11\times10^{-31})} = 9/78\times10^{5}\,Hz$$

(ب) از معادله (۲۴-۱۶) داریم:

$$r = \frac{m_e v}{eB} = \frac{\sqrt{2m_e K}}{eB}$$

$$= \frac{\sqrt{2\times(9/11\times10^{-31})(100)(1/6\times10^{-19})}}{(1/6\times10^{-19})(35\times10^{-6})} = 0/964\,m$$

●۲۲- الکترونی از حالت سکون با اختلاف پتانسیل V شتاب می‌گیرد و سپس وارد ناحیه‌ای با میدان مغناطیسی یکنواخت می‌شود که در آن حرکت دایره‌ای یکنواختی انجام می‌گیرد. شکل ۲۴-۳۹ شعاع r این حرکت را برحسب $V^{۱/۲}$ به دست می‌دهد. مقیاس محور عمودی $r_s = ۳/۰\text{mm}$، و مقیاس محور افقی با $V_s^{۱/۲} = ۴۰/۰\text{V}^{۱/۲}$ مشخص شده است. بزرگی میدان مغناطیسی چقدر است؟



شکل ۲۴-۳۹ مسئلهٔ ۲۲

حل: با توجه به نمودار دیده می‌شود که در $r = ۲\text{mm}$ و $\sqrt{V} = ۴۰$ است.

$$K = eV \Rightarrow \frac{۱}{۲}m_e v^۲ = eV \Rightarrow v = \sqrt{\frac{۲eV}{m_e}}$$

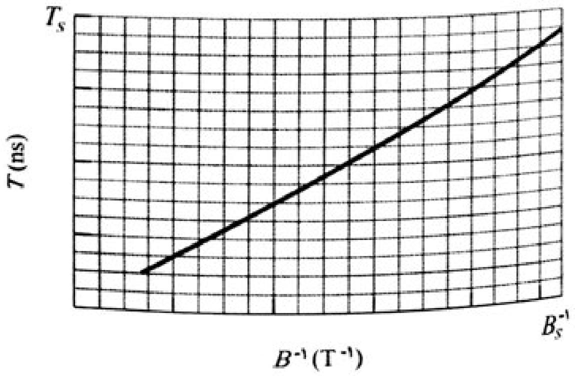
از طرف دیگر داریم:

$$m_e\frac{v^۲}{r} = evB \Rightarrow B = \frac{m_e v}{er} = \frac{m_e}{er}\sqrt{\frac{۲eV}{m_e}} = \sqrt{\frac{۲m_e V}{er^۲}}$$

با قرار دادن مقادیر مورد نظر خواهیم داشت

$$B = ۶/۷۵\times۱۰^{-۲}\ \text{T}$$

●۲۳- ذره معینی با بردار سرعت عمود بر جهت یک میدان مغناطیسی یکنواخت به داخل آن فرستاده می‌شود. شکل ۲۴-۴۰ دورهٔ تناوب T حرکت ذره را برحسب معکوس میدان مغناطیسی B نشان می‌دهد. مقیاس محور قائم با $T_s = ۴۰/۰\text{ns}$ و مقیاس محور افقی با $B_s^{-۱} = ۵/۰\text{T}^{-۱}$ مشخص شده است. نسبت m/q جرم ذره به بزرگی بار آن چقدر است؟



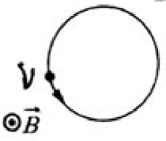
شکل ۲۴-۴۰ مسئلهٔ ۲۳

حل: از نمودار مشاهده می‌شود که در $B^{-۱} = ۲$ $(B = ۰/۵)$ داریم $T = ۱۵\text{ns}$

$$T = \frac{۲\pi m}{qB} \Rightarrow \frac{m}{q} = \frac{BT}{۲\pi} = \frac{(۰/۵)(۱۵\times۱۰^{-۹})}{۲(۳/۱۴)}$$

$$= ۱/۱۹\times۱۰^{-۹}\ \text{kg/c}$$

●۲۴- در شکل ۲۴-۴۱ ذره‌ای روی یک دایره در ناحیه‌ای که در آن میدان مغناطیسی یکنواختی به بزرگی $B = ۴/۰۰\text{mT}$ وجود دارد حرکت می‌کند. ذره می‌تواند پروتون یا الکترون باشد (شما باید انتخاب کنید). به این ذره نیروی مغناطیسی با بزرگی $۳/۲۰\times۱۰^{-۱۵}\text{N}$ وارد می‌شود. (الف) تندی ذره، (ب) شعاع دایره و (پ) دورهٔ تناوب حرکت چقدر است؟



شکل ۲۴-۴۱ مسئلهٔ ۲۴

حل: (الف) با توجه به جهت B و جهت حرکت ذره می‌توان نتیجه گرفت که ذره الکترون است.

$$F = qvB \Rightarrow ۳/۲\times۱۰^{-۱۵} = (۱/۶\times۱۰^{-۱۹})v(۴\times۱۰^{-۳})$$

$$\Rightarrow v = ۵\times۱۰^{۶}\ \text{m/s}$$

(ب)
$$F = m\frac{v^۲}{r} \Rightarrow ۳/۲\times۱۰^{-۱۵} = (۹/۱۱\times۱۰^{-۳۱})\frac{(۵\times۱۰^{۶})^۲}{r}$$

$$\Rightarrow r = ۷/۱۱\times۱۰^{-۳}\ \text{m}$$

(پ)
$$T = \frac{۲\pi r}{v} = \frac{۲(۳/۱۴)(۷/۱۱\times۱۰^{-۳})}{۵\times۱۰^{۶}} = ۸/۹۳\times۱۰^{-۹}\ \text{s}$$

$$= ۸/۹۳\ \text{ns}$$

●۲۵- یک ذرهٔ آلفا $(q = +۲e\ ,\ m = ۴/۰۰\text{u})$ در مسیری دایره‌ای به شعاع $۴/۵۰\text{cm}$ در میدان مغناطیسی یکنواختی با $B = ۱/۲۰\text{T}$ حرکت می‌کند. (الف) تندی ذره، (ب) دورهٔ تناوب چرخش آن، (پ) انرژی جنبشی آن و (ت) اختلاف پتانسیلی را که برای رسیدن به این انرژی توسط آن شتابدار شده است، محاسبه کنید.

حل: (الف) از معادله (۲۴-۱۶) داریم:

$$v = \frac{qrB}{m_\alpha} = \frac{۲erB}{m_\alpha} = \frac{۲(۱/۶\times۱۰^{-۱۹})(۴/۵\times۱۰^{-۲})(۱/۲)}{(۴)(۱/۶۶\times۱۰^{-۲۷})}$$

$$= ۲/۶\times۱۰^{۶}\ \text{m/s}$$

(ب)
$$T = \frac{۲\pi r}{v} = \frac{۲(۳/۱۴)(۴/۵\times۱۰^{-۲})}{۲/۶\times۱۰^{۶}} = ۱/۰۹\times۱۰^{-۷}\ \text{s}$$

(پ)
$$K_\alpha = \frac{۱}{۲}m_\alpha v^۲ = \left(\frac{۱}{۲}\right)(۴)(۱/۶۶\times۱۰^{-۲۷})(۲/۶\times۱۰^{۶})$$

$$= ۲/۲۴\times۱۰^{-۱۴}\ \text{J}$$

(ت)
$$K = U = qV \Rightarrow ۲/۲۴\times۱۰^{-۱۴} = ۲(۱/۶\times۱۰^{-۱۹})V$$

$$\Rightarrow V = ۷\times۱۰^{۴}\ \text{V}$$

●●۲۶- ذره‌ای با حرکت دایره‌ای یکنواخت به شعاع $۲۶/۱\mu m$ در میدان مغناطیسی یکنواختی قرار دارد. نیروی مغناطیسی وارد بر ذره دارای بزرگی $۱/۶۰\times۱۰^{-۱۷}$ N است. انرژی جنبشی ذره چقدر است؟

حل:

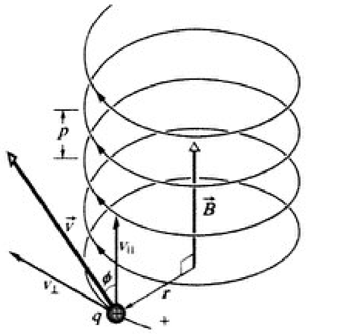
$$F = m\frac{v^۲}{r} \Rightarrow mv^۲ = rF$$

$$F=\frac{۱}{۲}mv^۲=\frac{۱}{۲}rf=\left(\frac{۱}{۲}\right)(۲۶/۱\times۱۰^{-۶})(۱/۶\times۱۰^{-۱۷})$$

$$=۲/۱\times۱۰^{-۲۲}\ \text{J}$$

●●۲۷- الکترونی در یک مسیر مارپیچی در میدان مغناطیسی یکنواختی به‌بزرگی ۰/۳۰۰ T حرکت می‌کند. گام مسیر ۶/۰۰μm و بزرگی نیروی مغناطیسی وارد بر الکترون برابر با $۲/۰۰\times۱۰^{-۱۵}$ N است. تندی الکترون چقدر است؟

حل:



مسافت پیموده شده در جهت $\vec{B}$ (در یک گام P) $P=v_{\parallel}T$ است که با استفاده از معادله ۲۴- ۱۷، $(T=۲\pi m/(qB))$ خواهیم داشت

$$v_{\parallel}=\frac{PeB}{۲\pi m_e}=\frac{(۶\times۱۰^{-۶})(۱/۶\times۱۰^{-۱۹})(۰/۳)}{۲(۳/۱۴)(۹/۱۱\times۱۰^{-۳۱})}$$

$$=۵/۰۳\times۱۰^{۴}\ \text{m/s}$$

برای $v_\perp$ می‌توان از رابطه نیرو استفاده کرد

$$F=ev_\perp B\Rightarrow ۲\times۱۰^{-۱۵}=(۱/۶\times۱۰^{-۱۹})v_\perp(۰/۳)$$

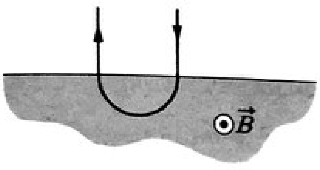
$$\Rightarrow v_\perp=۴/۱۷\times۱۰^{۴}\ \text{m/s}$$

در نتیجه تندی برابر است با

$$v=\sqrt{v_\perp^۲+v_\parallel^۲}=\sqrt{(۴/۱۷\times۱۰^{۴})^۲+(۵/۰۳\times۱۰^{۴})^۲}$$

$$=۶/۵۳\ \text{m/s}$$

●●۲۸- در شکل ۲۴-۴۲، ذرهٔ بارداری وارد ناحیه‌ای از یک میدان مغناطیسی یکنواخت $\vec{B}$ می‌شود، نصف دایره‌ای را طی می‌کند و سپس از آن ناحیه خارج می‌شود. ذره می‌تواند پروتون یا الکترون باشد (شما باید تصمیم بگیرید). این ذره ۱۳۰ ns را در این ناحیه سپری می‌کند. (الف) بزرگی $\vec{B}$ چقدر است؟ (ب) اگر ذره با دو برابر انرژی جنبشی اولیه (در راستای همان مسیر) دوباره به میدان مغناطیسی برگردد، در این حرکت چه مدت زمان در میدان خواهد بود؟



شکل ۲۴-۴۲ مسئلهٔ ۲۸

حل: با توجه به جهت $\vec{B}$ و جهت حرکت ذره می‌توان نتیجه گرفت که ذره پروتون است.

(الف) مسیر پیموده شده در میدان مغناطیسی نیم‌دایره است در نتیجه زمان طی شده برابر نصف زمان تناوب بوده است پس $T=۲۶۰\,\text{ns}=۲۶۰\times۱۰^{-۹}\,\text{s}$ است. با استفاده از معادلهٔ (۲۴-۱۷) می‌توان نوشت:

$$B=\frac{۲\pi m_p}{qT}=\frac{۲(۳/۱۴)(۱/۶۷\times۱۰^{-۲۷})}{(۱/۶\times۱۰^{-۱۹})(۲۶۰\times۱۰^{-۹})}=۰/۲۵۲\text{T}$$

(ب) در معادلهٔ (۲۴-۱۷)، m ، q و B ثابت می‌مانند در نتیجه T نیز ثابت می‌ماند که ثابت بودن T بیانگر این است که زمان عبور نیز ثابت است.

●●۲۹- پوزیترونی با انرژی جنبشی ۲/۰۰keV به داخل میدان مغناطیسی یکنواختی به بزرگی ۰/۱۰۰T پرتاب می‌شود، به طوری که بردار سرعت آن با $\vec{B}$ زاویهٔ ۸۹/۰° می‌سازد. (الف) دورهٔ تناوب، (ب) گام p و (پ) شعاع r مسیر مارپیچی آن را پیدا کنید. **SSM WWW**

حل: (الف) شکل ۲۴-۱۱ کتاب را ببینید. اگر v تندی پویترون باشد آنگاه $v_\perp=v\sin\phi$ مؤلفه عمود بر میدان مغناطیسی است. چنانچه شعاع مسیر را r بنامیم از قانون دون نیوتون داریم

$$eBv=m_e\frac{v_\perp{}^۲}{r}\Rightarrow r=\frac{m_ev_\perp}{eB}$$

برای زمان تناوب داریم

$$T=\frac{۲\pi r}{v_\perp}=\frac{۲\pi}{v_\perp}\left(\frac{m_ev_\perp}{eB}\right)=\frac{۲\pi m_e}{eB}$$

که در واقع همان معادله (۲۴-۱۷) است.

$$T=\frac{۲(۳/۱۴)(۹/۱۱\times۱۰^{-۳۱})}{(۱/۶\times۱۰^{-۱۹})(۰/۱)}=۳/۵۸\times۱۰^{-۱۰}\ \text{s}$$

(ب) گام مسافتی است که ذره در طی زمان یک دوره تناوب در امتداد میدان مغناطیسی طی می‌کند. پس $P=vT$ است که $v_\parallel=v\cos\phi$ و تندی v را نیز می‌توانیم از انرژی جنبشی به دست آوریم

$$K=\frac{۱}{۲}m_ev^۲\Rightarrow v=\sqrt{\frac{۲k}{m_e}}$$

$$v=\sqrt{\frac{۲(۲\times۱۰^{۳})(۱/۶\times۱۰^{-۱۹})}{(۹/۱۱\times۱۰^{-۳۱})}}=۲/۶۵\times۱۰^{۷}\ \text{m/s}$$

لذا خواهیم داشت:

$$P=v_\parallel T=vT\cos\phi=(۲/۶۵\times۱۰^{۷})(۳/۵۸\times۱۰^{-۱۰})\cos۸۹^\circ$$

$$=۱/۶۶\times۱۰^{-۳}\ \text{m}$$

(پ)
$$v = r\omega = r\frac{۲\pi}{T} \Rightarrow r = \frac{vT}{۲\pi} = \frac{(۲/۶۵\times ۱۰^{۷})(۳/۵۸\times ۱۰^{-۱۰})}{۲(۳/۱۴)}$$
$$= ۱/۵۱\times ۱۰^{-۳}\ \text{m}$$

۳۰●●●- الکترونی روی مسیری مارپیچی در میدان مغناطیسی یکنواختی که با رابطهٔ $\vec{B} = (۲۰\hat{i} - ۵۰\hat{j} - ۳۰\hat{k})\text{mT}$ داده می‌شود حرکت می‌کند. در زمان $t = ۰$ سرعت الکترون با رابطهٔ $\vec{v} = (۲۰\hat{i} - ۳۰\hat{j} + ۵۰\hat{k})\text{m/s}$ داده می‌شود. (الف) زاویهٔ ϕ میان $\vec{v}$ و $\vec{B}$ چقدر است؟ سرعت الکترون نسبت به زمان تغییر می‌کند. آیا (ب) تندی آن و (پ) زاویهٔ ϕ نسبت به زمان تغییر می‌کند؟ (ت) شعاع مسیر مارپیچی چقدر است؟

حل: (الف) از رابطه زیر می‌توان زاویهٔ بین $\vec{v}$ و $\vec{B}$ را به دست آورد.
$$\cos\phi = \frac{\vec{v}\cdot\vec{B}}{vB}$$
$$\vec{v}\cdot\vec{B} = (۲۰\hat{i} - ۳۰\hat{j} + ۵۰\hat{k})\cdot(۲۰\hat{i} - ۵۰\hat{j} - ۳۰\hat{k}) = ۴۰۰$$
$$v = \sqrt{(۲۰)^{۲} + (-۳۰)^{۲} + (۵۰)^{۲}} = ۶۱/۶۵\text{m/s}$$
$$B = \sqrt{(۲۰)^{۲} + (-۵۰)^{۲} + (-۳۰)^{۲}} = ۶۱/۶۵\text{mT}$$

در نتیجه داریم:
$$\phi = \cos^{-۱}\frac{۴۰۰}{(۶۱/۶۵)^{۲}} = ۸۳/۹۶^{\circ}$$

ب) خیر. نیروی مغناطیسی ثابت فقط جهت حرکت ذره را تغییر می‌دهد و مقدار تندی و انرژی جنبشی را تغییر نمی‌دهد.

پ) مؤلفه‌های سرعت v و $v_{\perp}$ هر دو ثابت هستند لذا ϕ ثابت می‌ماند.

ت) داریم $r = mv_{\perp}/eB$ که $v_{\perp}$ از رابطه زیر به دست می‌آید.
$$v_{\perp} = v\sin\phi = (۶۱/۶۵)\sin(۸۳/۹۶^{\circ}) = ۶۱/۳\ \text{m/s}$$
$$r = \frac{m_e v_{\perp}}{eB} = \frac{(۹/۱۱\times ۱۰^{-۳۱})(۶۱/۳)}{(۱/۶\times ۱۰^{-۱۹})(۶۱/۶۵\times ۱۰^{-۳})}$$
$$= ۵/۶۶\times ۱۰^{-۹}\ \text{m} = ۵/۶۶\text{nm}$$

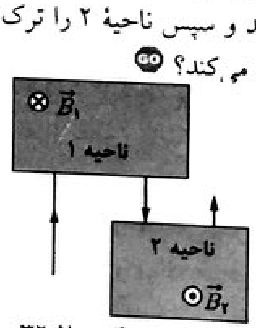
۳۱●●- یک طیف‌سنج جرم تجارتی (به مسئلهٔ نمونهٔ ۲۴-۳ نگاه کنید) برای جداکردن یون‌های اورانیوم با جرم $۳/۹۲\times ۱۰^{-۲۵}$kg و بار الکتریکی $۳/۲۰\times ۱۰^{-۱۹}$ C از نمونه‌های مربوط به کار می‌رود. یونها توسط اختلاف پتانسیل ۱۰۰kV شتاب می‌گیرند و سپس وارد میدان مغناطیسی یکنواختی می‌شوند و در مسیری به شعاع ۱/۰۰m خم می‌شوند. یونها پس از انحراف به اندازهٔ °۱۸۰ و عبور از شکافی به پهنای ۱/۰۰mm و ارتفاع ۱/۰۰cm در ظرفی جمع‌آوری می‌شوند. (الف) بزرگی میدان مغناطیسی (عمودی) جداکننده چقدر است؟ اگر این دستگاه برای جداکردن ۱۰۰mg ماده در ساعت به کار رود، (ب) جریان یونهای موردنظر در دستگاه و (پ) انرژی گرمایی تلف شده را در مدت ۱/۰۰h محاسبه کنید.

حل: (الف) از مسئله نمونه ۲۴-۳ داریم
$$m = \frac{B^{۲}qx^{۲}}{۸V} \Rightarrow B = \sqrt{\frac{۸Vm}{qx^{۲}}}$$
که در آن $x = ۲r = ۲m$ است و با قرار دادن سایر مقادیر داریم $B = ۰/۴۹۵T$.

ب) چنانچه تعداد یونهایی که در واحد زمان جدا می‌شدند را N در نظر بگیریم جریان برابر $i = qN$ می‌شود و از طرف دیگر اگر مقدار جرمی که در واحد زمان جدا می‌شود را نیز $M = mN$ در نظر بگیریم که m جرم یک یون است، در نتیجه خواهیم داشت
$$M = \frac{۱۰۰\times ۱۰^{-۶}}{۳۶۰۰} = ۲/۷۸\times ۱۰^{-۸}\ \text{kg/s}$$
و $N = \frac{M}{m}$ را در رابطه $i = qN$ قرار می‌دهیم، داریم
$$i = q\frac{M}{m} = (۳/۲\times ۱۰^{-۱۹})\frac{۲/۷۸\times ۱۰^{-۸}}{۳/۹۲\times ۱۰^{-۲۵}} = ۲/۲۷\times ۱۰^{-۲}\ \text{A}$$

پ) انرژی qV توسط هر یون در محفظه ایجاد می‌شود بنابراین انرژی‌ای که در بازه زمانی Δt ایجاد می‌شود برابر است با
$$U = NqV\Delta t = \frac{i}{q}qV\Delta t = iV\Delta t$$
$$= (۲/۲۷\times ۱۰^{-۲})(۱۰۰\times ۱۰^{۳})(۳۶۰۰) = ۸/۱۷\times ۱۰^{۶}\ \text{J}$$

۳۲●●- در شکل ۲۴-۴۳، الکترونی با انرژی جنبشی اولیهٔ ۴/۰ keV در لحظهٔ $t_{۱} = ۰$ وارد ناحیهٔ ۱ می‌شود. در آن ناحیه میدان مغناطیسی یکنواختی به بزرگی ۰/۰۱۰ T و به طرف داخل صفحه برقرار است. الکترون یک نیمدایره را طی می‌کند و سپس از ناحیهٔ ۱ خارج و به طرف ناحیهٔ ۲ که ۲۵/۰cm با آن فاصله دارد حرکت می‌کند. یک اختلاف پتانسیل الکتریکی $\Delta V = ۲۰۰۰$ V در دو سر این فاصله برقرار است با قطبیتی که تندی الکترونها را به طور یکنواخت با عبور از این فاصله افزایش می‌دهد. در ناحیهٔ ۲ میدان مغناطیسی یکنواختی به طرف خارج از صفحه با بزرگی ۰/۰۲۰ T وجود دارد. الکترون یک نیمدایره را می‌پیماید و سپس ناحیهٔ ۲ را ترک می‌کند. در چه زمان t آنجا را ترک می‌کند؟ GO



شکل ۲۴-۴۳ مسئلهٔ ۳۲

حل: از معادله ۲۴-۱۷ می‌توان استفاده کرد که زمان تناوب $T = \frac{۲\pi m_e}{eB}$ را به دست می‌دهد. بنابراین زمان کلی برابر است با
$$\left(\frac{T}{۲}\right)_{۱} + t_{\text{گاف}} + \left(\frac{T}{۲}\right)_{۲} = \frac{\pi m_e}{e}\left(\frac{۱}{B_{۱}} + \frac{۱}{B_{۲}}\right) + t_{\text{گاف}}$$

و زمان سپری شده در گاف را نیز می‌توان از معادله $x = ۱/۲at^{۲} + v_{۰}t$ به دست آورد.

$$d = \frac{۱}{۲}\frac{e\Delta V}{m_e d}t^{۲} + \sqrt{\frac{۲k_{۰}}{me}}t$$

که با قرار دادن مقادیر داده شده به یک معادله درجه دوم برای t می رسیم که با حل آن خواهیم داشت $t = t_{گاف} = ۵/۹۶\times۱۰^{-۹}\ s$.

در نتیجه زمان کل برابر است با

$$\frac{\pi(۹/۱۱\times۱۰^{-۳۱})}{(۱/۶\times۱۰^{-۱۹})}\left(\frac{۱}{۰/۰۱}+\frac{۱}{۰/۰۲}\right)+۵/۹۶\times۱۰^{-۹}$$

$$= ۸/۷\times۱۰^{-۹}\ s = ۸/۷\ ns$$

●●۳۳- نوع خاصی از ذرهٔ بنیادی با تبدیل به یک الکترون e^- و یک پروتون e^+ واپاشیده می‌شود. فرض کنید ذره‌ای که واپاشیده می‌شود در حالت سکون در میدان مغناطیسی یکنواخت $\vec{B}$ با بزرگی ۳/۵۳mT قرار داشته و e^- و e^+ از نقطهٔ واپاشی در مسیرهایی که در صفحهٔ عمود بر $\vec{B}$ قرار دارند از هم دور شوند. چه مدت پس از واپاشی e^- و e^+ برخورد می‌کنند؟

حل: هر کدام از ذرات مسیر دایره‌ای یکسان ولی در جهت مخالف را پیموده و سپس با هم برخورد می‌کنند پس زمان برخورد آنها نصف زمان تناوب است و با استفاده از معادله (۲۴-۱۷) داریم

$$T = \frac{۲\pi m}{qB} = \frac{۲\pi(۹/۱۱\times۱۰^{-۳۱})}{(۱/۶\times۱۰^{-۱۹})(۳/۵۳\times۱۰^{-۳})} = ۱/۰۱۴\times۱۰^{-۸}\ s$$

و زمان برخورد آنها برابر است با

$$t = \frac{T}{۲} = ۰/۵۰۷\times۱۰^{-۸}\ s = ۵/۰۷\ ns$$

●●۳۴- چشمه‌ای الکترونی را با تندی $v = ۱/۵\times۱۰^{۷}$ m/s به میدان مغناطیسی یکنواختی با بزرگی $B = ۱/۰\times۱۰^{-۳}$ T پرتاب می‌کند. سرعت الکترون با جهت میدان مغناطیسی زاویهٔ $\theta = ۱۰^{\circ}$ می‌سازد. فاصلهٔ d از نقطهٔ پرتاب که در آن الکترون بعداً خط میدانی را که از نقطهٔ پرتاب می‌گذرد قطع می‌کند پیدا کنید.

حل: شکل ۲۴-۱۱ کتاب را در نظر می‌گیریم. بسامد الکترون برابر است با $f = eB/۲\pi m_e$ و مولفه سرعت الکترون در جهت میدان برابر است با $v_{\|} = v\cos\theta$. بنابراین مسافت طی شده را که با توجه به مسئله می‌توان همان گام در نظر گرفت از رابطهٔ زیر به دست می‌آید

$$d = v_{\|}T = \frac{v_{\|}}{f} = \frac{(v\cos\theta)(۲\pi m_e)}{eB}$$

که با قرار دادن مقادیر داده شد خواهیم داشت $d = ۰/۵۳\ m$.

●●۳۵- طول کل مسیر پیموده شده توسط یک دوترون در سیکلوترون مسئلهٔ نمونهٔ ۲۴-۵ را در ضمن (کل) فرایند شتاب‌گیری محاسبه کنید. فرض کنید که پتانسیل شتاب دهنده میان دی‌ها ۸۰kV باشد.

حل: با توجه به مسئله نمونهٔ ۲۴-۵ انرژی جنبشی الکترون در موقع خروج برابر $K = ۲/۷\times۱۰^{-۱۲}$ J است و انرژی که در هر دور شتاب گرفتن qV است که چون در هر دور دوبار شتاب می‌گیرد، انرژی کسب شده در هر دور برابر است با

$$U = ۲qV = ۲(۱/۶\times۱۰^{-۱۹})(۸۰\times۱۰^{۳}) = ۲/۵۶\times۱۰^{-۱۴}\ J$$

در نتیجه می‌توان تعداد دوری را که دوترون برای رسیدن به این انرژی طی می‌کند را به دست آورد.

$$N = \frac{K}{U} = \frac{۲/۷\times۱۰^{-۱۲}}{۲/۵۶\times۱۰^{-۱۴}} = ۱۰۵/۵$$ دور

با استفاده از انرژی میانگین می‌توان شعاع میانگین دوران را به دست آورد.

$$\bar{K} = \frac{۰+۲/۷\times۱۰^{-۱۲}}{۲} = ۱/۳۵\times۱۰^{-۱۲}\ J$$

$$\bar{K} = \frac{۱}{۲}m\bar{v}^{۲} \Rightarrow \bar{v} = \sqrt{\frac{۲\bar{K}}{m}} = \sqrt{\frac{۲(۱/۳۵\times۱۰^{-۱۲})}{۳/۳۴\times۱۰^{-۲۷}}}$$

$$= ۲/۸۴\times۱۰^{۷}\ m/s$$

$$m\frac{\bar{v}^{۲}}{\bar{r}} = q\bar{v}B \Rightarrow \bar{r} = \frac{m\bar{v}}{qB} = \frac{(۳/۳۴\times۱۰^{-۲۷})(۲/۸۴\times۱۰^{۷})}{(۱/۶\times۱۰^{-۱۹})(۱/۵۷)}$$

$$= ۰/۳۷\ m$$

بنابراین کل مسافت تقریبی پیموده شده برابر است با

$$S = N(۲\pi\bar{r}) = (۱۰۵/۵)(۲)(۳/۱۴)(۰/۳۷) = ۲/۴۵\times۱۰^{۲}\ m$$

●●۳۶- در یک سیکلوترون مشخص پروتون در دایره‌ای به شعاع ۰/۵۰۰m حرکت می‌کند. بزرگی میدان مغناطیسی ۱/۲۰T است. (الف) بسامد نوسانگر چقدر است؟ (ب) انرژی جنبشی پروتون برحسب الکترون ولت چقدر است؟

حل: (الف) از معادله (۲۴-۲۴) داریم

$$f_{osc} = \frac{|q|B}{۲\pi m} = \frac{(۱/۶\times۱۰^{-۱۹})(۱/۲)}{۲\pi(۱/۶۷\times۱۰^{-۲۷})} = ۱/۸۳\times۱۰^{۷}\ Hz$$

ب)

$$m\frac{v^{۲}}{r} = quB \Rightarrow v = \frac{qrB}{m}$$

$$v = \frac{(۱/۶\times۱۰^{-۱۹})(۰/۵)(۱/۲)}{۱/۶۷\times۱۰^{-۲۷}} = ۵/۷۵\times۱۰^{۷}\ m/s$$

$$K = \frac{۱}{۲}mv^{۲} = \left(\frac{۱}{۲}\right)(۱/۶۷\times۱۰^{-۲۷})(۵/۷۵\times۱۰^{۷})^{۲}$$

$$= ۲/۷۶\times۱۰^{-۱۲}\ J = ۱۷/۳MeV$$

●●۳۷- پروتونی در یک سیکلوترون با شروع از حالت تقریباً سکون در مرکز، در مسیری دایره‌ای حرکت می‌کند. وقتی که از شکاف بین دی‌ها می‌گذرد، اختلاف پتانسیل الکتریکی بین دی‌ها ۲۰۰V است. (الف) با هر بار عبور از شکاف انرژی جنبشی آن چقدر افزایش می‌یابد؟ (ب) وقتی که ۱۰۰ بار از شکاف بگذرد انرژی جنبشی آن چقدر است؟ فرض کنید $r_{۱۰۰}$ شعاع مسیر دایره‌ای پروتون در هنگام کامل‌شدن دور صدم و موقع ورود به یک دی، و $r_{۱۰۱}$ شعاع بعدی موقع ورود به دی در زمان بعدی باشد، (پ) وقتی شعاع از $r_{۱۰۰}$ به $r_{۱۰۱}$ تغییر کند درصد افزایش شعاع چقدر است؟ یعنی

$$\text{درصد افزایش} = \frac{r_{۱۰۱} - r_{۱۰۰}}{r_{۱۰۰}} \times ۱۰۰ \quad (\text{درصد})$$

چقدر است؟

حل: (الف) از پایستگی انرژی استفاده می‌کنیم. انرژی جنبشی در هر عبور برابر خواهد بود با:

ب) $\Delta K = \Delta U = q\Delta V = ۲۰۰eV = ۳/۲ \times ۱۰^{-۱۷}\ \text{J}$

پ) $\Delta K = n\Delta K = (۱۰۰)(۲۰۰) = ۲۰\,\text{keV}$

از دو رابطه $n(۲۰۰) = \frac{۱}{۲}mv^۲$ و $r = mv/qB$ ، داریم:

$$r = \frac{m_p}{eB}\sqrt{\frac{۲n(۲۰۰)}{m_p}}$$

مشاهده می‌شود که r متناسب با $\sqrt{n}$ است. بنابراین می‌توان درصد افزایش شعاع را وقتی از $n = ۱۰۰$ به $n = ۱۰۱$ می‌رود از رابطه زیر به دست آورد

$$\frac{\sqrt{۱۰۱} - \sqrt{۱۰۰}}{\sqrt{۱۰۰}} = ۰/۰۰۴۹۹ \text{ یا } ٪\ ۰/۴۹۹$$

●●۳۸- سیکلوترونی با دی به شعاع $۵۳/۰\,\text{cm}$ در بسامد نوسانگر برابر با $۱۲/۰\,\text{MHz}$ برای شتاب دادن به پروتونها کار می‌کند. (الف) بزرگی B میدان مغناطیسی موردنیاز برای رسیدن به تشدید چقدر است؟ (ب) در این بزرگی، انرژی جنبشی پروتونی که از سیکلوترون خارج می‌شود چقدر است؟ اکنون فرض کنید که $B = ۱/۵۷\,\text{T}$ باشد. (پ) حالا چه بسامد نوسانگری برای رسیدن به تشدید لازم است؟ (ت) در این بسامد، انرژی جنبشی پروتون خارج شده چقدر است؟

حل: (الف)

$$m\frac{v^۲}{r} = quB \Rightarrow mv = qrB$$

اما $v = r\omega = r(۲\pi f)$، لذا داریم:

$$mr(۲\pi f) = qrB \Rightarrow B = \frac{۲\pi mf}{q}$$

$$B = \frac{(۲\pi)(۱/۶۷ \times ۱۰^{-۲۷})(۱۲ \times ۱۰^{۶})}{۱/۶ \times ۱۰^{-۱۹}} = ۰/۷۸۷\ \text{T}$$

ب) $v = r(۲\pi f) = (۲\pi)(۰/۵۳)(۱۲ \times ۱۰^{۶}) = ۳/۹۹ \times ۱۰^{۷}\ \text{m/s}$

$$K = \frac{۱}{۲}mv^۲ = \left(\frac{۱}{۲}\right)(۱/۶۷ \times ۱۰^{-۲۷})(۳/۹۹ \times ۱۰^{۷})^۲ ۱/۳۳ \times ۱۰^{-۱۲}\ \text{J}$$

پ) $B = \frac{۲\pi mf}{q} \Rightarrow ۱/۵۷ = \frac{(۲\pi)(۱/۶۷ \times ۱۰^{-۲۷})f}{۱/۶ \times ۱۰^{-۱۹}}$

$$\Rightarrow f = ۲/۴ \times ۱۰^{۷}\ \text{Hz}$$

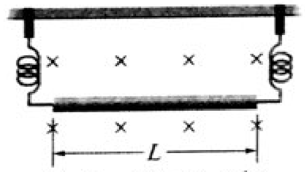
ت) $v = r(۲\pi f) = (۰/۵۳)(۲\pi)(۲/۴ \times ۱۰^{۷}) = ۷/۹۹ \times ۱۰^{۷}\ \text{m/s}$

$$K = ۱/۲\,mv^۲ = (۱/۲)(۱/۶۷ \times ۱۰^{-۲۷})(۷/۹۹ \times ۱۰^{۷})^۲$$

$$= ۵/۳۳ \times ۱۰^{-۱۲}\ \text{J}$$

بخش ۲۴-۸ نیروی مغناطیسی وارد بر سیم حامل جریان

●۳۹- یک سیم ۱۳/۰ گرمی به طول $L = ۶۲/۰\,\text{cm}$ توسط دو رابط قابل انعطاف در میدان مغناطیسی یکنواختی آویزان است (شکل ۲۴-۴۴). (الف) بزرگی و (ب) جهت (چپ یا راست) جریان مورد نیاز برای حذف نیروی کشش در رابطهای نگهدارنده چیست؟



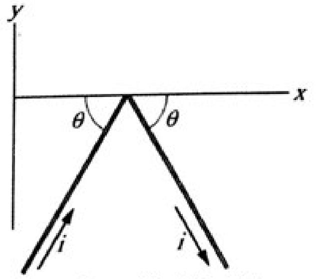
شکل ۲۴-۴۴ مسئلهٔ ۳۹

حل: (الف) نیروی مغناطیسی باید با نیروی گرانشی برابر باشد تا اثر وزن خنثی شود. یعنی

$$iLB = mg \Rightarrow i = \frac{mg}{LB}$$

$$i = \frac{(۱۳ \times ۱۰^{-۳})(۹/۸)}{(۰/۶۲)(۰/۴۴)} = ۰/۴۶۷\text{A}$$

●۴۰- سیم خمیدهٔ نشان داده شده در شکل ۲۴-۴۵ در میدان مغناطیسی یکنواختی قرار دارد. طول هر قسمت مستقیم ۲/۰m و با محور x زاویهٔ $\theta = ۶۰°$ می‌سازد و حامل جریان ۲/۰A است. اگر میدان مغناطیسی با (الف) $۴/۰\hat{k}\text{T}$ و (ب) $۴/۰\,\hat{i}\text{T}$ داده شود، نیروی مغناطیسی خالص وارد بر سیم برحسب بردار یکه چگونه است؟



شکل ۲۴-۴۵ مسئلهٔ ۴۰

حل: (الف) از تقارن در می‌یابیم که مولفهٔ x نیروی کل است. چون میدان در جهت $\hat{k}$ است از قاعده دست راست مشاهده می‌کنیم که نیرو در هر دو بخش در جهت $-\hat{j}$ است. پس نیروی کل حاصل برروی دو بخش برابر است با

$$F_y = ۲(iLB)\sin\left(\frac{\pi}{۲}-\theta\right) = ۲(۲)(۲)(۴)\sin ۳۰^\circ$$

$$= ۱۶N \quad \text{یا} \quad \vec{F}_{\text{کل}} = -۱۶\hat{j}\,N$$

ب) $B = ۴\hat{i}T$، در این حالت از قاعده دست راست مشاهده می‌کنیم که نیروی وارد برسیم سمت چپ در جهت $-\hat{k}$ و برای سیم سمت راست در جهت $+\hat{k}$ است و چون بزرگی آنها است لذا نیروی کل برابر صفر خواهد شد.

●۴۱- یک خط قدرت افقی از جنوب به شمال حامل جریان ۵۰۰۰ A است. میدان مغناطیسی زمین ($۶۰/۰\,\mu T$) به طرف شمال است و نسبت به افق به اندازهٔ $۷۰/۰^\circ$ به پایین تمایل دارد. (الف) بزرگی و (ب) جهت نیروی مغناطیسی وارد بر ۱۰۰m از سیم ناشی از میدان زمین را پیدا کنید. SSM

حل: (الف) $F = iLB\sin\theta = (۵۰۰)(۱۰۰)(۶۰\times۱۰^{-۶})\sin ۷۰^\circ$

$$=۲۸/۲N$$

ب) جهت نیرو نیز از قاعده دست راست به سوی غرب است.

●۴۲- سیمی به طول ۱/۸۰ m حامل جریان ۱۳/۰ A است و با میدان مغناطیسی یکنواختی به بزرگی $B = ۱/۵۰\,T$ زاویه $۳۵/۰^\circ$ می‌سازد. نیروی مغناطیسی وارد بر سیم را محاسبه کنید.

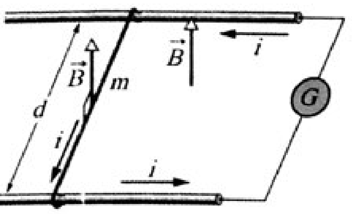
حل: $F = iLB\sin\theta = (۱۳)(۱/۸)(۱/۵)\sin ۳۵^\circ = ۲۰/۱۳\,N$

●۴۳- سیمی به طول ۵۰/۰ cm حامل جریان ۰/۵۰۰ A در جهت مثبت محور x در میدان مغناطیسی $\vec{B} = (۳/۰۰mT)\hat{j} + (۱۰/۰\,mT)\hat{k}$ است. برحسب بردار یکه، نیروی مغناطیسی وارد بر سیم چیست؟

حل: $\vec{F} = i\vec{L}\times\vec{B} = (۰/۵)(۰/۵\hat{i})\times(۳\times۱۰^{-۳}\,\hat{j} + ۱۰\times۱۰^{-۳}\,\hat{k})$

$$= (-۲/۵\times۱۰^{-۳}\,\hat{j} + ۰/۷۵\times۱۰^{-۳}\,\hat{k})N$$

●●۴۴- در شکل ۲۴-۴۶، یک سیم فلزی به جرم $m = ۲۴/۱$ mg می‌تواند روی دو ریل موازی افقی به فاصلهٔ $d = ۲/۵۶$cm از یکدیگر و با اصطکاک ناچیز بلغزد. این دستگاه در میدان مغناطیسی قائم یکنواختی با بزرگی ۵۶/۳ mT واقع است. در لحظهٔ $t = ۰$، وسیلهٔ G به ریلها وصل می‌شود که در سیم و ریلها جریان ثابت $i = ۹/۱۳$mA را ایجاد می‌کند (حتی در وقتی که سیم در حرکت است). در $t = ۶۱/۱$ ms (الف) تندی و (ب) جهت حرکت (چپ یا راست) سیم را پیدا کنید.



شکل ۲۴-۴۶ مسئلهٔ ۴۴

حل: (الف)

$$F = iLB = (۹/۱۳\times۱۰^{-۳})(۲/۵۶\times۱۰^{-۲})(۵۶/۳\times۱۰^{-۳})$$
$$= ۱/۳۲\times۱۰^{-۵}\,N$$
$$F = ma \Rightarrow ۱/۳۲\times۱۰^{-۵} = (۲۴/۱\times۱۰^{-۶})a \Rightarrow a = ۰/۵۴۸\,m/s^۲$$
$$v = at + v_۰ = (۰/۵۴۸)(۶۱/۱\times۱۰^{-۳}) + ۰ = ۰/۰۳۳۴\,m/s$$

ب) جهت نیرو و در نتیجه حرکت سیم به سمت چپ است.

●●●۴۵- یک میلهٔ مسی به جرم ۱/۰kg روی دو ریل افقی به فاصلهٔ ۱/۰m از یکدیگر قرار دارد و حامل جریان ۵۰A از یک ریل به ریل دیگر است. ضریب اصطکاک استاتیک میان میله و ریلها ۰/۶۰ است. (الف) بزرگی و (ب) زاویهٔ (نسبت به قائم) کمترین میدان مغناطیسی که میله را در آستانهٔ لغزش قرار می‌دهد چقدر است؟

حل: (الف) و (ب) برای اینکه میله به حرکت درآید باید مؤلفهٔ افقی میدان مغناطیسی بر نیروی اصطکاک غلبه کند. نیروهای وارد بر میله عبارتند از نیروی مغناطیسی F، نیروی وزن، نیروی عمودی سطح رو به بالای N و نیروی اصطکاک f. در آستانهٔ حرکت $f = \mu_s N$ است.

$$\sum F_x = ۰ \quad F\cos\theta - f = ۰ \Rightarrow F\cos\theta - \mu_s N = ۰$$
$$\sum F_y = ۰ \quad F\sin\theta + N - my = ۰ \Rightarrow N = mg - F\sin\theta$$

لذا خواهیم داشت:

$$F\cos\theta - \mu_s(mg - F\sin) = ۰ \Rightarrow F\frac{\mu_s mg}{\mu_s\sin\theta + \cos\theta}$$

از طرف دیگر $F = iLB$ است در نتیجه داریم:

$$B = \frac{\mu_s mg}{iL(\mu_s\sin\theta + \cos\theta)}$$

حال شرط کمینه بودن B نسبت به θ را می‌نویسیم

$$\frac{dB}{d\theta} = ۰ \Rightarrow \frac{-\mu_s mg(\mu\cos\theta - \sin\theta)}{iL(\mu_s\sin\theta + \cos\theta)^۲} = ۰$$
$$\Rightarrow \tan\theta = \mu_s = ۰/۶ \Rightarrow \theta = ۳۱^\circ$$
$$B_{\min} = \frac{(۰/۶)(۱)(۹/۸)}{(۵۰)(۱)(۰/۶\sin ۳۱^\circ + \cos ۳۱^\circ)} = ۰/۱\,T$$

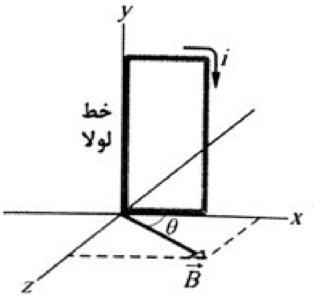
●●●۴۶- رسانای دراز صلبی که در امتداد محور x قرار دارد در جهت منفی x حامل جریان ۵/۰A است. میدان مغناطیسی موجود $\vec{B}$ با رابطهٔ $\vec{B} = ۳/۰\,\hat{i} + ۸/۰\,x^۲\hat{j}$ داده می‌شود که x برحسب متر و B برحسب میلی تسلاست. برحسب بردار یکه، نیروی وارد بر یک بخش ۲/۰ متری این رسانا را که میان $x = ۱/۰$m و $x = ۳/۰$m قرار دارد پیدا کنید.

حل:

$$d\vec{F} = i\vec{dl}\times\vec{B} = i(-dx\hat{i})\times(۳\hat{i} + ۸x^۲\hat{j})\times۱۰^{-۳} = -۰/۰۴x^۲dx\hat{k}$$
$$F = -۰/۰۴\int_۱^۳ x^۲dx\,\hat{k} = -۰/۰۳۵\,\hat{k}\,N$$

بخش ۲۴-۹ گشتاور نیروی وارد بر حلقهٔ جریان

●۴۷- شکل ۲۴-۴۷ یک پیچهٔ مستطیل شکل را با ۲۰ دور سیم به ابعاد ۱۰cm در ۵/۰cm نشان می‌دهد. این پیچه حامل جریان ۰/۱۰ A است و در یک طولش لولا شده است. پیچه در صفحهٔ xy قرار دارد و با جهت میدان مغناطیسی یکنواخت به بزرگی ۰/۵۰ T زاویهٔ $\theta = 30°$ می‌سازد. برحسب بردار یکه، گشتاور نیروی وارد بر پیچه نسبت به خط لولا چیست؟ SSM



شکل ۲۴-۴۷ مسئلهٔ ۴۷

حل: از معادله ۲۴-۳۷ داریم $\vec{\tau} = \vec{\mu} \times \vec{B}$ که در آن

$$\vec{\mu} = -NiA\hat{k} = -(20)(0/1)(0/05)(0/01)\hat{k} = -1\times10^{-4}\,\hat{k}$$

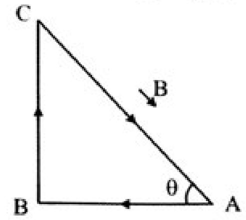
و

$$\vec{B} = B\cos\theta\,\hat{i} + B\sin\theta\,\hat{k} = (0/5)\cos30°\,\hat{i} + (0/5)\sin30°\,\hat{k}$$
$$= 0/43\,\hat{i} + 0/25\,\hat{k}$$

در نتیجه داریم:

$$\vec{\tau} = (-1\times10^{-4}\,\hat{k})\times(0/43\,\hat{i} + 0/25\hat{k})$$
$$= -4/3\times10^{-5}\,\hat{j}\ \mathrm{N\cdot m}$$

●۴۸- یک حلقهٔ جریان تک دور که از آن جریان ۴/۰۰A می‌گذرد به شکل یک مثلث قائم الزاویه به اضلاع ۵۰/۰، ۱۲۰ و ۱۳۰ سانتی‌متر است. این حلقه در میدان مغناطیسی یکنواختی به بزرگی ۷۵/۰ mT که جهت آن موازی با جریان در ضلع ۱۳۰ سانتی‌متری حلقه است قرار دارد. بزرگی نیروی مغناطیسی وارد بر (الف) ضلع ۱۳۰ سانتی‌متری، (ب) ۵۰/۰ سانتی‌متری و (پ) ۱۲۰ سانتی‌متری چقدر است؟



حل:

الف) میدان موازی ضلع CA است لذا نیروی بر این ضلع به طول ۱۳۰cm وارد نمی‌شود.

ب) نیروی وارد بر ضلع BA برابر است با

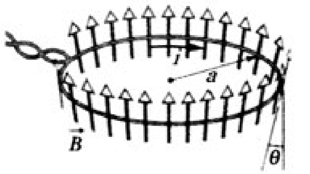
$$\vec{F}_{AB} = i[AB(-\hat{i})\times(B\cos\theta\,\hat{i} - B\sin\theta\,\hat{j})]$$
$$= i(AB)B\sin\theta\,\hat{k} = (4)(0/5)(75\times10^{-3})\left(\frac{120}{130}\right)\hat{k}$$
$$= 0/138\,\hat{k}\ \mathrm{N}$$

پ)
$$\vec{F}_{BC} = i[BC(\hat{j})\times(B\cos\theta\,\hat{i} - B\sin\theta\,\hat{j})]$$
$$= -i(BC)B\cos\theta\,\hat{k} = -(4)(1/20)(75\times10^{-3})\left(\frac{50}{130}\right)\hat{k}$$
$$= 0/138\,\hat{k}\ \mathrm{N}$$

ت) نیروی خالص وارد بر حلقه برابر صفر است

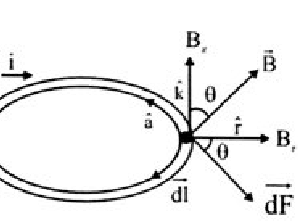
$$\vec{F} = \vec{F}_{AB} + \vec{F}_{BC} + \vec{F}_{CA} = 0$$

●●۴۹- شکل ۲۴-۴۸ یک حلقه سیم به شعاع $a = 1/8\,\mathrm{m}$ را نشان می‌دهد که بر جهت کلی یک میدان مغناطیسی واگرا و با تقارن شعاعی عمود است. بزرگی میدان مغناطیسی در همه جای حلقه یکسان و مساوی $B = 3/4\,\mathrm{mT}$ است و جهت آن در همه جای حلقه با خط عمود بر صفحهٔ حلقه زاویهٔ $\theta = 20°$ می‌سازد. سیمهای رابط پیچیده شده اثری در مسئله ندارند. اگر از حلقه جریان $i = 4/6\,\mathrm{mA}$ عبور کند، بزرگی و جهت نیرویی را که میدان بر حلقه وارد می‌کند پیدا کنید.



شکل ۲۴-۴۸ مسئلهٔ ۴۹

حل:



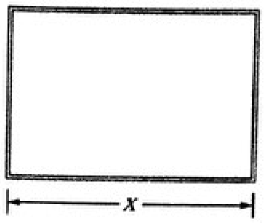
عنصر $d\vec{l}$ از حلقه را در نظر می‌گیریم. نیروی $d\vec{F}$ را به دو مؤلفه افقی $dF\cos\theta$ و قائم $dF\sin\theta$ تجزیه می‌کنیم. بنا به تقارن برآیند نیروی افقی وارد بر میله صفر است و فقط نیروی برآیند قائم بر حلقه اثر می‌کند

$$dF = i\,dl\,B\sin 90° = idlB$$
$$F_y = dF\sin\theta = iB\sin\theta\int_0^{2\pi a} dl = iB\sin\theta(2\pi a)$$

که با قرار دادن مقادیر داده شده خواهیم داشت $F_y = 6\times10^{-7}\,\mathrm{N}$ که عمود بر سطح حلقه و روبه پایین است.

●●۵۰- در شکل ۲۴-۴۹ حلقهٔ مستطیل شکلی که حامل جریان است در صفحهٔ میدان مغناطیسی یکنواختی با بزرگی ۰/۰۴۰T قرار دارد. این حلقه شامل یک دور سیم رسانای قابل انعطاف است که دور پایه‌ای قابل انعطاف پیچیده شده است به

طوری که ابعاد مستطیل می‌تواند تغییر کند. (طول کل سیم تغییر نمی‌کند).وقتی طول لبهٔ x تقریباً از صفر تا بیشینهٔ مقدار آن برابر ۴/۰cm تغییر کند، بزرگی گشتاور نیروی τ وارد بر حلقه تغییر می‌کند. بیشینهٔ مقدار τ برابر با $۴/۸۰\times۱۰^{-۸}$ N است. جریان در حلقه چقدر است؟



شکل ۲۴-۴۹ مسئلهٔ ۵۰

حل: با توجه به صورت مسئله که $x_{\max}=۴cm$ نتیجه می‌گیریم ضلع دیگر تقریباً به صفر نزدیک است و در واقع طول سیم l برابر $۲x_{\max}$ یعنی برابر $۸cm$ است. از طرف دیگر می‌دانیم مساحت زمانی بیشینه است که مستطیل به مربع تبدیل شود. پس در حالتی که مساحت بیشینه باشد مربعی داریم به اضلاع ۲cm و بیشینه گشتاور نیز داده شده لذا می‌توان جریان را از رابطه زیر به دست آورد:

$$\tau=\mu B=iAB$$

$$i=\frac{\tau}{AB}=\frac{۴/۸\times۱۰^{-۸}}{(۰/۰۲)^۲(۰/۰۴)}=۰/۰۰۳\ A$$

●●۵۱- مقاومت پیچهٔ گالوانومتری (به مسئله نمونهٔ ۲۴-۷ نگاه کنید) ۷۵/۳Ω است؛ وقتی جریان ۱/۶۲mA از پیچه می‌گذرد عقربهٔ آن به طور کامل منحرف می‌شود. (الف) مقدار مقاومت کمکی مورد نیاز جهت تبدیل گالوانومتر به یک ولت‌سنج که در انحراف کامل مقدار ۱/۰۰V را نشان دهد چقدر است؟ (ب) این مقاومت باید با گالوانومتر به طور متوالی وصل شود یا موازی؟ (پ) مقدار مقاومت کمکی مورد نیاز جهت تبدیل گالوانومتر به یک آمپرسنج که در انحراف کامل مقدار ۵۰/۰mA را نشان دهد چقدر است؟ (ت) این مقاومت باید به طور متوالی وصل شود یا موازی؟

حل: هنگامی که عقربه انحراف کامل دارد اختلاف پتانسیل دو سر گالوانومتر برابر است با

$$V_G=R_Gi=(۷۵/۳)(۱/۶۲\times۱۰^{-۳})=۰/۱۲۲\ V$$

که مشاهده می‌شود کمتر از ۱ V است پس باید یک مقاومت کمکی به طور متوالی به گالوانومتر بسته شود.

$$V=i(R_G+R)\Rightarrow ۱=(۱/۶۲\times۱۰^{-۳})(۷۵/۳+R)\Rightarrow R=۵۴۲\Omega$$

(ب) و (پ) وقتی جریان کل ۰/۵A است و جریان در گالوانومتر $۱/۶۲\times۱۰^{-۳}$ A است نتیجه می‌گیریم مقاومت کمکی باید به طور موازی بسته شود. در چنین حالتی جریان در دو شاخه تقسیم می‌شود و در رابطه $R_Gi_۱=Ri_۲$ و $i_{کل}=i_۱+i_۲$ را

داریم که با ترکیب دو معادله و حل آن برای R خواهیم داشت

$$R=۲/۵۲\Omega$$

●●۵۲- الکترونی با تندی $۲/۱۹\times۱۰^۶$ m/s روی دایره‌ای به شعاع $r=۵/۲۹\times۱۰^{-۱۱}$m حرکت می‌کند. این مسیر دایره‌ای را به صورت یک حلقهٔ جریان با جریان ثابت برابر با نسبت بزرگی بار الکترون به دورهٔ تناوب حرکت در نظر بگیرید. اگر دایره در میدان مغناطیسی یکنواختی با بزرگی $B=۷/۱۰$ mT قرار گیرد، بیشینهٔ بزرگی ممکن گشتاور نیروی ایجاد شده توسط میدان روی حلقه چقدر است؟

حل: داریم $T=\frac{۲\pi r}{v}$ و

$$i=\frac{q}{t}=\frac{q}{T}=\frac{q}{۲\pi r}$$

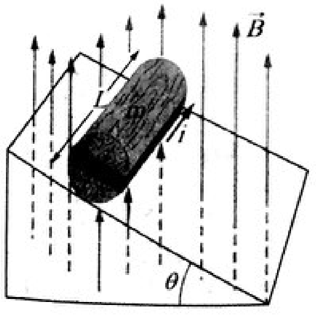
$$\tau_{\max}=\left|\vec{\mu}\times\vec{B}\right|_{\max}=\mu B=i\pi r^۲B=\frac{qv}{۲\pi r}\pi r^۲B$$

$$\tau_{\max}=\frac{۱}{۲}qvrB$$

$$=\frac{۱}{۲}(۱/۶\times۱۰^{-۱۹})(۲/۱۹\times۱۰^۶)(۵/۲۹\times۱۰^{-۱۱})(۷/۱\times۱۰^{-۳})$$

$$=۶/۵۸\times۱۰^{-۲۶}\ N\cdot m$$

●●۵۳-شکل ۲۴-۵۰ یک استوانهٔ چوبی به جرم $m=۰/۲۵۰$ kg و طول $L=۰/۱۰۰$m را نشان می‌دهد که $N=۱۰/۰$ دور سیم در امتداد طول به دور آن پیچیده شده است، به طوری که صفحهٔ پیچهٔ سیم محور استوانه را شامل می‌شود. این استوانه روی سطح شیبداری با زاویهٔ θ نسبت به راستای افقی، با صفحهٔ پیچه موازی با سطح شیبدار رها می‌شود. اگر بزرگی میدان مغناطیسی یکنواخت ۰/۵۰۰T باشد، کمترین جریان در پیچه باید چقدر باشد تا مانع از غلتیدن استوانه به طرف پایین شود؟



شکل ۲۴-۵۰ مسئلهٔ ۵۳

حل: از مکانیک و مبحث غلتش می‌دانیم که برای غلتش وجود اصطکاک ایستایی لازم است که در اینجا نیروی اصطکاک گشتاور نیروی $\vec{r}\times\vec{f_s}$ را ایجاد می‌کند. از طرف دیگر یک ناب حامل جریان داریم که حول محور در یک میدان مغناطیسی یکنواخت می‌چرخد و گشتاور نیروی $\vec{\mu}\times\vec{B}$ را داریم که این دو گشتاور نیرو باید یکدیگر را خنثی کنند، یعنی:

$\vec{\mu}\times\vec{B}=\vec{r}\times\vec{f}_s \Rightarrow Ni\vec{A}\times\vec{B}=\vec{r}\times\vec{f}_s$

و از

$Ni(۲rL)B\sin\theta = rf_s = r(mg\sin\theta)$

$\Rightarrow i=\frac{mg}{۲NLB}=\frac{(۰/۲۵)(۹/۸)}{۲(۱۰)(۰/۱)(۰/۵)}=۲/۴۵\,A$

بخش ۲۴-۱۰ گشتاور دو قطبی مغناطیسی

●۵۴- یک حلقهٔ سیمی دایره‌ای به شعاع ۱۵/۰ cm حامل جریان ۲/۶۰ A است. این حلقه طوری قرار گرفته است که بردار عمود بر صفحهٔ آن با میدان مغناطیسی یکنواخت با بزرگی ۱۲/۰ T زاویهٔ ۴۱/۰° می‌سازد. (الف) بزرگی گشتاور دو قطبی مغناطیسی حلقه را محاسبه کنید. (ب) بزرگی گشتاور نیروی وارد بر حلقه چقدر است؟

حل:

الف) $\mu=iA=i\pi r^2=(۲/۶)(۳/۱۴)(۰/۱۵)^۲=۰/۱۸۴\,A\cdot m^2$

ب) $\tau=\mu B\sin\theta=(۰/۱۸۴)(۱۲)\lim ۴۱^\circ=۱/۴۵\,N\cdot m$

●۵۵- شعاع یک پیچهٔ دایره‌ای با ۱۶۰ دور برابر با ۱/۹۰ cm است. (الف) جریانی را که باعث ایجاد گشتاور دو قطبی مغناطیسی با بزرگی ۲/۳۰ A.m² می‌شود محاسبه کنید. (ب) بیشینهٔ بزرگی گشتاوری را که به پیچهٔ حامل این جریان در میدان مغناطیسی یکنواخت ۳۵/۰ mT وارد می‌شود پیدا کنید.
SSM

حل:

الف) $\mu=NiA=Ni\pi r^2$

$۲/۳=(۱۶۰)i(۳/۱۴)(۰/۰۹)^۲ \Rightarrow i=۱۲/۷A$

ب) $\tau=\mu B=(۲/۳)(۳۵\times۱۰^{-۳})=۸/۰۵\times۱۰^{-۲}\,N\cdot m$

●۵۶- بزرگی گشتاور دوقطبی مغناطیسی زمین $۸/۰۰\times۱۰^{۲۲}$ J/T است. فرض کنید که این گشتاور بر اثر بارهایی که در قسمت بیرونی هستهٔ مذاب زمین حرکت می‌کنند ایجاد می‌شود. اگر شعاع مسیر دایره‌ای این بارها ۳۵۰۰ km باشد، جریانی را که ایجاد می‌کنند محاسبه کنید.

حل: $\mu=iA=i\pi r^2 \Rightarrow ۸\times۱۰^{۲۲}=i(۳/۱۴)(۳۵۰۰\times۱۰^۳)$

$\Rightarrow i=۲/۰۸\times۱۰^۹\,A$

●۵۷- ضلعهای یک حلقهٔ حامل جریان ۵/۰ A به شکل مثلث قائم الزاویه برابر ۳۰، ۴۰ و ۵۰ سانتی‌متر است. این حلقه در میدان مغناطیسی یکنواختی به بزرگی ۸۰ mT واقع است که جهت آن با جریان در ضلع ۵۰ سانتی‌متر حلقه موازی است. بزرگی (الف) گشتاور دو قطبی مغناطیسی حلقه و (ب) گشتاور نیروی وارد بر حلقه را پیدا کنید.

حل: (الف) $A=\frac{۱}{۲}(۰/۳)(۰/۴)=۰/۰۶\,m^2$

$\mu=iA=(۵)(۰/۰۶)=۰/۳\,A\cdot m^2$

ب) $\tau=\mu B\sin\theta=(۰/۳)(۸۰\times۱۰^{-۳})\sin۹۰^\circ=۰/۰۲۴\,N\cdot m$

●۵۸- یک دو قطبی مغناطیسی با گشتاور دو قطبی با بزرگی ۰/۰۲ J/T در میدان مغناطیسی یکنواختی به بزرگی ۵۲mT از حالت سکون رها می‌شود. از چرخش دو قطبی به واسطهٔ نیروی مغناطیسی وارد بر آن نمی‌توان جلوگیری کرد. وقتی که این دو قطبی به اندازه‌ای که گشتاور دو قطبی آن در جهت میدان مغناطیسی است می‌چرخد، انرژی جنبشی آن برابر ۰/۸۰mJ است. (الف) زاویهٔ اولیهٔ میان گشتاور دو قطبی و میدان مغناطیسی چقدر است؟ (ب) وقتی دو قطبی (به طور لحظه‌ای) بعداً به سکون می‌رسد این زاویه چقدر است؟

حل: از پایستگی انرژی داریم

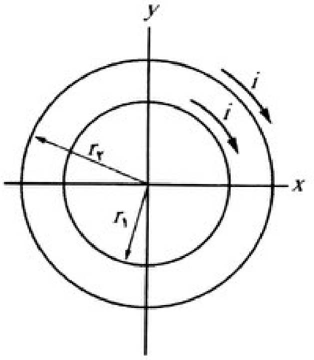
$k_i+U_i=k_f+U_f$

$۰-\mu B\cos\theta=۰/۸\times۱۰^{-۳}-\mu B\cos۹۰^\circ$

$-(۰/۰۲)(۰/۰۵۲)\cos\theta=۰/۸\times۱۰^{-۳}-(۰/۰۲)(۰/۰۵۲)$

$\cos\theta=۰/۲۳۱\Rightarrow\theta=۷۶/۶^\circ$

✓ ●۵۹- دو حلقه سیم دایره‌ای شکل هم مرکز به شعاعهای $r_۱=۲۰/۰$ cm و $r_۲=۳۰/۰$ cm واقع در صفحهٔ xy، هر یک حامل جریان ساعتگرد ۷/۰۰A هستند (شکل ۲۴-۵۱). (الف) بزرگی گشتاور دو قطبی مغناطیسی خالص را پیدا کنید. (ب) اگر در حلقهٔ داخلی جریان معکوس شود محاسبه را تکرار کنید.
SSM



شکل ۲۴-۵۱ مسئله ۵۹

حل: (الف) جریانها هم جهت‌اند، گشتاورهای دو قطبی مغناطیسی با هم جمع می‌شوند.

$\mu=\mu_۱+\mu_۲=iA_۱+iA_۲=i\pi(r_۱^۲+r_۲^۲)$

$=(۷)(۳/۱۴)[(۰/۲)^۲+(۰/۳)^۲]=۲/۸۶\,A\cdot m^2$

و جهت به سوی داخل صفحه است

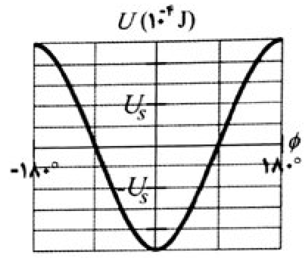
ب) در این حالت داریم:

$\mu=\mu_۲-\mu_۱=i\pi(r_۲^۲-r_۱^۲)$

$\mu=(۷)(۳/۱۴)[(۰/۳)^۲-(۰/۲)^۲]=۱/۱\,A\cdot m$

و جهت در کل باز هم به سوی داخل صفحه است.

●●۶۰- شکل ۲۴-۵۲ انرژی پتانسیل U یک دو قطبی مغناطیسی واقع در میدان مغناطیسی خارجی $\vec{B}$ را بر حسب زاویهٔ ϕ میان جهتهای $\vec{B}$ و گشتاور دو قطبی نشان می‌دهد. مقیاس محور قائم با $U_s = ۲/۰\times۱۰^{-۴}$ J مشخص شده است. این دو قطبی می‌تواند برای تغییر ϕ، حول محوری با اصطکاک ناچیز بچرخد. چرخش پاد ساعتگرد از $\phi=۰$ مقدارهای مثبت ϕ و چرخش ساعتگرد مقدارهای منفی به دست می‌دهد. دو قطبی در زاویهٔ $\phi=۰$ با انرژی جنبشی چرخشی $۶/۷\times۱۰^{-۴}$ J در جهت چرخش پاد ساعتگرد رها می‌شود. دو قطبی تا چه مقدار بیشینهٔ ϕ خواهد چرخید؟ (به بیان بخش ۸-۶، نقطهٔ برگشت در چاه پتانسیل شکل ۲۴-۵۲ در چه مقدار ϕ است؟) GO



شکل ۲۴-۵۲ مسئلهٔ ۶۰

حل: داریم $U=-\vec{\mu}\cdot\vec{B}=-\mu B\cos\phi$. با توجه به نمودار انرژی مکانیکی در $\phi=۰$ برابر است با

$$K+U=K_۰-\mu B=۶/۷\times۱۰^{-۴}-۵\times۱۰^{-۴}$$
$$=۱/۷\times۱۰^{-۴}\ \text{J}$$

در نقطه برگشت $K=۰$ است لذا در نقطه برگشت $U=۱/۷\times۱۰^{-۴}$ J است و از آنجا می‌توان ϕ را بدست آورد.

$$U=-\mu B\cos\phi$$
$$۱/۷\times۱۰^{-۴}=-(۵\times۱۰^{-۴})\cos\phi\Rightarrow\phi=۹۹/۹^\circ$$

●●۶۱- یک حلقه سیم دایره‌ای شکل به شعاع $۸/۰$cm حامل جریان $۰/۲۰$A است. بردار یکهٔ موازی با گشتاور دو قطبی $\vec{\mu}$ با $۰/۶۰\hat{i}-۰/۸۰\hat{j}$ داده شده است. اگر حلقه در میدان مغناطیسی یکنواخت $\vec{B}=(۰/۲۵\text{T})\hat{i}+(۰/۳۰\text{T})\hat{k}$ قرار گیرد، (الف) گشتاور نیروی وارد بر حلقه (برحسب بردار یکه) و (ب) انرژی پتانسیل مغناطیسی حلقه را پیدا کنید.

حل: (الف) ابتدا $\vec{\mu}$ را بدست می‌آوریم

$$\mu=iA=i\pi r^۲=(۰/۲)(۳/۱۴)(۰/۰۸)^۲=۴/۰۲\times۱۰^{-۳}\ \text{A}\cdot\text{m}^۲$$
$$\vec{\mu}=\mu(۰/۶\hat{i}-۰/۸\hat{j})=۴/۰۲\times۱۰^{-۳}\ (۰/۶\hat{i}-۰/۸\hat{j})$$

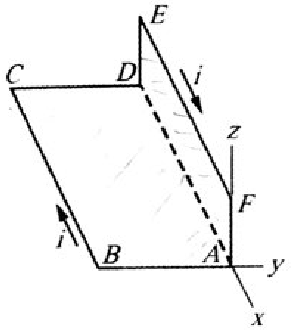
در نتیجه داریم:

$$\vec{\tau}=\vec{\mu}\times\vec{B}=(۴/۰۲\times۱۰^{-۳})\begin{vmatrix}\hat{i}&\hat{j}&\hat{k}\\ ۰/۶&-۰/۸&۰\\ ۰/۲۵&۰&۰/۳\end{vmatrix}$$
$$=(-۹/۷\times۱۰^{-۴}\ \hat{i}-۷/۲\times۱۰^{-۴}\ \hat{j}+۸/۰\times۱۰^{-۴}\ \hat{k})\text{N}\cdot\text{m}$$

ب)

$$U=-\vec{\mu}\cdot\vec{B}=-(۴/۰۲\times۱۰^{-۳})(۰/۶\hat{i}-۰/۸\hat{j})\cdot(۰/۲۵\hat{i}+۰/۳\hat{k})$$
$$=-۶/۰\times۱۰^{-۴}\ \text{J}$$

●●۶۲- شکل ۲۴-۵۳ حلقهٔ جریان $ABCDEFA$ را نشان می‌دهد که حامل جریان $i=۵/۰۰$A است. ضلعهای حلقه با محورهای نشان داده شده موازی‌اند و $AB=۲۰/۰$cm، $BC=۳۰/۰$cm و $FA=۱۰/۰$cm. گشتاور دو قطبی مغناطیسی این حلقه برحسب بردار یکه چیست؟ (*راهنمایی:* دو جریان یکسان و مخالف i را در قسمت AD در نظر بگیرید، سپس مسئله را برای دو حلقهٔ مستطیلی $ABCDA$ و $ADEFA$ حل کنید.)



شکل ۲۴-۵۳ مسئلهٔ ۶۲

حل: با توجه به راهنمایی مسئله می‌توان مدار را شامل دو حلقه در نظر گرفت چون از AD دو جریان می‌گذرد که یکدیگر را خنثی می‌کنند. دو حلقه $ABCDA$ و $ADEFA$ را در نظر می‌گیریم که بنا بر قاعده پیچه دست گشتاور دو قطبی آنها به ترتیب در جهت $-\hat{k}$ و $+\hat{j}$ است. در نتیجه می‌توان نوشت

$$\vec{\mu}=\vec{\mu}_۱+\vec{\mu}_۲=(۵)(۰/۲\times۰/۳)(-\hat{k})+(۰/۵)(۰/۱\times۰/۳)(\hat{j})$$
$$=(۰/۱۵\hat{j}-۰/۳۰\hat{k})\text{A}\cdot\text{m}^۲$$

و بزرگی آن برابر است با:

$$\mu=\sqrt{(۰/۱۵)^۲+(-۰/۳۰)^۲}=۰/۳۳۵\ \text{A}\cdot\text{m}^۲$$

●●۶۳- سیمی به طول $۲۵/۰$ cm که حامل جریان $۴/۵۱$ mA است باید به شکل یک پیچهٔ دایره‌ای شکل درآمده و در میدان مغناطیسی یکنواخت B با بزرگی $۵/۷۱$mT قرار داده شود. اگر گشتاور نیروی وارد بر پیچه از میدان بیشینه شود، (الف) زاویهٔ میان $\vec{B}$ و گشتاور دو قطبی مغناطیسی پیچه و (ب) تعداد دورهای پیچه چقدر است؟ (پ) بزرگی این بیشینهٔ گشتاور نیرو چقدر است؟ SSM ILW

حل: هرگاه از سیمی به طول L، N دور حلقه درست کنیم، شعاع هر حلقه برابر است با:

$$L=N۲\pi R\Rightarrow R=\frac{L}{۲\pi N}$$

و مساحت هر حلقه نیز برابر است با:

$$A = \pi R^۲ = \frac{L^۲}{۴\pi N^۲}$$

الف) شرط بیشینه بودن گشتاور نیرو این است که زاویه بین $\vec{B}$ و $\vec{\mu}$ ، ۹۰° باشد.

ب)

$$\mu = NiAB = \frac{iL^۲B}{۴\pi N}$$

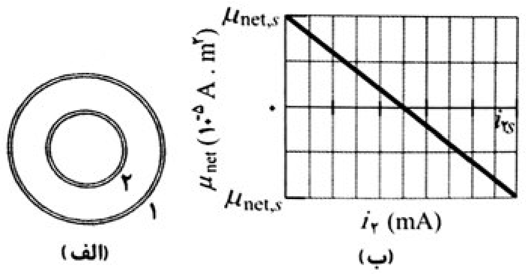
وقتی $N = ۱$ باشد μ بیشینه است.

پ)

$$\mu = \frac{iL^۲B}{۴\pi} = \frac{(۴/۵\times۱۰^{-۳})(۰/۲۵)^۲(۵/۷۱\times۱۰^{-۳})}{۴(۳/۱۴)}$$

$$= ۱/۲۸\times۱۰^{-۷}\ N\cdot m$$

●●۶۴- در شکل ۲۴-۵۴ الف، دو پیچهٔ هم مرکز که در یک صفحه واقع‌اند حامل جریانهایی در جهت مخالف یکدیگرند. جریان در پیچهٔ بزرگتر ۱ ثابت است. جریان $i_۲$ در پیچهٔ ۲ می‌تواند تغییر کند. شکل ۲۴-۵۴ ب گشتاور مغناطیسی خالص دو پیچه را بر حسب تابعی از $i_۲$ به دست می‌دهد. مقیاس محور عمودی با $\mu_{net,s} = ۲/۰\times۱۰^{-۵}\ A.m^۲$ ، و مقیاس محور افقی با $i_{۲s=۱۰/۰mA}$ مشخص شده‌اند. اگر جریان در پیچهٔ ۲ معکوس شود، بزرگی گشتاور مغناطیسی دو پیچه وقتی $i_۲ = ۷/۰\ mA$ باشد چقدر است؟



شکل ۲۴-۵۴ مسئله ۶۴

حل: با توجه به نمودار به ازای $i_۲ = ۵mA$ ، $\mu_t = ۰$ در نتیجه

$$|\mu_۱| = |\mu_۲| \Rightarrow i_۱N_۱A_۱ = i_۲N_۲A_۲$$

$$\Rightarrow i_۱N_۱A_۱ = (۵\times۱۰^{-۳})N_۲A_۲$$

به ازای $t_۲ = ۷\times۱۰^{-۳}\ A$ ، $\mu_t = -۰/۸\times۱۰^{-۵}\ A\cdot m^۲$ در نتیجه

$$-۰/۸\times۱۰^{-۵} = i_۱N_۱A_۱ - ۷\times۱۰^{-۳}\ N_۲A_۲$$

$$= (۵\times۱۰^{-۳})N_۲A_۲ - ۷\times۱۰^{-۳}\ N_۲A_۲$$

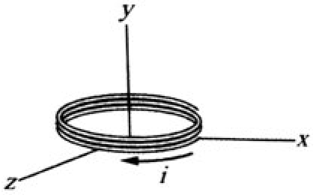
$$\Rightarrow N_۲A_۲ = ۴\times۱۰^{-۳}$$

$$\mu_۲ = i_۲N_۲A_۲ = (۵\times۱۰^{-۳})(۴\times۱۰^{-۳}) = ۲/۸\times۱۰^{-۵}\ A\cdot m^۲$$

مجدداً با توجه به نمودار مشاهده می‌کنیم که به ازای $i_۲ = ۰$ ، $\mu_۲ = ۰$ و در نتیجه $\mu_۱ = ۲/۰\times۱۰^{-۵}\ A\cdot m^۲$ است لذا خواهیم داشت:

$$\mu = \mu_۱ + \mu_۲ = ۲/۰\times۱۰^{-۵} + ۲/۸\times۱۰^{-۵} = ۴/۵\times۱۰^{-۵}\ A\cdot m^۲$$

●●۶۵- پیچهٔ شکل ۲۴-۵۵ حامل جریان $i = ۲/۰۰A$ است و در جهت نشان داده شده موازی با صفحهٔ xy دارای ۳/۰۰ دور و مساحت $۴/۰۰\times۱۰^{-۳}\ m^۲$ است و در میدان مغناطیسی یکنواخت $\vec{B} = (۲/۰۰\hat{i} - ۳/۰۰\hat{j} - ۴/۰\hat{k})mT$ قرار دارد. (الف) انرژی پتانسیل مغناطیسی پیچه- میدان مغناطیسی و (ب) گشتاور نیروی مغناطیسی وارد بر پیچه (برحسب بردار یکه) را پیدا کنید.



شکل ۲۴-۵۵ مسئله ۶۵

حل: (الف) ابتدا $\vec{\mu}$ را حساب می‌کنیم

$$\vec{\mu} = Ni\,A(-\hat{j}) = -(۳)(۲)(۴\times۱۰^{-۳})\hat{j} = -۰/۰۲۴\hat{j}\ A\cdot m^۲$$

حال از رابطه زیر انرژی پتانسیل مغناطیسی به دست می‌آید:

$$U = -\vec{\mu}\cdot\vec{B} = -(-۰/۰۲۴\hat{j})\cdot(۲\times۱۰^{-۳}\ \hat{i} - ۳\times۱۰^{-۳}\ \hat{j} - ۴\times۱۰^{-۳}\ \hat{k})$$

$$= -۷/۲\times۱۰^{-۵}\ J$$

ب)

$$\vec{\tau} = \vec{\mu}\times\vec{B} = (-۰/۰۲۴\hat{j})\times(۲\times۱۰^{-۳}\ \hat{i} - ۳\times۱۰^{-۳}\ \hat{j} + ۴\times۱۰^{-۳}\ \hat{k})$$

$$= (۹/۶\times۱۰^{-۵} + ۴/۸\times۱۰^{-۵}\ \hat{k})\ N\cdot m$$

مسئله‌های اضافی

۶۶- سیمی که در امتداد محور y از $y = ۰$ تا $y = ۰/۲۵۰\ m$ قرار دارد حامل جریان ۲/۰۰mA در جهت منفی محور است. این سیم به طور کامل در میدان مغناطیسی غیر یکنواختی قرار دارد که با $\vec{B} = (۰/۳۰۰T/m)\,y\hat{i} + (۰/۴۰۰T/m)y\hat{j}$ داده شده است. نیروی مغناطیسی وارد بر سیم را برحسب بردار یکه را پیدا کنید.

حل:

$$d\vec{F} = id\vec{l}\times\vec{B}$$

$$d\vec{l} = dy(-\hat{j}) \qquad \vec{B} = ۰/۳y\hat{i} + ۰/۴y\hat{j}$$

$$d\vec{F} = idy(-\hat{j})\times(۰/۳y\hat{i} + ۰/۴y\hat{j}) = ۶\times۱۰^{-۴}\ ydy\ \hat{k}$$

$$F = \hat{k}(۶\times۱۰^{-۴})\int_۰^{۰/۲۵} ydy = ۱/۸۷\times۱۰^{-۵}\ \hat{k}\ \ N$$

۶۷- فیزیکدانی به نام گوداشمیت[1] روشی برای اندازه‌گیری دقیق جرم یونهای سنگین با سنجش دورهٔ چرخش آنها در یک میدان مغناطیسی معلوم ابداع کرده است. یون یک بار یونیدهٔ ید در مدت زمان ۱/۲۹ms در میدان مغناطیسی ۴۵/۰ mT به اندازهٔ ۷/۰۰ دور می‌چرخد. جرم آن را برحسب یکای جرم اتمی حساب کنید.

1. S.A. Goudsmit

حل:

$$T=\frac{1/29\times10^{-3}}{7}=1/84\times10^{-4}\,\text{s}$$

$$m\frac{v^2}{r}=qvB\Rightarrow mw=qB\Rightarrow m\frac{2\pi}{T}=qB$$

$$m=\frac{TqB}{2\pi}=\frac{(1/84\times10^{-4})(1/6\times10^{-19})(45\times10^{-3})}{2(3/14)}$$

$$=2/11\times10^{-25}\,\text{kg}=\frac{2/11\times10^{-25}}{1/66\times10^{-27}}=127\,u$$

۶۸- الکترونی در لامپ تصویر یک تلویزیون قدیمی در میدان مغناطیسی باشدت ۸۳/۰ mT با سرعت $7/20\times10^{6}$ m/s حرکت می‌کند. (الف) بیشینه و (ب) کمینهٔ بزرگی نیروی وارد بر الکترون از طرف میدان چقدر است؟ (پ) در نقطه‌ای شتاب الکترون $4/90\times10^{14}$ m/s² است. زاویهٔ میان سرعت الکترون و میدان مغناطیسی چقدر است؟

حل: (الف) داریم $F=qvB\sin\theta$ و بیشینه نیرو وقتی حاصل می‌شود که $\sin\theta=1$ باشد

$$F_{\max}=qvB=(1/6\times10^{-19})(7/2\times10^{6})(83\times10^{-19})$$

$$=9/56\times10^{-14}\,\text{N}$$

ب) کمینه نیرو وقتی حاصل می‌شود که حرکت در راستای میدان باشد یعنی $\sin\theta=0$ و در نتیجه $F_{\min}=0$ است.

پ) $F=ma=(9/11\times10^{-31})(4/9\times10^{14})=4/46\times10^{-16}\,\text{N}$

$$F=qvB\sin\theta\Rightarrow 4/46\times10^{-16}=9/56\times10^{-14}\sin\theta$$

$$\Rightarrow\theta=0/267^\circ$$

۶۹- یک ساعت دیواری دایره‌ای ساکن دارای صفحه‌ای به شعاع ۱۵cm است. شش دور سیم روی پیرامون آن پیچیده شده است؛ این سیم حامل جریان ۲/۰A در جهت ساعتگرد است. ساعت در جایی قرار دارد که میدان مغناطیسی خارجی یکنواختی با بزرگی ۷۰mT وجود دارد (اما ساعت هنوز دقیق کار می‌کند). عقربهٔ ساعت شمار در ساعت ۱:۰۰ بعد از ظهر دقیقاً در جهت میدان مغناطیسی خارجی قرار دارد. (الف) عقربهٔ دقیقه شمار پس از چند دقیقه در جهت گشتاور نیروی وارد بر سیم‌پیچ بر اثر میدان مغناطیسی قرار می‌گیرد؟ (ب) بزرگی گشتاور نیرو را پیدا کنید.

حل: (الف) با توجه به رابطه $\vec{\tau}=\vec{\mu}\times\vec{B}$، چون جریان ساعتگرد است لذا روی $\vec{\mu}$ به سمت داخل یعنی به سمت دیوار است. چون جهت میدان مغناطیسی به سوی ساعت ۱ است و $\vec{\tau}$ طبق قاعده ضرب برداری باید بر آن عمود باشد لذا $\vec{\tau}$ باید به سوی ساعت ۴ باشد و در نتیجه بازهٔ زمانی ۲۰ دقیقه خواهد بود.

ب) $\tau=\mu B\sin90^\circ=NiAB=Ni\pi r^2B$

که با قرار دادن مقادیر داده شد داریم $\tau=5/94\times10^{-2}\,N\cdot m$.

۷۰- در آزمایش اثر هال، جریان ۳/۰ A از رسانایی به پهنای ۱/۰ cm و طول ۴/۰cm و ضخامت ۱۰μm عبور می‌کند و وقتی میدان مغناطیسی ۱/۵T به طور عمود از ضخامت رسانا می‌گذرد یک اختلاف پتانسیل عرضی هال (در پهنا) برابر با ۱۰ μV ایجاد می‌کند. از این داده‌ها، (الف) سرعت رانشی حاملهای بار و (ب) چگالی عددی حاملهای بار را پیدا کنید. (پ) روی نمودار قطبیت اختلاف پتانسیل هال را با جهتهای جریان و میدان مغناطیسی فرض شده و نیز با فرض اینکه حاملهای بار الکترون هستند نشان دهید.

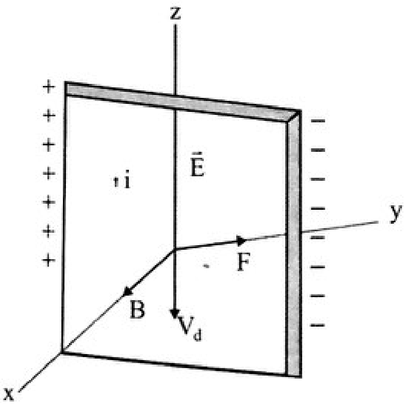
حل:

الف) $v_d=\dfrac{E_H}{B}=\dfrac{V_H}{Bd}=\dfrac{10\times10^{-6}}{(1/5)(1\times10^{-2})}=6/7\times10^{-4}\,\text{m/s}$

ب) $J=nev_d\Rightarrow\dfrac{i}{A}=nev_d\Rightarrow n=\dfrac{i}{Aev_d}=3$

$$n=\frac{3}{(1\times10^{-7})(1/6\times10^{-19})(6/7\times10^{-4})}=2/8\times10^{29}\,\text{m}^3$$

پ)



۷۱- اتم ۱ به جرم ۳۵u و اتم ۲ به جرم ۳۷u هر دو با بار +e یک بار یونیده‌اند. پس از ورود آنها به یک طیف‌سنج جرم (شکل ۲۴-۱۴) و شتاب گرفتن آنها با اختلاف پتانسیل V = ۷/۳kV از حالت سکون، هر یون در مسیری دایره‌ای در میدان مغناطیسی یکنواخت $B=0/50$ T حرکت می‌کند. فاصلهٔ Δx میان نقطه‌هایی که یونها با آشکارساز برخورد می‌کنند چقدر است؟

حل: $K=U\Rightarrow\dfrac{1}{2}mv^2=eV\Rightarrow v=\sqrt{\dfrac{2eV}{m}}$

$$m\frac{v^2}{r}=qvB\Rightarrow r=\sqrt{\frac{2mV}{eB^2}}$$

$$r_1=\sqrt{\frac{2(35\times1/66\times10^{-27})(7/3\times10^{3})}{(1/6\times10^{-19})(0/5)^2}}=1/456\times10^{-2}\,\text{m}$$

$$r_2=\sqrt{\frac{2(37\times1/66\times10^{-27})(7/3\times10^{3})}{(1/6\times10^{-19})(0/5)^2}}=1/497\times10^{-2}\,\text{m}$$

$$\Delta x=2(r_2-r_1)=8/2\times10^{-4}\,\text{m}$$

۷۲- الکترونی که با انرژی جنبشی ۲/۵ keV در امتداد جهت مثبت محور x حرکت می‌کند وارد ناحیه‌ای می‌شود که در آن میدان الکتریکی یکنواختی با بزرگی ۱۰ kV/m در جهت منفی محور y برقرار است. یک میدان مغناطیسی یکنواخت $\vec{B}$ برای حفظ حرکت الکترون در امتداد محور x برقرار و جهت $\vec{B}$ طوری انتخاب می‌شود که بزرگی مورد نیاز $\vec{B}$ را کمینه کند. برحسب بردار یکه $\vec{B}$ چگونه است؟

حل: $K=\frac{۱}{۲}mv^{۲} \Rightarrow ۴\times ۱۰^{-۱۶}=\left(\frac{۱}{۲}\right)(۹/۱۱\times ۱۰^{-۳۱})v^{۲}$

$$۴\times ۱۰^{-۱۶}=\left(\frac{۱}{۲}\right)(۹/۱۱\times ۱۰^{-۳۱})v^{۲} \Rightarrow v=۲/۹۶\times ۱۰^{۷}\ \text{m/s}$$

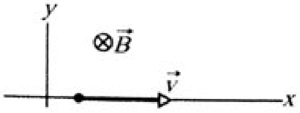
در اینجا باید نیروهای الکتریکی و مغناطیسی باید برابر هم و در جهت مخالف هم باشند

$$qE=qvB\sin ۹۰^{\circ} \Rightarrow B=\frac{E}{v}$$

$$B=\frac{۱۰\times ۱۰^{۳}}{۲/۹۶\times ۱۰^{۷}}=۳/۳۷\times ۱۰^{-۴}\ T$$

و جهت آن با توجه به جهت $\vec{v}$ و $\vec{E}$ باید به سوی $-\hat{k}$ باشد.

۷۳- در شکل ۲۴-۵۶، الکترونی با تندی $v=۱۰۰$ m/s در امتداد محور x در میدانهای الکتریکی و مغناطیسی یکنواخت حرکت می‌کند. جهت میدان مغناطیسی $\vec{B}$ به طرف داخل صفحه و بزرگی آن ۵/۰۰T است. میدان الکتریکی برحسب بردار یکه را پیدا کنید.



شکل ۲۴-۵۶ مسئلهٔ ۷۳

حل: چون میدانها یکنواخت و الکترون بر روی خط مستقیم حرکت می‌کند می‌توان نتیجه گرفت که تندی آن ثابت است یا در واقع برآیند نیروهای وارد بر آن صفر است

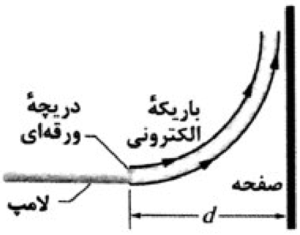
$$\vec{F}=q\vec{E}+q\vec{v}\times\vec{B}=۰ \Rightarrow \vec{E}=-\vec{v}\times\vec{B}$$

$$\vec{E}=-(۱۰۰\hat{i})\times(-۵\hat{k})=-۵۰۰\hat{j}\ \text{V/m}$$

۷۴- باریکه‌ای از الکترونها با انرژی جنبشی K از یک «دریچهٔ» نازک ورقه‌ای در انتهای یک لولهٔ شتابدهنده خارج می‌شود. یک صفحهٔ فلزی در فاصلهٔ d از این دریچه به طور عمود بر جهت باریکهٔ خروجی قرار دارد. (شکل ۲۴-۵۷). (الف) نشان دهید که اگر میدان مغناطیسی یکنواخت $\vec{B}$ را طوری برقرار کنیم که مقدار آن برابر با

$$B=\sqrt{\frac{۲mK}{e^{۲}d^{۲}}}$$

باشد، از برخورد باریکه با صفحه می‌توان جلوگیری کرد. در این رابطه m و e جرم و بار الکترون هستند. (ب) $\vec{B}$ باید در چه جهتی باشد؟



شکل ۲۴-۵۷ مسئلهٔ ۷۴

حل: (الف) و (ب)

$$m=\frac{v^{۲}}{r}=evB \Rightarrow r=\frac{mv}{eB}$$

اما می‌توان v را از $K=\frac{۱}{۲}mv^{۲}$ استخراج و جایگزین کرد که خواهیم داشت:

$$r=\frac{m}{eB}\sqrt{\frac{۲K}{m}}=\sqrt{\frac{۲mK}{e^{۲}B^{۲}}}$$

این شعاع باید کمتر از d باشد یعنی $\sqrt{\frac{۲mk}{e^{۲}B^{۲}}}\le d$ و در نتیجه باید $B\ge\sqrt{\frac{۲mk}{e^{۲}d^{۲}}}$ بوده و جهت آن باید به طرف خارج صفحه باشد.

۷۵- یک پروتون، یک دوترون $(q=+e\ ,\ m=۲/۰\text{u})$ و یک ذرهٔ آلفا $(q=+۲e\ ,\ m=۴/۰\text{u})$ با اختلاف پتانسیل یکسانی شتاب می‌گیرند و سپس وارد ناحیه‌ای از میدان مغناطیسی یکنواخت $\vec{B}$ می‌شوند و عمود بر $\vec{B}$ حرکت می‌کنند. نسبت (الف) انرژی جنبشی پروتون K_p به انرژی جنبشی ذرهٔ آلفا K_α و (ب) انرژی جنبشی دوترون K_d به K_α چقدر است؟ اگر شعاع مسیر دایره‌ای پروتون ۱۰ cm باشد، شعاع (پ) مسیر دوترون و (ت) مسیر ذرهٔ آلفا چقدر است؟ **SSM**

حل: (الف) چون $K=qV$ است لذا می‌توان دید که

$$\frac{K_p}{K_\alpha}=\frac{q_p}{q_\alpha}=\frac{۱}{۲}\Rightarrow K_p=\frac{۱}{۲}K_\alpha=۰/۵K_\alpha$$

ب) با بحث مشابه $K_d=۰/۵K_\alpha$

پ) $m\frac{v^{۲}}{r}=qvB\Rightarrow r=\frac{mv}{qB}$ یا $r=\frac{\sqrt{۲mK}}{qB}$

لذا می‌توان نوشت:

$$\frac{r_d}{r_p}=\frac{q_p}{q_d}\sqrt{\frac{m_dK_d}{m_pK_p}}\Rightarrow r_d=r_\alpha\sqrt{۲}=۱۰\sqrt{۲}=۱۴\text{cm}$$

ت) با روش مشابه داریم:

$$\frac{r_\alpha}{r_p}=\frac{q_p}{q_\alpha}\sqrt{\frac{m_\alpha K_\alpha}{m_pK_۲}}\Rightarrow r_\alpha=۱۴\text{cm}$$

۷۶- پروتونی با بار $+e$ و جرم m با سرعت اولیهٔ $\vec{v}=v_{\circ x}\hat{i}+v_{\circ y}\hat{j}$ وارد میدان مغناطیسی یکنواخت $\vec{B}=B\hat{i}$ می‌شود. عبارتی را برای سرعت $\vec{v}$ برحسب بردار یکه در هر لحظهٔ t پیدا کنید.

حل: با توجه به یکنواختی میدان، پروتون با سرعت $v_{\circ x}$ در جهت میدان حرکت می‌کند و در ضمن با تندی ثابت $v_{\circ y}$ شروع به دوران می‌کند، یعنی این‌که حرکت کلی پروتون مارپیچی است. می‌توان با کمک معادله نیرو رابطهٔ لازم برای سرعت را بدست آورد

$$\vec{F}=q\vec{v}\times\vec{B}\Rightarrow m\vec{a}=q\vec{v}\times\vec{B}$$
$$=m\left(\frac{dvx}{dt}\right)\hat{i}+m\left(\frac{dvy}{dt}\right)\hat{j}+m\left(\frac{dvz}{dt}\right)\hat{k}$$
$$=q(v_x\hat{i}+v_y\hat{j}+v_z\hat{k})\times(B\hat{i})$$
$$=qB(v_z\hat{j}-v_y\hat{k})$$

با توجه به رابطه $\omega=\frac{eB}{m}$ و برابر قرار دادن مؤلفه‌ها داریم

$$\frac{dv_x}{dt}=\circ \qquad \frac{dv_y}{dt}=\omega v_z \qquad \frac{dv_z}{dt}=-\omega v_y$$

از حل معادلهٔ اول $v_x=v_{\circ x}$ که بیانگر حرکت در راستای میدان است. برای حل دو معادله دیگر ابتدا از معادله دوم $v_z=\frac{۱}{\omega}\frac{dv_y}{dt}$ را در معادله سوم قرار داده و سپس با حل آن داریم

$$\frac{۱}{\omega}\frac{d}{dt}\left(\frac{dv_y}{dt}\right)=-\omega v_y\Rightarrow\frac{d^۲v_y}{dt}+\omega v_y=\circ$$

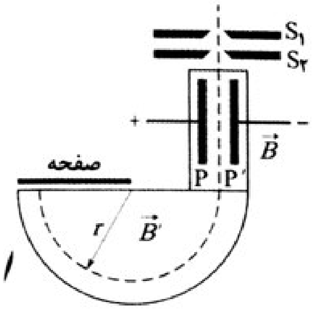
که این معادله حرکت یک نوسانگر ساده است و پاسخ آن $v_y=v_{\circ y}\cos\omega t$ (یا $v_y=v_{\circ y}\sin\omega t$) است و با قرار دادن مشتق آن در معادله دوم رابطه لازم برای v_z یعنی $v_z=-v_{\circ y}\sin wt$ به دست می‌آید. در نتیجه رابطه $\vec{v}$ بر حسب بردارها، چنین است.

$$\vec{v}=v_{\circ x}\hat{i}+v_{\circ y}\cos\omega t\,\hat{j}-v_{\circ y}\sin\omega t\,\hat{k}$$

۷۷- ذره‌ای به جرم $۶/۰\,\mathrm{g}$ با تندی $۴/۰\,\mathrm{km/s}$ در صفحهٔ xy در ناحیه‌ای با میدان مغناطیسی یکنواخت داده شده با $۵/۰\hat{i}\,\mathrm{mT}$ حرکت می‌کند. در یک لحظه، وقتی سرعت ذره در جهت ۳۷° نسبت به جهت مثبت محور x به طور پاد ساعتگرد قرار گرفته است، نیروی مغناطیسی وارد بر ذره $۰/۴۸\hat{k}\,\mathrm{N}$ است. بار ذره چقدر است؟ SSM

حل:
$$\vec{v}=(۴\times۱۰^۳)(\cos۳۷^\circ)\hat{i}+(۴\times۱۰^۳)(\sin۳۷^\circ)\hat{j}$$
$$=(۴\times۱۰^۳)(۰/۸\hat{i}+۰/۶\hat{j})$$
$$۰/۴۸\,\hat{k}=q(۱۲)(-\hat{k})\Rightarrow q=-۰/۰۴\mathrm{C}$$

۷۸- طیف سنجی که در شکل ۲۴-۵۸ نشان داده شده است، یونهایی را که دارای سرعت یکسانی هستند از هم جدا می‌کند. یونها پس از عبور از دو شکاف $S_۱$ و $S_۲$ از یک جداکنندهٔ سرعت عبور می‌کنند که مرکب از یک میدان الکتریکی است که به وسیلهٔ صفحه‌های باردار P و P' ایجاد می‌شود و یک میدان مغناطیسی $\vec{B}$ که عمود بر میدان الکتریکی و مسیر یون است. یونهایی که بدون انحراف از میدانهای عمود برهم $\vec{E}$ و $\vec{B}$ عبور می‌کنند وارد ناحیه‌ای می‌شوند که میدان مغناطیسی دوم $\vec{B}'$ وجود دارد و وادار می‌شوند که مسیرهایی دایره‌ای را طی کنند. یک صفحهٔ عکاسی ورود آنها را ثبت می‌کند. نشان دهید برای یونها $q/m=E/rBB'$ که در آن r شعاع مدار دایره‌ای است.



شکل ۲۴-۵۸ مسئلهٔ ۷۸

حل: در عبور از میان دو صفحه P و P' داریم:

$$qE=qvB\Rightarrow v=\frac{E}{B}$$

در دوران در میدان B' داریم:

$$m\frac{v^۲}{r}=qB'v\Rightarrow mv=qB'r$$
$$m\frac{E}{B}=qB'r\Rightarrow\frac{q}{m}=\frac{E}{rBB'}$$

۷۹- در یک لحظه، $\vec{v}=(-۲/۰۰\hat{i}+۴/۰۰\hat{j}-۶/۰۰\hat{k})\mathrm{m/s}$ سرعت پروتون در میدان مغناطیسی یکنواخت $\vec{B}=(۲/۰۰\hat{i}-۴/۰۰\hat{j}+۸/۰۰\hat{k})\mathrm{mT}$ است. در این لحظه (الف) نیروی مغناطیسی $\vec{F}$ وارد بر پروتون برحسب بردار یکه، (ب) زاویهٔ میان $\vec{v}$ و $\vec{F}$ و (پ) زاویهٔ میان $\vec{v}$ و $\vec{B}$ را پیدا کنید.

حل: (الف) با استفاده از تعریف ضرب برداری خواهیم داشت

$$\vec{F}=q\vec{v}\times\vec{B}=(۱/۶\times۱۰^{-۱۹})\begin{vmatrix}\hat{i} & \hat{j} & \hat{k}\\ -۲ & ۴ & -۶\\ ۲\times۱۰^{۳} & -۴\times۱۰^{-۳} & ۸\times۱۰^{-۳}\end{vmatrix}$$
$$=(۱/۶\times۱۰^{-۲۲})(۸\hat{i}+۴\hat{j})$$

۸۰- (الف) در شکل ۲۴-۸ نشان دهید که نسبت بزرگی میدان الکتریکی هال E به بزرگی E_C میدان الکتریکی مسبب حرکت بار (جریان) در طول نوار عبارت است از:

$$\frac{E}{E_C}=\frac{B}{ne\rho}$$

که در آن ρ مقاومت ویژهٔ ماده و n چگالی عددی حاملهای بار است. (ب) مقدار عددی این نسبت را برای مسئلهٔ ۱۳ محاسبه کنید. (به جدول ۲۲-۱ نگاه کنید.)

حل: داریم:

$$E_H=\frac{J}{ne}B \quad , \quad E_c=\rho J$$

در نتیجه چنین خواهیم داشت:

$$\frac{E_H}{E_C}=\frac{\frac{JB}{ne}}{\rho J}=\frac{B}{ne\rho}$$

$$=\frac{۰/۶۵}{(۸/۴۹\times۱۰^{۲۷})(۱/۶\times۱۰^{-۱۹})(۱/۶۹\times۱۰^{-۸})}$$

$$=۲/۸۳\times۱۰^{-۳}$$

۸۱- در لحظهٔ $t=۰$ الکترونی با انرژی جنبشی ۱۲keV از $x=۰$ در جهت مثبت محور x که موازی با مؤلفهٔ افقی میدان مغناطیسی $\vec{B}$ زمین است حرکت می‌کند. بزرگی مؤلفهٔ قائم رو به پایین میدان برابر با $۵۵/۰\,\mu T$ است. (الف) بزرگی شتاب الکترون ناشی از $\vec{B}$ چقدر است؟ (ب) وقتی که الکترون به نقطهٔ $x=۲۰\,cm$ می‌رسد، فاصلهٔ الکترون از محور x چقدر است؟

SSM

حل: از قانون دوم نیوتون $F=ma$ و از طرفی $F=evB\sin\phi$ که در آن $B_\perp=B\sin\phi$ مؤلفهٔ روبه پایین میدان مغناطیسی زمین در مسئله داده شده است لذا خواهیم داشت: $a=\frac{evB_\perp}{m}$

برای محاسبه شتاب لازم است که ابتدا v بدست آوریم که برای آن داریم

$$v=\sqrt{\frac{۲K}{m}}=\sqrt{\frac{۲(۱۲\times۱۰^{۳})(۱/۶\times۱۰^{-۱۹})}{(۹/۱۱\times۱۰^{-۳۱})}}=۶/۴۹\times۱۰^{۷}\ m/s$$

$$a=\frac{(۱/۶\times۱۰^{-۱۹})(۶/۴۹\times۱۰^{۷})(۵۵\times۱۰^{-۶})}{(۹/۱۱\times۱۰^{-۳۱})}=۶/۲۷\times۱۰^{۱۴}\ m/s^{۲}$$

۸۲- سرعت الکترون وقتی وارد میدان مغناطیسی یکنواخت $\vec{B}=۶۰\hat{i}\mu T$ می‌شود برابر $\vec{v}=(۳۲\hat{i}+۴۰\hat{j})km/s$ است. (الف) شعاع مسیر مارپیچی الکترون و (ب) گام مسیر چقدر است؟ (پ) از نظر ناظری که به ناحیهٔ میدان مغناطیسی از نقطهٔ ورود الکترون نگاه می‌کند، آیا حرکت مارپیچی الکترون ساعتگرد است یا پاد ساعتگرد؟

حل: (الف) میدان مغناطیسی B در جهت $\hat{i}$ است و با توجه به جهت بردار $\vec{v}$ مشاهده می‌کنیم $\vec{v}\times\vec{B}=-v_yB_x\hat{k}$ می‌شود پس نیروی مغناطیسی وارد بر الکترون در میدان برابر $(-e)(-v_yB_x\hat{k})$ است که جهت $+\hat{k}$ است. این نیرو موجب حرکت دورانی است و می‌توان نوشت

$$m\frac{v_y^{۲}}{r}=ev_yB_x\Rightarrow r=\frac{mv_y}{eB_x}$$

$$r=\frac{(۹/۱۱\times۱۰^{-۳۱})(۴۰\times۱۰^{۳})}{(۱/۶\times۱۰^{-۱۹})(۶۰\times۱۰^{-۶})}=۰/۰۰۳۸m=۳/۸\,mm$$

ب) $$T=\frac{۲\pi r}{v_y}=\frac{۲\pi(۰/۰۰۳۸)}{۴\times۱۰^{۳}\ m/s}=۵/۹۶\times۱۰^{-۷}\ s$$

در این مدت زمان الکترون مسافت Δx را که در واقع همان گام مارپیچ است را طی می‌کند که از رابطه زیر به دست می‌آید:

$$\Delta x=v_xT=(۳۲\times۱۰^{۳})(۵/۹۶\times۱۰^{-۶})=۰/۰۱۹m$$

پ) ساعتگر است.

۸۳- یک پروتون، یک دوترون $(q=+e\,,\,m=۲/۰u)$ و یک ذرهٔ آلفا $(q=+۲e\,,\,m=۴/۰u)$ همگی با انرژی جنبشی یکسان و در ناحیه‌ای با میدان مغناطیسی یکنواخت $\vec{B}$ می‌شوند و عمود بر $\vec{B}$ حرکت می‌کنند. نسبت (الف) شعاع r_d مسیر دوترون به شعاع r_p مسیر پروتون و (ب) شعاع r_α مسیر ذرهٔ آلفا به r_p چقدر است؟

حل:

$$K=\frac{۱}{۲}mv^{۲}\Rightarrow v=\sqrt{\frac{۲K}{m}}$$

$$qvB=m\frac{v^{۲}}{r}\Rightarrow r=\frac{\sqrt{۲Km}}{qB}$$

الف) $$\frac{r_d}{r_p}=\sqrt{\frac{m_d}{m_p}}\cdot\frac{q_p}{q_d}=\sqrt{\frac{۲u}{u}}\cdot\frac{e}{e}=\sqrt{۲}$$

ب) $$\frac{r_\alpha}{r_p}=\sqrt{\frac{m_\alpha}{m_p}}\cdot\frac{q_p}{q_\alpha}=\sqrt{\frac{۴u}{u}}\cdot\frac{e}{۲e}=۱$$

۸۴- ذره‌ای با بار $۲/۰C$ در میدان مغناطیسی یکنواختی حرکت می‌کند. در یک لحظه سرعت ذره $(۲/۰\hat{i}+۴/۰\hat{j}+۶/۰\hat{k})m/s$ و نیروی مغناطیسی وارد بر ذره $(۴/۰\hat{i}-۲۰\hat{j}+۱۲\hat{k})N$ است. مؤلفه‌های x و y میدان مغناطیسی برابرند. $\vec{B}$ به چه صورت است؟

حل:

$$\vec{F}=q\vec{v}\times\vec{B}=۲\begin{vmatrix}\hat{i}&\hat{j}&\hat{k}\\ ۲&۴&۶\\ B_x&B_y&B_z\end{vmatrix}$$

$$۴\hat{i}-۲۰\hat{j}+۱۲\hat{k}=۲[\hat{i}(۴B_z-۶B_x)-\hat{j}(۲B_z-۶B_x)+\hat{k}(۲B_x-۴B_x)]$$

حال از برابر قرار دادن مؤلفه‌های متناظر و حل آنها خواهیم داشت $B_x=B_y=-۳T$ و $B_z=-۴T$ در نتیجه داریم

$$\vec{B}=-۳\hat{i}-۳\hat{j}-۴\hat{k}$$

۸۵- ذره‌ای با بار $۵/۰\,\mu C$ در ناحیه‌ای با میدان مغناطیسی $-۲۰\,\hat{i}mT$ و میدان الکتریکی $۳۰۰\hat{j}\,V/m$ حرکت می‌کند. در یک لحظه سرعت ذره $(۱۷\hat{i}-۱۱\hat{j}+۷/۰\hat{k})km/s$ است. در این لحظه‌نیروی الکترومغناطیسی خالص (مجموع نیروهای الکتریکی و مغناطیسی) وارد بر ذره برحسب بردار یکه چیست؟

حل:

$$\vec{F}_e = q\vec{E} = (۵\times ۱۰^{-۶})(۳۰۰\hat{j}) = ۱/۵\times ۱۰^{-۳}\ \hat{j}\ N$$

$$\vec{F}_B = q\vec{v}\times\vec{B}$$

$$= (۵\times ۱۰^{-۶})[(۱۷۰۰\hat{i} - ۱۱۰۰\hat{j} + ۷۰۰\hat{k})\times(-۲۰\times ۱۰^{-۳}\ \hat{i})]$$

$$= (-۷\times ۱۰^{-۴}\ \hat{j} - ۱/۱\times ۱۰^{-۳}\ \hat{k})N$$

$$\vec{F} = \vec{F}_e + \vec{F}_B = ۸\times ۱۰^{-۴}\ \hat{j} - ۱۱\times ۱۰^{-۴}\ \hat{k}$$

۸۶- سیمی که در امتداد محور x از $x=۰$ تا $x=۱/۰۰\text{m}$ قرار دارد حامل جریان $۳/۰۰\text{A}$ در جهت مثبت x است. این سیم در میدان مغناطیسی غیر یکنواخت $\vec{B} = (۴/۰۰\text{T/m}^۲)x^۲\hat{i} - (۰/۶۰۰\ \text{T/m}^۲)x^۲\hat{j}$ قرار دارد. نیروی مغناطیسی وارد بر سیم را برحسب بردار یکه پیدا کنید.

حل: یک عنصر طول dx از سیم را در نظر می‌گیریم. نیروی وارد بر آن از رابطه زیر بدست می‌آید.

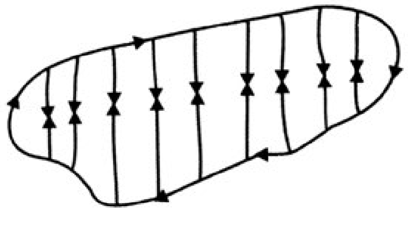
$$d\vec{F} = id\vec{l}\times\vec{B} = i(dx\,\hat{i})\times(۴x^۲\hat{i} - ۰/۶x^۲\hat{j})$$

$$= -۱/۸x^۲dx\,\hat{k}$$

$$\vec{F} = -\hat{k}(۱/۸)\int_۰^۱ x^۲dx = -۰/۶\,\hat{k}\ N$$

۸۷- ثابت کنید که رابطهٔ $\tau = NiAB\sin\theta$ نه تنها در مورد حلقهٔ مستطیلی شکل ۲۴-۲۲ بلکه در مورد هر حلقهٔ بسته با هر شکلی درست است. (*راهنمایی:* تا جایی که به توزیع جریان مربوط است، به جای یک حلقه با شکل دلخواه، مجموعه‌ای از حلقه‌های دراز و نازک پهلوی هم و تقریباً مستطیلی شکل را در نظر بگیرید که تقریباً معادل با حلقه با شکل دلخواه است.)

حل: با توجه بع راهنمایی مسئله هر حلقه را می‌توان مجموعه‌ای از حلقه‌های مستطیلی کوچک در نظر گرفت. از هر حلقه مستطیلی جریان i می‌گذرد که در جریان عبور از اضلاع مشترک جریان صفر است.



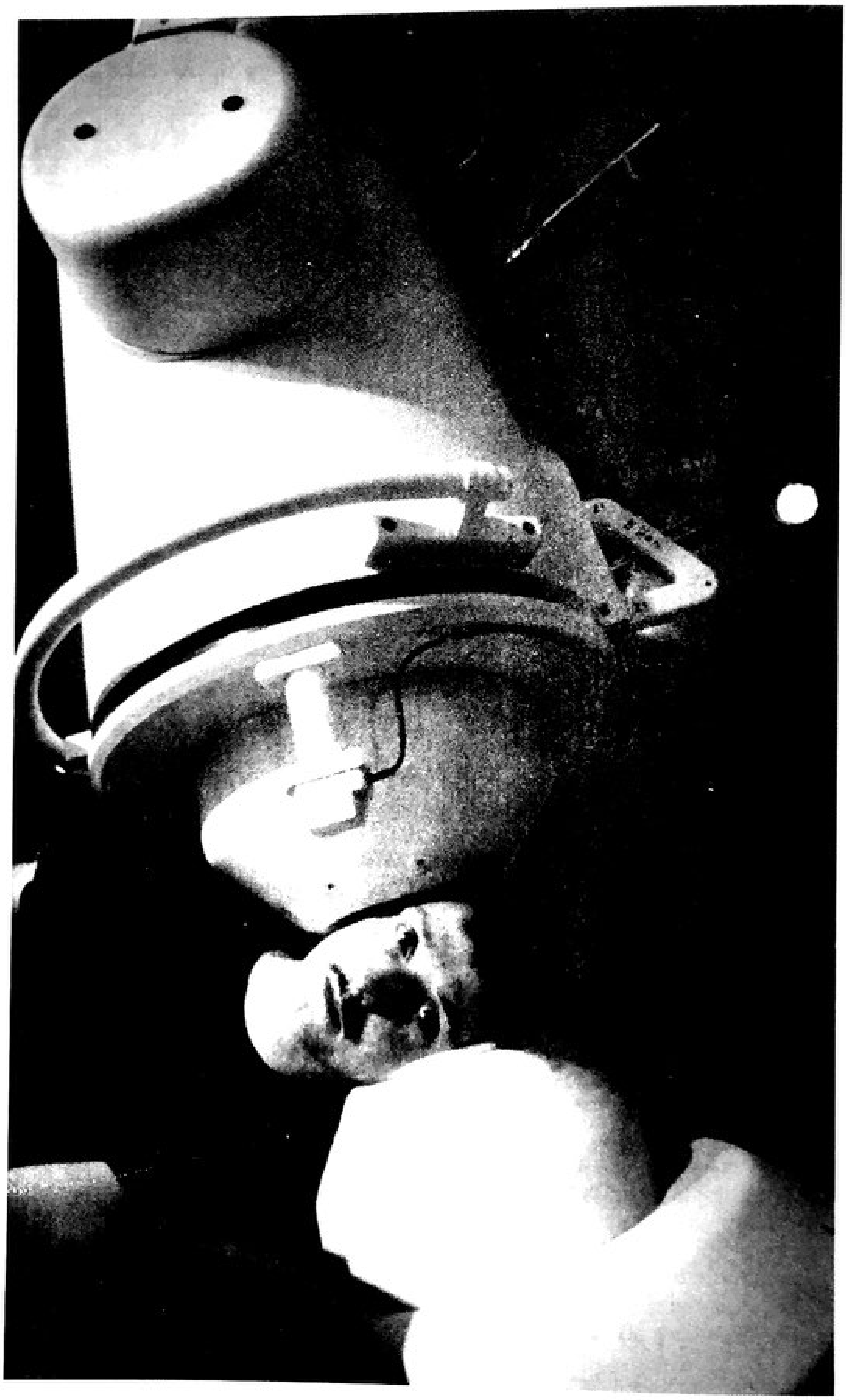
$$d\tau = (NiB\sin\theta)dA$$

این گشتاور نیرو بر سطح عمود است. برای کل حلقه داریم:

$$\tau = \int NiB\sin\theta\,dA = NiB\sin\theta\int dA = NiAB\sin\theta$$

۲۵

میدانهای مغناطیسی ناشی از جریانها



بخش ۲۵-۲ محاسبهٔ میدان مغناطیسی ناشی از جریان الکتریکی

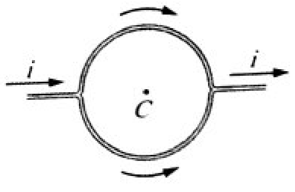
●۱- در نقطهٔ خاصی از کشور فیلیپین میدان مغناطیسی زمین با بزرگی $۳۹\mu T$ افقی و به طرف شمال است. فرض کنید دقیقاً $۸/۰cm$ بالای یک سیم مستقیم دراز افقی که حامل جریان ثابتی است میدان خالص صفر است. (الف) بزرگی و (ب) جهت جریان چیست؟ SSM

حل: (الف)

$$B=\frac{\mu_\circ i}{۲\pi r}\Rightarrow ۳۹\times ۱۰^{-۶}=\frac{(۴\pi\times ۱۰^{-۷})i}{(۲\pi)(۰/۰۸)}\Rightarrow i=۱۵/۶A$$

(ب) جهت جریان باید از غرب به شرق باشد تا میدانی در جهت جنوب در نقاط پایین آن ایجاد شود.

●۲- یک رسانای مستقیم که حامل جریان $i=۵/۰A$ است مانند شکل ۲۵-۳۵ به دو کمان نیمدایره‌ای یکسان تقسیم شده است. میدان مغناطیسی در مرکز C حلقهٔ دایره‌ای حاصل چقدر است؟



شکل ۲۵-۳۵ مسئلهٔ ۲

حل: میدان ناشی از هر نیمه در مرکز برابر $B=\frac{\mu_\circ i}{۴\pi r}$ است و چون جهت جریان در آنها در خلاف یکدیگر است اثر هم را خنثی می‌کنند لذا میدان مغناطیسی در مرکز حلقه صفر است.

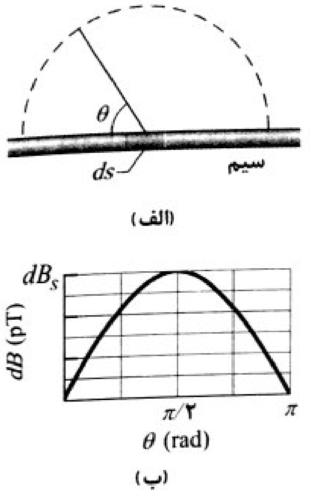
●۳- نقشه برداری در فاصلهٔ $۶/۱m$ زیر خط فشار قوی که در آن جریان $۱۰۰A$ برقرار است یک قطب نمای مغناطیسی را به کار می‌برد. (الف) میدان مغناطیسی ناشی از خط فشار قوی در محل قطب‌نما چقدر است؟ (ب) آیا این میدان به طور جدی روی جهتگیری قطب‌نما اثر می‌گذارد؟ مؤلفهٔ افقی میدان مغناطیسی زمین در این محل $۲۰\mu T$ است.

حل: (الف)

$$B=\frac{\mu_\circ i}{۲\pi r}=\frac{(۴\pi\times ۱۰^{-۷})(۱۰۰)}{(۲\pi)(۶/۱)}=۳/۳\times ۱۰^{-۶}\ T=۳/۳\mu T$$

(ب) این حدود یک ششم بزرگی میدان مغناطیسی زمین است لذا می‌تواند بر آن اثرگذار باشد.

۴- شکل ۲۵-۳۶ الف عنصری به طول $d_s=۱/۰۰\ \mu m$ را در یک سیم مستقیم خیلی دراز و حامل جریان نشان می‌دهد. جریان در این عنصر میدان مغناطیسی دیفرانسیلی $d\vec{B}$ را در نقطه‌های فضای اطراف برقرار می‌کند. شکل ۲۵-۳۶ ب بزرگی dB میدان را در نقطه‌هایی به فاصلهٔ $۲/۵cm$ از این عنصر، برحسب تابعی از زاویهٔ میان سیم و خط مستقیم متصل به آن نقطه نشان می‌دهد. مقیاس محور قائم با $dB_s=۶۰/۰pT$ مشخص شده است. بزرگی میدان مغناطیسی برقرار شده توسط کل سیم در فاصلهٔ عمودی $۲/۵cm$ از سیم چقدر است؟



شکل ۲۵-۳۶ مسئلهٔ ۴

حل: با توجه به نمودار dB بیشینه به ازای $\theta=\frac{\pi}{۲}$ حاصل می‌شود و مقدار آن برابر $۶\times ۱۰^{-۱۲}\ T$ است لذا از رابطه زیر جریان را به دست می‌آوریم.

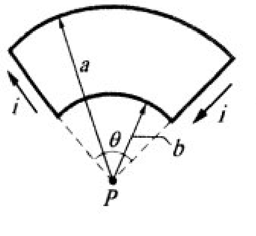
$$dB_{max}=\frac{\mu_\circ i ds\sin ۹۰}{۴\pi R^۲}\Rightarrow i=\frac{(۴\pi R^۲)(dB_{max})}{\mu_\circ ds}$$

که با قرار دادن $ds=۱\times ۱۰^{-۶}\ m$ و $R=۰/۰۲۵\ m$ جریان به دست می‌آید $i=۰/۳۷۵A$.

حال می‌توان میدان مغناطیسی ایجاد شده توسط کل سیم در نقطه‌ای به فاصله $۲/۵cm$ را به دست آورد.

$$B=\frac{\mu_\circ i}{۲\pi r}=\frac{(۴\pi\times ۱۰^{-۷})(۰/۳۷۵)}{(۲\pi)(۰/۰۲۵)}=۳\times ۱۰^{-۶}\ T=۳\mu T$$

●۵- در شکل ۲۵-۳۷ شعاعهای دو کمان دایره‌ای عبارت‌اند از $a=۱۳/۵\ cm$ و $b=۱۰/۷cm$. زاویهٔ تحت پوشش دو کمان $۷۴/۰^\circ$ است و آنها حامل جریان $i=۰/۴۱۱A$ هستند. مرکز مشترک آنها نقطهٔ P است. (الف) بزرگی و (ب) جهت (به داخل یا خارج) میدان مغناطیسی خالص در نقطهٔ P را پیدا کنید. GO



شکل ۲۵-۳۷ مسئلهٔ ۵

حل: (الف) طبق قانون بیو- ساوار میدان مغناطیسی ناشی از بخش‌های مستقیم در نقطهٔ P برابر صفر است چون زاویه بین $\vec{ds}$ و $\vec{r}$ صفر است. برای بخش‌ها خمیده از قانون بیو- ساوار داریم:

$$dB=\frac{\mu_\circ i}{۴\pi}\frac{ds\sin ۹۰}{r^۲}\Rightarrow B=\frac{\mu_\circ i}{۴\pi r^۲}\int_\circ^\theta rd\theta=\frac{\mu_\circ i\theta}{۴\pi r}$$

از قاعده دست راست برای کمان با شعاع a میدان در جهت $-\hat{k}$ (به سمت داخل) و برای کمان با شعاع a در جهت $\hat{k}$ (به سمت خارج) است لذا میدان در نقطه P چنین است.

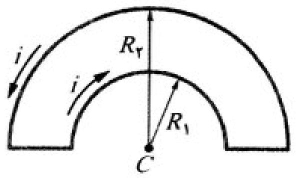
$$\vec{B}_P = \frac{\mu_\circ i\theta}{۴\pi}\left(\frac{۱}{b}-\frac{۱}{a}\right)\hat{k}$$

که با قرار دادن مقادیر عددی خواهیم داشت:

$$\vec{B}_P = ۱/۰۲\times۱۰^{-۷}\,\hat{k}\ \mathrm{T}$$

(ب) به سمت خارج صفحه است.

●۶- در شکل ۲۵-۳۸ شعاع دو کمان نیمدایره‌ای عبارت‌اند از $R_۱=۳/۱۵\mathrm{cm}$ و $R_۲=۷/۸۰\mathrm{cm}$. این دو نیمدایره در نقطهٔ C هم مرکزند و در آنها جریان $i=۰/۲۸۱\mathrm{A}$ برقرار است. (الف) بزرگی و (ب) جهت (به داخل یا خارج صفحه) میدان مغناطیسی خالص در نقطهٔ C را پیدا کنید.



شکل ۲۵-۳۸ مسئلهٔ ۶

حل: (الف) طبق قانون بیو-ساوار میدان حاصل از بخش‌های مستقیم در نقطهٔ C صفر است چون زاویهٔ میان $d\vec{S}$ و $\vec{r}$ صفر است یا امتداد این دو قسمت از نقطه C می‌گذرد. برای بخش‌های خمیده از قانون بیو- ساوار داریم:

$$dB = \frac{\mu_\circ i}{۴\pi}\frac{ds\sin ۹۰}{r^۲} \Rightarrow B = \frac{\mu_\circ i}{۴\pi r^۲}\int_\circ^\pi r d\theta$$

$$B = \frac{\mu_\circ i}{۴\pi r}(\pi) = \frac{\mu_\circ i}{۴r}$$

طبق قاعده دست راست برای کمان با شعاع $R_۲$ میدان در جهت $+\hat{k}$ (به سمت خارج صفحه) و میدان حاصل از کمان با شعاع $R_۱$ در جهت $-\hat{k}$ (به سمت داخل صفحه) است لذا داریم

$$\vec{B}_C = \frac{\mu_\circ i}{۴}\left(\frac{۱}{R_۲}-\frac{۱}{R_۱}\right)\hat{k}$$

$$= \frac{(۴\pi\times۱۰^{-۷})(۰/۲۸۱)}{۴}\left(\frac{۱}{۰/۰۷۸}-\frac{۱}{۰/۰۳۱۵}\right)\hat{k}$$

$$= -۱/۶۷\times۱۰^{-۶}\,\hat{k}\,\mathrm{T}$$

(ب) به سمت داخل صفحه است.

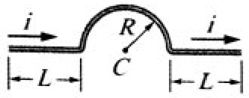
●۷- دو سیم مستقیم دراز به فاصلهٔ $۸/۰\mathrm{cm}$ از یکدیگر به طور موازی قرار دارند. این دو سیم جریانهای مساوی را به گونه‌ای حمل می‌کنند که میدان مغناطیسی در نقطهٔ وسط فاصلهٔ آنها $۳۰۰\mu\mathrm{T}$ است. (الف) آیا جریانها در یک جهت‌اند یا مخالف یکدیگرند؟ (ب) جریان مورد نیاز چقدر است؟ **SSM**

حل: (الف) جهت جریان در سیم‌ها باید در خلاف جهت هم باشد تا میدان آنها در A همسو شده و با هم جمع می‌شوند.

(ب)
$$B = \frac{\mu_\circ i}{۲\pi(d/۲)} + \frac{\mu_\circ i}{۲\pi(d/۲)}$$

که با قرار دادن مقادیر داده شده داریم $i = ۳۰\mathrm{A}$.

●۸-در شکل ۲۵-۳۹ سیمی نیمدایره‌ای به شعاع $R = ۹/۲۵\mathrm{cm}$ و دو قسمت راست (شعاعی) هر یک به طول $L = ۱۳/۱\mathrm{cm}$ نشان داده است. این سیم حامل جریان $i = ۳۴/۸\mathrm{mA}$ است. (الف) بزرگی و (ب) جهت (به داخل یا خارج از صفحه) میدان مغناطیسی خالص را در مرکز نیمدایره به مرکز C پیدا کنید.



شکل ۲۵-۳۹ مسئلهٔ ۸

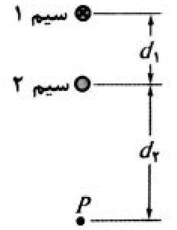
حل: (الف) سیم از سه تکه تشکیل شده است، دو تکه سیم راست و یک تکه سیم خمیده. دو تکه سیم راست در نقطه C میدانی ایجاد نمی‌کنند چون امتداد آنها از این نقطه می‌گذرد. و میدان حاصل از سیم خمیده نیز از رابطه زیر به دست می‌آید:

$$B = \frac{\mu_\circ i\theta}{۴\pi r} = \frac{\mu_\circ i}{۴\pi R}(\pi) = \frac{\mu_\circ i}{۴R}$$

$$B = \frac{(۴\pi\times۱۰^{-۷})(۰/۰۳۴۸)}{۴(۰/۰۹۲۶)} = ۱/۱۸\times۱۰^{-۷}\ \mathrm{T}$$

(ب) از قاعدهٔ دست راست و با توجه به جهت جریان میدان به سمت داخل صفحه است.

●۹- در شکل ۲۵-۴۰، دو سیم مستقیم دراز بر صفحهٔ کاغذ عمودند و فاصلهٔ آنها $d_۱=۰/۷۵\mathrm{cm}$ است. سیم ۱ حامل جریان $۶/۵\ \mathrm{A}$ به داخل صفحه است. اگر میدان مغناطیسی خالص ناشی از دو جریان در نقطهٔ P واقع در فاصلهٔ $d_۲=۱/۵۰\mathrm{cm}$ از سیم ۲ صفر باشد (الف) بزرگی و (ب) جهت (به طرف داخل یا به طرف خارج صفحه) جریان در سیم ۲ را پیدا کنید.



شکل ۲۵-۴۰ مسئلهٔ ۹

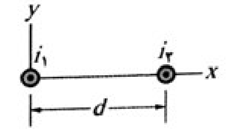
حل: (الف) با توجه به مسئله باید اندازه دو میدان یکسان و در جهت مخالف باشند تا اثر یکدیگر را خنثی کنند، لذا خواهیم داشت

$$B_۱ = B_۲ \Rightarrow \frac{\mu_\circ i_۱}{۲\pi(d_۱+d_۲)} = \frac{\mu_\circ i_۲}{۲\pi d_۲}$$

$$\frac{i_۱}{d_۱+d_۲} = \frac{i_۲}{d_۲} \Rightarrow \frac{۶/۵}{۰/۷۵+۱/۵} = \frac{i_۲}{۱/۵} \Rightarrow i_۲ = ۴/۳\mathrm{A}$$

(ب) جهت جریان باید در خلاف جهت جریان $i_۱$ باشد تا اثر میدان سیم ۱ را خنثی کنند.

●۱۰- در شکل ۲۵-۴۱، دو سیم مستقیم دراز به فاصلهٔ $d = ۱۶/۰\ \text{cm}$ از یکدیگر حامل جریانهای $i_1 = ۳/۶۱\ \text{mA}$ و $i_2 = ۳/۰۰ i_1$ به طرف خارج صفحه‌اند. (الف) در چه نقطه‌ای روی محور x میدان مغناطیسی خالص ناشی از جریانها صفر است؟ (ب) اگر دو جریان دو برابر شوند، آیا نقطهٔ صفر میدان مغناطیسی به طرف سیم ۱ جابه‌جا می‌شود یا به طرف سیم ۲، یا بدون تغییر می‌ماند؟



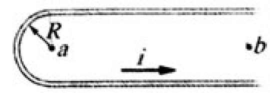
شکل ۲۵-۴۱ مسئلهٔ ۱۰

حل: (الف) چون جهت جریان در سیمها همسو است لذا از قاعده دست راست درمی‌یابیم که در ناحیه بین دو سیم امکان خنثی شدن میدان‌ها وجود دارد. اگر نقطه موردنظر را به فاصله r از سیم حامل جریان i_1 در نظر بگیریم فاصلهٔ آن از سیم حامل جریان i_2 برابر $d - r$ بوده و خواهیم داشت

$$\frac{\mu_0 i}{۲\pi r} = \frac{\mu_0 (۳i)}{۲\pi(d-r)} \Rightarrow r = \frac{d}{۴} = \frac{۱۶}{۴} = ۴\text{cm}$$

(ب) اگر جریان‌ها دو برابر شوند این نقطه تغییر نمی‌کند.

●۱۱- در شکل ۲۵-۴۲، جریان $i = ۱۰\ \text{A}$ در رسانای دراز سنجاق موی سر که با خم کردن آن به صورت نیمدایره‌ای به شعاع $R = ۵/۰\text{mm}$ درآمده برقرار است. نقطهٔ b در میان بخشهای مستقیم قرار دارد و از نیمدایره چنان دور است که هر بخش مستقیم را می‌توان تقریباً یک سیم به طول بینهایت در نظر گرفت. (الف) بزرگی و (ب) جهت (به طرف داخل یا به طرف خارج صفحه) $\vec{B}$ در a و (پ) بزرگی و (ت) جهت $\vec{B}$ در b را پیدا کنید.



شکل ۲۵-۴۲ مسئلهٔ ۱۱

حل: (الف) و (ب) میدان در نقطه a برآیند سه میدان است. دو سیم نیم نامتناهی $\left(B = \frac{\mu_0 i}{۴\pi r}\right)$ موازی و یک سیم نیم دایره $\left(B = \frac{\mu_0 i}{۴r}\right)$ و با توجه به جهت جریان خواهیم داشت

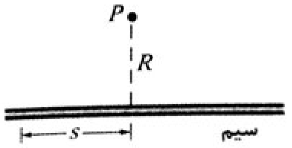
$$\vec{B} = \left[۲\left(\frac{\mu_0 i}{۴\pi R}\right) + \frac{\mu_0 i}{۴R}\right]\hat{k} = \frac{\mu_0 i}{۲R}\left(\frac{۱}{\pi} + \frac{۱}{۲}\right)\hat{k}$$

$$= \frac{(۴\pi \times ۱۰^{-۷})(۱۰)}{۲(۰/۰۰۵)}\left(\frac{۱}{\pi} + \frac{۱}{۲}\right)\hat{k} = ۱/۰۳ \times ۱۰^{-۳}\ \hat{k}\,\text{T}$$

(پ) و (ت) چون فاصله بین a و b نسبت به R زیاد است لذا اثر سیم نیم دایره در نقطه b ناچیز بوده و فقط اثر دو سیم نامتناهی $\left(B = \frac{\mu i}{۲\pi r}\right)$ را داریم:

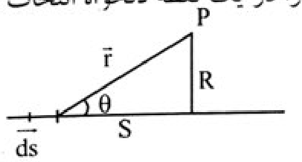
$$\vec{B} = ۲\left(\frac{\pi_0 i}{۲\pi R}\right)\hat{k} = \frac{(۴\pi \times ۱۰^{-۷})(۱۰)}{\pi(۰/۰۰۵)}\hat{k} = ۸ \times ۱۰^{-۴}\ \hat{k}\ \text{T}$$

●۱۲- در شکل ۲۵-۴۳، نقطهٔ P در فاصلهٔ عمودی $R = ۲/۰۰\ \text{cm}$ از یک سیم مستقیم دراز و حامل جریان قرار دارد. میدان مغناطیسی $\vec{B}$ برقرار شده در نقطهٔ P ناشی از همهٔ عنصرهای جریان- طول یکسان $i\,d\vec{s}$ در طول سیم است. فاصلهٔ عنصری که (الف) بیشترین سهم را در میدان $\vec{B}$ و (ب) ۱۰/۰ درصد از بیشترین سهم را دارد چقدر است؟



شکل ۲۵-۴۳ مسئلهٔ ۱۲

حل: عنصر $\overrightarrow{ds}$ را در یک نقطه دلخواه انتخاب می‌کنیم



$$d\vec{B} = \frac{\mu_0 i}{۴\pi}\frac{\overrightarrow{ds} \times \vec{r}}{r^۳} \Rightarrow$$

$$dB = \frac{\mu_0 i}{۴\pi}\frac{ds\, r\sin\theta}{r^۳} = \frac{\mu_0 i}{۴\pi}\frac{R\,ds}{(S^۲ + R^۲)^{۳/۲}}$$

(الف) عبارت بالا به ازای $S = ۰$ بیشترین مقدار را دارد.

$$dB_{\max} = \frac{\mu_0 i}{۴\pi}\frac{ds}{R^۲}$$

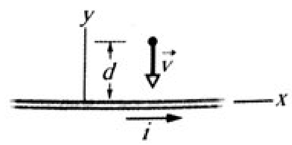
(ب) می‌خواهیم مقداری از S را به دست آوریم که در آن $dB = \frac{۱}{۱۰} dB_{\max}$ باشد. در این صورت خواهیم داشت:

$$\frac{R}{(S^۲ + R^۲)^{\frac{۳}{۲}}} = \frac{۱}{۱۰}\frac{۱}{R^۲} \Rightarrow ۱۰\, R^۳ = (s^۲ + R^۲)^{\frac{۳}{۲}}$$

$$۱۰^{۲/۳} R^۲ = S^۲ + R^۲ \Rightarrow S = \sqrt{۱۰^{\frac{۲}{۳}} - ۱}R$$

$$= \left(\sqrt{۱۰^{\frac{۲}{۳}} - ۱}\right)(۲) = ۳/۸۲\ \text{cm}$$

●●۱۳- شکل ۲۵-۴۴ پروتون متحرکی را با سرعت $\vec{v} = (-۲۰۰\text{m/s})\hat{j}$ نشان می‌دهد که به طرف سیم مستقیم درازی که حامل جریان $i = ۳۵۰\text{mA}$ است حرکت می‌کند. در لحظهٔ نشان داده شده، فاصلهٔ پروتون از سیم $d = ۲/۸۹\ \text{cm}$ است. نیروی مغناطیسی وارد بر پروتون ناشی از جریان را بر حسب بردار یکه پیدا کنید. **ILW**



شکل ۲۵-۴۴ مسئلهٔ ۱۳

حل: میدان مغناطیسی در محل پروتون برابر $\vec{B} = \frac{\mu_0 i}{۲\pi d}\hat{k}$ و در نتیجه داریم

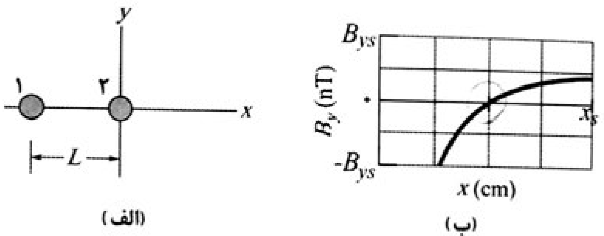
$$\vec{F} = q\vec{v} \times \vec{B} = \frac{\mu_0 iq}{۴\pi d}(\vec{v} \times \hat{k}) = \frac{\mu_0 iq}{۴\pi d}\left[v(-\hat{j}) \times \hat{k}\right]$$

$$\vec{F} = -\frac{\mu_0 i q v}{4\pi d}\hat{i}$$

که با قرار دادن مقادیر داده شده خواهیم داشت:

$$\vec{F} = -7/75\times10^{-23}\,\hat{i}\,\text{N}$$

●●۱۴- شکل ۲۵-۴۵ الف مقطع دو سیم موازی مستقیم به فاصلهٔ L را که حامل جریان است نشان می‌دهد. نسبت i_1/i_2 جریانها برابر با ۴/۰۰ است؛ جهت جریانها نشان داده نشده است. شکل ۲۵-۴۲ ب مؤلفهٔ B_y میدان مغناطیسی خالص آنها را در امتداد محور x به طرف راست سیم ۲ نشان می‌دهد. مقیاس محور قائم با $B_{ys} = 4/0\,\text{pT}$ و مقیاس محور افقی با $x_s = 20/0\,\text{cm}$ مشخص شده است. (الف) در چه مقدار $x > 0$ مؤلفهٔ B_y بیشینه است؟ (ب) اگر $i_2 = 3\text{mA}$ باشد، مقدار این بیشینه چقدر است؟ جهت (به طرف داخل یا به طرف خارج صفحه) (پ) i_1 و (ت) i_2 چگونه است؟



شکل ۲۵-۴۵ مسئلهٔ ۱۴

حل: با توجه به شکل ب مشاهده می‌کنیم که در $x = +10\,cm$، $B_y = 0$ است پس جهت جریان در دو سیم مخالف یکدیگر است. وقتی دور می‌شویم میدان مثبت روبه بالا نتیجه می‌گیریم جریان در سیم (۲) رو به بیرون و جریان در سیم (۱) به سوی داخل صفحه است.

$$B_y = \frac{\mu_0 i_2}{2\pi x} - \frac{\mu_0 i_1}{2\pi(L+x)} = \frac{\mu_0 i_2}{2\pi}\left(\frac{1}{x} - \frac{4}{L+x}\right) = \frac{\mu_0 i_2}{2\pi}\frac{L-3x}{x(x+1)}$$

که با در نظر گرفتن $x = 10\,\text{cm}$، $B_y = 0$ و مقادیر داده شده $L = 30\,\text{cm}$ به دست می‌آید.

(الف)
$$\frac{dB_y}{dx} = \frac{\mu_0 i_2 - 3x(x+L) - (L-3x)(2x+L)}{x^2(x+L)^2}$$
$$\Rightarrow 3x^2 - 2Lx - L^2 = 0 \Rightarrow x = L = 30\,\text{cm}$$

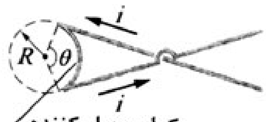
B_y در $x = L$ بیشینه است.

(ب) به ازای $i_2 = 0/003\,\text{A}$ و $L = 30\,\text{cm}$، بیشینهٔ B_y حاصل شود

$$B_{y,\max} = \frac{\mu_0 i_2}{2\pi L} = \frac{(4\pi\times10^{-7})(0/003)}{2\pi(0/3)} = 2\times10^{-9}\,\text{T}$$

(پ) و (ت) در بحث بالا پاسخ داده شده است.

●●۱۵- سیمی با جریان $i = 3/00\,\text{A}$ در شکل ۲۵-۴۶ نشان داده شده است. دو بخش مستقیم نیم بینهایت، هر دو مماس بر یک دایره، با یک کمان دایره‌ای که زاویهٔ مرکزی آن θ است به هم متصل‌اند. کمان وصل کننده و دو بخش مستقیم همگی در یک صفحه قرار دارند. اگر $B = 0$ باشد، θ چقدر است؟ **SSM**

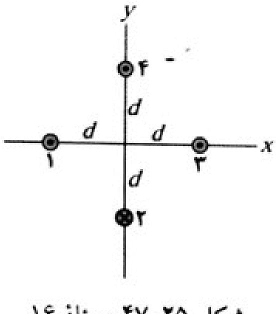


شکل ۲۵-۴۶ مسئلهٔ ۱۵

حل: سیم دارای سه بخش است. دو بخش سیم مستقیم نیم نامتناهی با میدان مغناطیسی به بزرگی $\mu_i 4\pi R$ جهت آنها با توجه به قاعده دست راست به سمت خارج صفحه است $(\hat{k})$ و بخش دیگر یک کمان دایره‌ای است که بزرگی میدان مغناطیسی برابر $\frac{\mu_0 i\theta}{4\pi R}$ و جهت آن در مرکز کمان به سمت داخل صفحه $(-\hat{k})$ است. حال می‌توان نوشت

$$\vec{B} = 2\left(\frac{\mu_0 i}{4\pi R}\right)\hat{k} - \frac{\mu_0 i\theta}{4\pi R}\hat{k} = 0 \Rightarrow \theta = 2\,\text{rad}$$

●●۱۶- شکل ۲۵-۴۷ مقطع چهار سیم نازک موازی، مستقیم و خیلی دراز را نشان می‌دهد. این سیم‌ها حامل جریانهای یکسان در جهتهای نشان داده شده‌اند. در آغاز همهٔ چهار سیم در فاصلهٔ $d = 15/0\,\text{cm}$ از مبداء مختصات قرار دارند که در آنجا میدان مغناطیسی خالص $\vec{B}$ را ایجاد کرده‌اند. (الف) تا چه مقدار x سیم ۱ را باید حرکت داد تا $\vec{B}$ به اندازهٔ $30°$ پاد ساعتگرد بچرخد؟ (ب) وقتی سیم ۱ در وضعیت جدید قرار گرفت، تا چه مقدار x باید سیم ۳ را در امتداد محور x حرکت داد تا $\vec{B}$ به اندازهٔ $30°$ بچرخد و به وضعیت اولیه برگردد؟ GO



شکل ۲۵-۴۷ مسئلهٔ ۱۶

حل: پیش از جابه‌جایی $B_y = 0$ و $B_x = B_2 + B_4 = 2(\mu_i 2\pi d)$ که در آن $d = 0/15m$ است. برای آنکه $\vec{B}$ به اندازه $30°$ پادساعتگرد بچرخد لازم است که داشته باشیم:

$$B_y = B_x \tan 30°$$

$$B_1' - B_3 = 2\left(\frac{\mu_0 i}{2\pi d}\right)\tan 30°$$

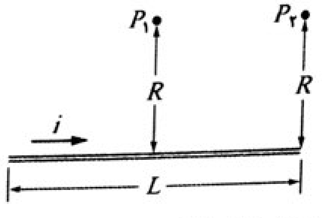
$$\frac{\mu i}{2\pi d'} - \frac{\mu_0 i}{2\pi d} = 2\left(\frac{\mu_0 i}{2\pi d}\right)\frac{1}{\sqrt{3}} \Rightarrow d' = \frac{\sqrt{3}d}{\sqrt{3}+2}$$

(الف) به ازای $d = 15\,\text{cm}$ در رابطه بالا داریم $d' = 7cm$، یعنی اینکه باید سیم ۱ را به $x = -7\,\text{cm}$ حرکت داد.

(ب) برای برگشت به وضعیت اولیه باید سیم ۳ را به $x = +7\,\text{cm}$ حرکت داد تا تقارن اولیه دوباره برقرار شود.

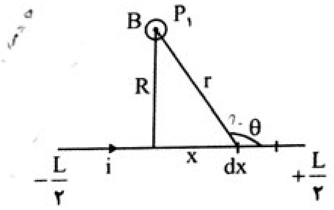
●●۱۷- در شکل ۲۵-۴۸، نقطهٔ P_1 در فاصلهٔ $R = 13/1\,\text{cm}$ روی عمود منصف سیم مستقیمی به طول $L = 18/0\,\text{cm}$ که

حامل جریان $i=۵۸/۲\ mA$ است قرار دارد. (توجه کنید که *سیم دراز نیست.*) بزرگی میدان مغناطیسی ناشی از i در $P_۱$ چقدر است؟ **WWW SSM**



شکل ۲۵-۴۸ مسئله‌های ۱۷ و ۲۱

حل: حلی که برای سیم دراز نامتناهی انجام شد را درنظر بگیرید در اینجا همان روش اعمال می‌شود ولی فقط کران آن از $-\frac{L}{۲}$ تا $+\frac{L}{۲}$ خواهد بود.



یک عنصر dx از سیم را انتخاب می‌کنیم میدان حاصل از آن در $P_۱$ به سمت خارج صفحه است. برای تمام عنصرهای dx جهت dB به سمت خارج صفحه است. بزرگی dB برابر است:

$$dB=\frac{\mu_۰ i}{۴\pi}\frac{r\,dx\sin\theta}{r^۳}=\frac{\mu_۰ i}{۴\pi}\frac{R\,dx}{(x^۲+R^۲)^{\frac{۳}{۲}}}$$

$$B=\frac{\mu_۰ iR}{۴\pi}\int_{-\frac{L}{۲}}^{\frac{L}{۲}}\frac{dx}{(x^۲+R^۲)^{\frac{۳}{۲}}}=\frac{\mu_۰ iR}{۴\pi}\frac{۱}{R^۲}\frac{x}{\sqrt{x^۲+R^۲}}\Bigg|_{-\frac{L}{۲}}^{\frac{L}{۲}}$$

$$B=\frac{\mu_۰ iL}{۲\pi R\sqrt{L^۲+۴R^۲}}$$

با قرار دادن مقادیر عددی خواهیم داشت $B=۵/۰۳\times۱۰^{-۸}$ T.

۱۸●●- معادلهٔ ۲۵-۴ بزرگی B میدان مغناطیسی برقرار شده توسط جریانی در یک سیم مستقیم بینهایت دراز را در نقطهٔ P در فاصلهٔ عمودی R از سیم به دست می‌دهد. فرض کنید که نقطهٔ P در واقع در فاصلهٔ عمودی R از نقطهٔ وسط سیمی به طول L متناهی قرار دارد. با استفاده از معادلهٔ ۲۵-۴، B را محاسبه و سپس خطای آن را برحسب درصد بیان کنید. اگر خطای نسبی کمتر از ۱/۰۰ درصد باشد، نسبت L/R چقدر تغییر می‌کند؟ یعنی چه مقدار L/R جواب زیر را به دست می‌دهد

$$\frac{(B\ \text{واقعی})-(B\ \text{از معادلهٔ ۲۵-۴})}{(B\ \text{واقعی})}(\%۱۰۰)=\%۱/۰۰$$

حل: میدان مغناطیسی یک سیم دراز نامتناهی در فاصله R از آن برابر است با $B=\mu_۰ i/۲\pi R$ و برای یک سیم با طول L، همانطور که در مسئله ۱۷ دیدیم، برابر است با:

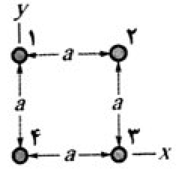
$$B=\frac{\mu_۰ i}{۲\pi R}\frac{L}{\sqrt{L^۲+۴R^۲}}$$

در نتیجه داریم:

$$\frac{\frac{\mu_۰ i}{۲\pi R}-\frac{\mu_۰ i}{۲\pi R}\frac{L}{\sqrt{L^۲+۴R^۲}}}{\frac{\mu_۰ i}{۲\pi R}\frac{L}{\sqrt{L^۲+۴R^۲}}}=\frac{۱-\frac{L}{\sqrt{L^۲+۴R^۲}}}{\frac{L}{\sqrt{L^۲+۴R^۲}}}=۰/۰۱$$

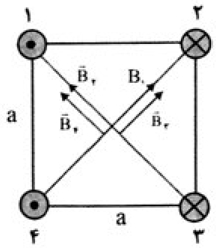
$$۱-\frac{L}{\sqrt{L^۲+۴R^۲}}=(۰/۰۱)\frac{L}{\sqrt{L^۲+۴R^۲}}\Rightarrow\frac{L}{R}=۱۴$$

۱۹●●- در شکل ۲۵-۴۹ چهار سیم مستقیم دراز بر صفحهٔ شکل عمودند و مقطع آنها مربعی به ضلع $a=۲۰cm$ می‌سازد. جریان در سیمهای ۱ و ۴ به طرف بیرون صفحه و در سیمهای ۲ و ۳ به طرف داخل صفحه‌اند و جریان در هر سیم ۲۰A است. میدان مغناطیسی خالص در مرکز مربع را برحسب بردار یکه پیدا کنید. **SSM**



شکل ۲۵-۴۹ مسئله‌های ۱۹، ۳۶ و ۳۹

حل:



بزرگی میدان مغناطیسی حاصل از هر سیم در مرکز برابر $\mu_۰ i/۲\pi r$ است که r برابر نصف قطر مربع یعنی $r=\frac{۱}{۲}(\sqrt{۲}a)$ است. با توجه به تقارن مسئله مؤلفه‌های x میدان‌ها یکدیگر را خنثی می‌کنند. و فقط مؤلفه y داریم

$$B_y=۴B_۱\cos۴۵^\circ=۴\frac{\mu_۰ i}{۲\pi\left(\frac{\sqrt{۲}}{۲}a\right)}\cdot\frac{\sqrt{۲}}{۲}=\frac{۲\mu_۰ i}{\pi a}$$

$$=\frac{۲(۴\pi\times۱۰^{-۷})(۲۰)}{\pi(۰/۲)}=۸\times۱۰^{-۵}$$

در نتیجه $\vec{B}_{کل}=(۸\times۱۰^{-۵}\hat{j})$ T

۲۰●●- در شکل ۲۵-۵۰، دو حلقهٔ سیمی دایره‌ای هم مرکز حامل جریان در یک جهت‌اند و در یک صفحه قرار دارند. شعاع حلقهٔ ۱ برابر ۱/۵۰ cm و جریان آن ۴/۰۰mA است. شعاع حلقه ۲ برابر ۲/۵۰cm و حامل جریان ۶/۰۰mA است. حلقهٔ ۲ را حول قطری می‌چرخانیم و در همان حال میدان مغناطیسی خالص $\vec{B}$ برقرار شده توسط دو حلقه را در مرکز مشترک آنها اندازه می‌گیریم. برای اینکه بزرگی میدان خالص ۱۰۰nT باشد، حلقهٔ ۲ چقدر باید بچرخد؟ GO

شکل ۲۵-۵۰ مسئلهٔ ۲۰

حل: میدان مغناطیسی یک حلقه حامل جریان به شعاع R در مرکز آن برابر است با $B=\mu_\circ i/2R$. جهت میدان هر سطح حلقه عمود و از قاعده دست راست پیروی می‌کند.

$$B_1=\frac{\mu_\circ i}{2R_1}=\frac{(4\pi\times10^{-7})(4\times10^{-3})}{2(1/5\times10^{-2})}=1/67\times10^{-7}\ \mathrm{T}$$

$$B_2=\frac{\mu_\circ i}{2R_2}=\frac{(4\pi\times10^{-7})(6\times10^{-3})}{2(2/5\times10^{-2})}=1/51\times10^{-7}\ \mathrm{T}$$

اگر حلقه (۲) به اندازه θ بچرخد بنابر قانون کسینوس‌ها خواهیم داشت.

$$B^2=B_1^2+B_2^2+2B_1B_2\cos\theta$$

که با قرار دادن مقادیر معلوم زاویه θ برابر با $143/8^\circ$ به دست می‌آید.

●●۲۱- در شکل ۲۵-۴۸، نقطهٔ P_2 در فاصلهٔ عمودی $R=25/1\ \mathrm{cm}$ از یک انتهای سیم مستقیم به طول $L=13/6\ \mathrm{cm}$ و حامل جریان $i=0/693\ \mathrm{A}$ قرار دارد. (توجه کنید که سیم *دراز نیست*.) بزرگی میدان مغناطیسی در P_2 چقدر است؟ **SSM**

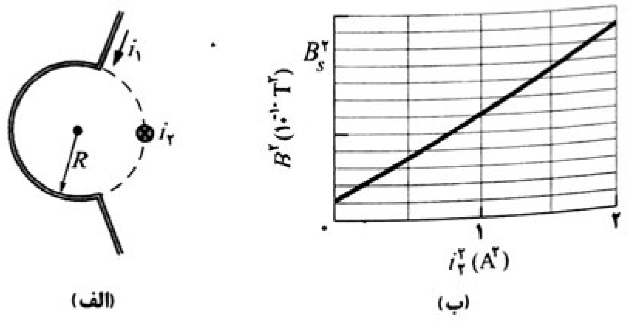
حل: با توجه به مسئله ۱۷ داریم

$$dB=\frac{\mu_\circ i}{4\pi}\frac{R\,dx}{(x^2+R^2)^{\frac{3}{2}}}$$

$$B=\frac{\mu_\circ iR}{4\pi}\int_{-L}^{\circ}\frac{dx}{(x^2+R^2)^{\frac{3}{2}}}=\frac{\mu_\circ i}{4\pi R}\frac{L}{\sqrt{L^2+R^2}}$$

که با قرار دادن مقادیر عددی داریم: $B=1/32\times10^{-7}\ \mathrm{T}$.

●●۲۲- در شکل ۲۵-۵۱ الف، سیم ۱ شامل یک کمان دایره‌ای و دو طول شعاعی است؛ این سیم حامل جریان $i_1=0/50\ \mathrm{A}$ در جهت مشخص شده است. سیم ۲ که مقطع آن نشان داده شده سیم دراز مستقیمی عمود بر صفحهٔ شکل است. فاصلهٔ این سیم از مرکز کمان برابر با شعاع R کمان، و حامل جریان i_2 است که می‌تواند تغییر کند. این دو جریان یک میدان مغناطیسی خالص $\vec{B}$ در مرکز کمان ایجاد می‌کنند. شکل ۲۵-۷۰ ب مربع بزرگی میدان B^2 را بر حسب مربع جریان i_2^2 به دست می‌دهد. مقیاس محور قائم با $B_s^2=10/0\times10^{-10}\ \mathrm{T^2}$ مشخص شده است. زاویهٔ θ مقابل به کمان چقدر است؟



شکل ۲۵-۵۱ مسئلهٔ ۲۲

حل: میدان ناشی از دو سیم راست در نقطه O صفر است چون امتداد آنها از این نقطه می‌گذرد و میدان ناشی از کمان طبق قاعده دست راست به سمت خارج از صفحه بوده و بزرگی آن از رابطه زیر به دست می‌آید

$$B_1=\frac{\mu_\circ i_1\phi}{4\pi R}$$

میدان ناشی از سیم ۲ به سمت بالا بوده و بزرگی آن نیز از رابطه زیر به دست می‌آید

$$B_2=\frac{\mu i_2}{2\pi R}$$

حال با استفاده از قضیه فیثاغورث داریم:

$$B^2=B_1^2+B_2^2$$

با توجه به نمودار مشاهده می‌کنیم که در $i_2=0$، $B^2=1\times10^{-10}\ T^2$ لذا

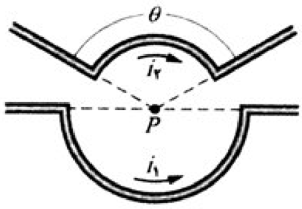
$$1\times10^{-10}=\left(\frac{\mu_\circ i_1\phi}{4\pi R}\right)^2 \qquad (1)$$

همچنین مشاهده می‌شود که در $i_2^2=2\mathrm{A}^2$، $B^2=11\times10^{-10}\ \mathrm{T}^2$ لذا

$$11\times10^{-10}=\frac{\mu_\circ^2 i_1^2\phi^2}{16\pi^2R^2}+\frac{\mu_\circ^2(2)}{16\pi^2R^2} \qquad (2)$$

از حل همزمان رابطه‌های (۱) و (۲) و حل آن برای ϕ، داریم
$\phi=1/79\ \mathrm{rad}$ یا $102/5^\circ$

●●۲۳- شکل ۲۵-۵۲ دو قطعه جریان را نشان می‌دهد. قطعهٔ پایینی حامل جریان $i_1=0/40\ \mathrm{A}$ و شامل کمان دایره‌ای با شعاع $5/0\mathrm{cm}$ و زاویهٔ 180° و نقطهٔ مرکزی P است. قطعه بالایی حامل جریان $i_2=2i_1$ و شامل کمان دایره‌ای به شعاع $4/0\ \mathrm{cm}$، زاویه 120° و همان مرکز P است. (الف) بزرگی و (ب) جهت میدان مغناطیسی خالص $\vec{B}$ را برای جهتهای نشان داده شدهٔ جریان پیدا کنید. (پ) بزرگی و (ت) جهت $\vec{B}$ در صورت معکوس شدن جهت جریان را پیدا کنید.



شکل ۲۵-۵۲ مسئلهٔ ۲۳

حل: (الف) و (ب) می‌دانیم که بخش‌های مستقیم مدار سهمی در میدان مغناطیسی نقطهٔ P ندارند چون امتداد آنها از نقطه P می‌گذرد و $d\vec{s}\times\vec{r}$ برای آنها صفر است. میدان مغناطیسی در نقطه P فقط ناشی از دو کمان بالایی و پایینی است. بزرگی میدان حاصل از کمان در مرکز آن از رابطه $\mu_\circ i\theta/4\pi R$ به دست می‌آید. طبق قاعدهٔ دست راست دیده می‌شود که جهت میدان حاصل از کمان پایینی به سمت خارج از صفحه، $+\hat{\mathrm{k}}$، و

کمان بالایی به سمت داخل صفحه، $-\hat{k}$ است. در نتیجه میدان مغناطیسی خالص $\vec{B}$ در نقطهٔ P برابر است با:

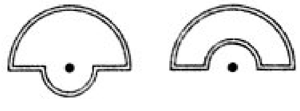
$$\vec{B}=B_1\hat{k}-B_2\hat{k}=\frac{\mu_0 i_1\pi}{۴\pi R_1}\hat{k}-\frac{\mu_0 i_2\left(۲\frac{\pi}{۳}\right)}{۴\pi R_2}=۲/۵۱^{-۶}\hat{k}\,T-۴/۲۱^{-۶}\hat{k}\,T$$

$$\vec{B}=-۱/۷\times۱۰^{-۶}\,\hat{k}\,T$$

(پ) (ت) اگر جهت جریان i_1 عوض شود، در این صورت جهت میدان حاصل از آن به سمت داخل صفحه خواهد بود یعنی $\vec{B}_1=-B\hat{k}$ در نتیجه داریم

$$\vec{B}=-۲/۵\times۱۰^{-۶}\,\hat{k}\,T-۴/۲\times۱۰^{-۶}\,\hat{k}\,T=-۶/۷۱^{-۶}\,\hat{k}\,T$$

••۲۴- جریانی در یک حلقه سیم شامل نیمدایره‌ای به شعاع ۴۰/۰۰cm و نیمدایره‌ای کوچکتر و هم مرکز و دو سیم مستقیم شعاعی که همگی در یک صفحه قرار دارند برقرار است. شکل ۲۵-۵۳ الف این آرایش را نشان می‌دهد که در مقیاس نیست. بزرگی میدان مغناطیسی ایجاد شده در مرکز انحنا ۴۷/۲۵ μT است. سپس نیمدایرهٔ کوچک به طرف دیگر برگردانده (چرخانده) می‌شود تا دوباره مجموعه در یک صفحه قرار گیرد، (شکل ۲۵-۵۳ ب). میدان مغناطیسی ایجاد شده در (همان) مرکز انحنا اکنون دارای بزرگی ۱۵/۷۵ μT است ولی جهت آن معکوس شده است. شعاع دایرهٔ کوچکتر چقدر است؟



شکل ۲۵-۵۳ مسئلهٔ ۲۴

حل: بخش‌های مستقیم مدار سهمی در میدان مغناطیس در مرکز کمان‌ها ندارند چون امتداد آنها از مرکز می‌گذرد. برای شکل (الف) میدان مغناطیسی ناشی از کمان‌ها با هم جمع می‌شوند و با توجه به اینکه میدان حاصل از کمان در مرکز آن از رابطه $\mu_0 i\theta/۴\pi R$ به دست می‌آید، خواهیم داشت:

$$B_1=\frac{\mu_0 i\pi}{۴\pi R_{\text{کوچک}}}+\frac{\mu_0 i\pi}{۴\pi R_{\text{بزرگ}}}$$

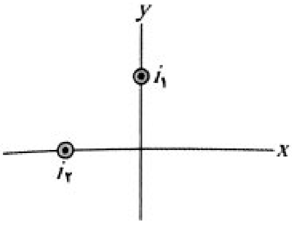
و برای شکل (ب) داریم:

$$B_2=\frac{\mu_0 i\pi}{۴\pi R_{\text{کوچک}}}+\frac{\mu_0 i\pi}{۴\pi R_{\text{بزرگ}}}$$

با عددگذاری و تقسیم دو رابطه بر هم داریم:

$$\frac{۴۷/۲۵}{۱۵/۷۵}=\frac{\frac{۲}{R_1}+۵۰}{\frac{۲}{R_1}-۵۰}\Rightarrow R_1=۰/۰۲m$$

۲۵- در شکل ۲۵-۵۴، دو سیم مستقیم دراز (نشان داده شده با مقطع) حامل جریان‌های $i_1=۳۰/۰\,mA$ و $i_2=۴۰/۰\,mA$ به طرف بیرون صفحه هستند. فاصلهٔ آنها از مبدأ یکسان است و یک میدان مغناطیسی $\vec{B}$ برقرار کرده‌اند. جریان i_1 تا چه مقدار باید تغییر کند تا $\vec{B}$ را به اندازهٔ ۲۰/۰° ساعتگرد بچرخاند؟



شکل ۲۵-۵۴ مسئلهٔ ۲۵

حل: زاویه میدان مغناطیسی برآیند ناشی از سیم‌های بلند برابر است با

$$\theta=\tan^{-1}\left(\frac{B_2}{B_1}\right)=\tan^{-1}\left[\left(\frac{\mu_0 i_2}{۲\pi R}\right)/\left(\frac{\mu_0 i_1}{۲\pi R}\right)\right]$$

$$=\tan^{-1}\left(\frac{i_2}{i_1}\right)=\tan^{-1}\left(\frac{۴}{۳}\right)=۵۳/۱۳^\circ$$

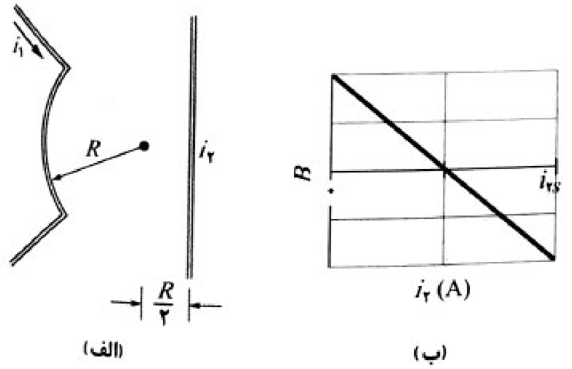
اگر بردار میدان مغناطیسی برایند به اندازهٔ ۲۰° بچرخد داریم

$$\varphi=۵۳/۱۳-۲۰=۳۳/۱۳^\circ$$

در نتیجه جریان i_1 چنین می‌شود:

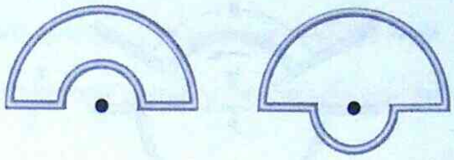
$$i_1=\frac{i_2}{\tan\vartheta}=\frac{۴}{\tan(۳۳/۱۳)}=۶۱/۳\,mA$$

••۲۶- شکل ۲۵-۵۵ الف دو سیم حامل جریان را نشان می‌دهد. سیم ۱ شامل یک کمان دایره‌ای به شعاع R و دو طول شعاعی است؛ سیم حامل جریان در جهت نشان داده شده و برابر با $i_1=۲/۰\,A$ است. سیم ۲ مستقیم و دراز است و جریان i_2 که می‌تواند تغییر کند در آن برقرار است و در فاصلهٔ $R/۲$ از مرکز کمان قرار دارد. میدان مغناطیسی $\vec{B}$ خالص ناشی از این دو جریان در مرکز انحنای کمان اندازه‌گیری می‌شود. شکل ۲۵-۵۵ ب نمودار مؤلفهٔ $\vec{B}$ را در جهت عمود بر شکل برحسب تابعی از جریان i_2 نشان می‌دهد. مقیاس محور افقی با $i_{2s}=۱/۰۰A$ مشخص شده است. زاویهٔ دربرگرفته شده توسط کمان چقدر است؟



شکل ۲۵-۵۵ مسئلهٔ ۲۶

حل: دو بخش مستقیم سیم ۱ سهمی در میدان مغناطیسی در مرکز کمان دایره‌ای ندارند، چون امتداد آنها از مرکز می‌گذرند. میدان حاصل از کمان از رابطهٔ $B_1=\mu_0 i\theta/۴\pi R$ به دست می‌آید و در اینجا جهت آن با توجه به قاعده دست راست به سمت خارج صفحه، $+\hat{k}$ است. میدان حاصل از سیم دراز ۲ از رابطه $B_2=\mu_0 i/۲\pi r$ به دست می‌آید که در اینجا $r=R/۲$



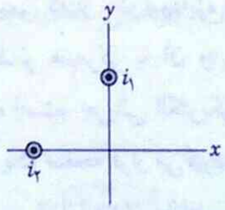
شکل مسأله ۲۴

پاسخ:
در یک حالت داریم $B_{small}+B_{big}=47{,}25\,\mu T$ و در حالت دیگر $B_{small}-B_{big}=15{,}75\,\mu T$(به این نکته که B_{small} مربوط است به میدان موجود در مرکز کمان کوچک که در واقع از یک میدان B_{Big} بزرگتر است!). با تقسیم یک رابطهٔ بر دیگری و حذف فاکتورهای عمومی داریم:

$$\frac{\left(1/r_{small}\right)+\left(1/r_{big}\right)}{\left(1/r_{small}\right)-\left(1/r_{big}\right)}=\frac{1+\left(r_{small}/r_{big}\right)}{1-\left(r_{small}/r_{big}\right)}=3$$

که حل آن بصورت $r_{small}=\frac{r_{big}}{2}$ است. با استفاده از این حقیقت که $r_{big}=4cm$ نتیجه خواهیم گرفت که شعاع کوچک برابر است با:
$r_{small}=2\,cm$

۲۵★★ در شکل زیر، سطح مقطع‌های دو سیم مستقیم و بلند حامل جریان نشان داده شده‌اند. جهت این جریان‌ها رو به بیرون صفحهٔ کاغذ است، و اندازه‌های آن‌ها عبارت‌اند از $i_1=30{,}0\ \text{mA}$ و $i_2=40{,}0\ \text{mA}$. فاصلهٔ دو سیم از مبدأ مختصات یکسان است، و میدان مغناطیسی ناشی از این جریان‌ها در مبدأ مختصات **B** است. اندازهٔ جریان i_1 به چه مقداری باید تغییر یابد تا **B** به اندازهٔ $20{,}0^\circ$ در جهت ساعتگرد تغییر جهت دهد؟



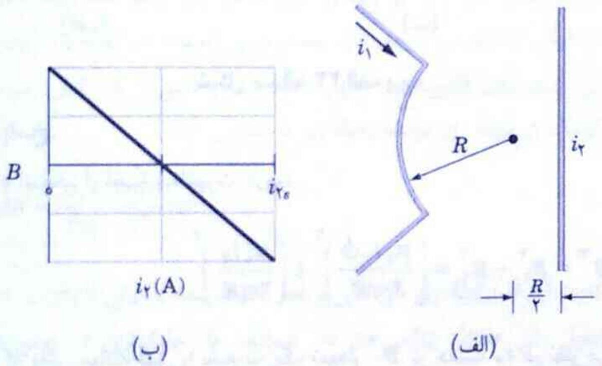
شکل مسأله ۲۵

پاسخ:
از رابطهٔ ۲۹-۴ برای ربط دادن میدانهای مغناطیسی B_2, B_1 به شدتهای جریان (به ترتیب i_2, i_1) برای دو سیم بلند استفاده می کنیم. زاویه میدان برآیند برابر است با:

$$\theta=\tan^{-1}\left(\frac{B_2}{B_1}\right)=\tan^{-1}\left(\frac{i_2}{i_1}\right)=53{,}13^\circ$$

برای بدست آوردن چرخش میدان توضیح داده شده در مسئله بایستی زاویهٔ نهایی را بصورت $\theta'=53{,}13^\circ-20^\circ=33{,}13^\circ$ داریم. مقدار نهایی جریان i_1 بایستی برابر $\frac{i_2}{\tan\theta}=61{,}3\ mA$ خواهد شد.

۲۶★★ شکل زیر الف دو سیم حامل جریان را نشان می‌دهد. سیم ۱ (از یک کمان دایره‌ای به شعاع R و دو قطعهٔ شعاعی تشکیل شده است و حامل جریان $i_1=2{,}0\ \text{A}$ در جهت نشان داده شده است. سیم ۲ مستقیم و بلند است، و جریان گذرنده از آن هم i_2 است که می‌تواند متغیر باشد. فاصلهٔ سیم ۲ از مرکز کمان برابر $R/2$ است. میدان مغناطیسی برایند **B** ناشی از دو جریان در مرکز انحنای کمان اندازه‌گیری می‌شود. شکل زیر ب نمودار مؤلفهٔ عمود بر صفحهٔ کاغذ میدان **B** را به‌صورت تابعی از جریان i_2 نشان می‌دهد. مقیاس محور افقی با $i_{2s}=1{,}00\ \text{A}$ داده می‌شود. زاویهٔ مرکزی روبه‌روی کمان چقدر است؟



شکل مسأله ۲۶

پاسخ:
جهت به سمت بیرون صفحه را در شکل (۲۹-۵۵ الف) بعنوان جهت مثبت در نظر می گیریم. میدان برآیند برابر است با:

$$B=\frac{\mu_0 i_1\phi}{4\pi R}-\frac{\mu_0 i_2}{2\pi\,(R/2)}$$

که از رابطهٔ ۲۹-۹ و۲۹-۴ استفاده کرده ایم. بنابر شکل ۲۹-۵۵ خواهیم دید که $B=0$ خواهد شد وقتی که $i_2=0{,}5A$ در نتیجه (با حل عبارت فوق با برابر قرار دادن B با صفر) خواهیم داشت:

$$\phi=4\left(\frac{i_2}{i_1}\right)=4\left(\frac{0{,}5}{2}\right)=1{,}00\,rad\ \ (\text{یا}\ \ 57{,}3^\circ)$$

۲۷★★ سیم بلندی را در امتداد محور x در نظر بگیرید که حامل جریان $30\ \text{A}$ در جهت مثبت محور x است. سیم دومی را در نظر بگیرید که در نقطهٔ (۰ و $4{,}0\ \text{m}$ و ۰) و حامل جریان $40\ \text{A}$ در

جهت مثبت محور z است. اندازهٔ میدان مغناطیسی حاصل از این دو جریان در نقطهٔ (۰ و ۲٫۰m و ۰) چقدر است؟

پاسخ:

سهم سیم اول در $\mathbf{B}_{net}$ (طبق رابطهٔ ۲۹-۴) برابر است با:

$$\mathbf{B}_1 = \frac{\mu_0 i_1}{2\pi r_1}\hat{k} = \frac{(4\pi\times10^{-7}\,T.m/A)(30A)}{2\pi(2.0m)}\hat{k}$$

$$=(3.0\times10^{-6}\,T)\,\hat{k}$$

فاصلهٔ سیم تا نقطه ای که $\mathbf{B}_{net}$ را داریم بدست می آوریم برابر است با $r_2 = 4m - 2m = 2m$ در نتیجه:

$$\mathbf{B}_2 = \frac{\mu_0 i_2}{2\pi r_2}\hat{i} = \frac{(4\pi\times10^{-7}\,T.m/A)(40A)}{2\pi(2.0m)}\hat{i}$$

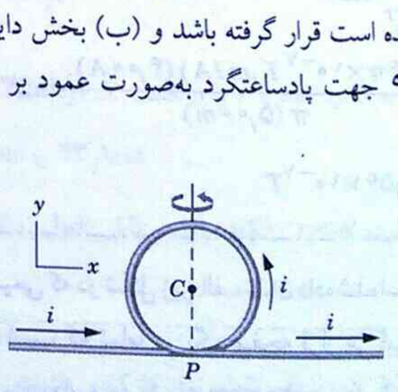
$$=(4.0\times10^{-6}\,T)\,\hat{i}$$

که عمود بر $\mathbf{B}_1$ می باشد. اندازهٔ $\mathbf{B}_{net}$ برابر خواهد بود با:

$$|\mathbf{B}_{net}| = \sqrt{(3.0\times10^{-6}\,T)^2 + (4.0\times10^{-6}\,T)^2}$$

$$=5.0\times10^{-6}\,T$$

۲۸★★ در شکل زیر، قسمتی از یک سیم بلند روکش‌دار حامل جریان $i = 5.78\,\text{mA}$ را می‌بینیم که بخشی از آن به‌صورت دایره‌ای به شعاع $R = 1.89\,\text{cm}$ خم شده است. با استفاده از نمادهای بردار یکه، در حالت‌های زیر، اندازهٔ میدان مغناطیسی را در مرکز انحنای C بیابید که: (الف) بخش دایره‌ای در صفحهٔ کاغذ چنان که نشان داده شده است قرار گرفته باشد و (ب) بخش دایره‌ای پس از چرخش ۹۰° جهت پادساعتگرد به‌صورت عمود بر صفحهٔ کاغذ قرار بگیرد.



شکل مسأله ۲۸

پاسخ:

سهم میدان ناشی از المان مستقیم سیم (بی نهایت) در B_C از رابطهٔ زیر بدست می آید که:

$$B_{C_1} = \frac{\mu_0 i}{2\pi R} \quad \text{(مربوط به سیم)}$$

سهم میدان ناشی از حلقه دایره ای برابر است با:

$$B_{C_2} = \frac{\mu_0 i}{2R} \Rightarrow \quad \text{(مربوط به حلقه)}$$

با استفاده از قانون دست راست، میدان مغناطیسی مربوط به یک سیم بلند و حلقه جریان (در مرکز C) درون سو یعنی در جهت $\hat{k}$ می باشد.

$$B_C = B_{C_1} + B_{C_2} = \frac{\mu_0 i}{2R}\left(1+\frac{1}{\pi}\right)$$

$$=\frac{(4\pi\times10^{-7}\,T.m/A)(5.78\times10^{-3}A)}{2(0.0189m)}\left(1+\frac{1}{\pi}\right)$$

$$=2.53\times10^{-7}\,T$$

$\mathbf{B}_C$ در راستای θ به سمت خارج صفحه واقع است (یا در راستای $+z$). به بیان بردار یکه داریم:

$$\mathbf{B}_C = (2.53\times10^{-7}\,T)\,\hat{k}$$

ب) در این حالت داریم:

$$\mathbf{B}_{C_1} \perp \mathbf{B}_{C_2} \Rightarrow$$

$$B_C = \sqrt{B_{C_1}^2 + B_{C_2}^2} = \frac{\mu_0 i}{2R}\sqrt{1+\frac{1}{\pi^2}}$$

$$=\frac{(4\pi\times10^{-7}\,T.m/A)(5.78\times10^{-3}A)}{2(0.0189\,m)}\sqrt{1+\frac{1}{\pi^2}}$$

$$=2.02\times10^{-7}\,T$$

که $\mathbf{B}_C$ در راستای هر زاویه ای که برابر مقدار زیر است واقع است (هر زاویه نسبت به صفحه):

$$\tan^{-1}\left(\frac{B_{C_1}}{B_{C_2}}\right) = \tan^{-1}\left(\frac{1}{\pi}\right) = 17.66°$$

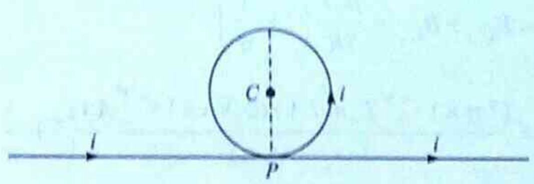
و در حالت نمایش برداری:

$$B_C = 2.02\times10^{-7}\,T\ (\cos 17.66°\ \hat{i} + \sin 17.66°\ \hat{k})$$

$$=(1.92\times10^{-7}\,T)\,\hat{i} + (6.12\times10^{18}\,T)\ \hat{k}$$

مثال ۲) (الف) یک رشته سیم دراز به صورت نشان داده‌شده در شکل مسئله در آمده است، بدون اینکه در نقطهٔ تلاقی P تماسی ایجاد شود. شعاع قسمت دایره‌ای این مدار R است. وقتی جریان i به صورت نموده درشکل است، مقدار و جهت میدان مغناطیسی B را در مرکز C بخش دایره ای مشخص کنید. (ب) بخش دایره‌ای سیم را بدون واپیچش

حول قطر عمود بر بخش مستقیم سیم (در شکل با خط‌چین نشان داده شده است) می‌چرخانیم. در این حالت گشتاور مغناطیسی مربوط به حلقهٔ دایره‌ای در جهت جریان در بخش مستقیم سیم است. میدان B در نقطه C در این حالت تعیین کنید.



شکل مثال ۲

پاسخ : میدان مغناطیسی برای یک حلقه جریان و یک خط جریان مستقیم برابر است با :

الف) $$\oint B\,dL = \mu_0 i \quad \Rightarrow \quad B\int dL = \mu_0 i$$

$$B(2\pi r) = \mu_0 i \quad \Rightarrow \quad B = \frac{\mu_0 i}{2\pi r}$$

به طرف بیرون صفحه ⊙ است.

ب) $$dB = \frac{\mu_0 i}{4\pi r^2}\int dL \quad \Rightarrow B = \frac{\mu_0 i}{4\pi r^2}\int_0^{2\pi} r\,d\theta$$

$$B_2 = \frac{\mu_0 i}{4\pi r}2\pi \text{ (به طرف بیرون صفحه) } \Rightarrow B_2 = \frac{\mu_0 i}{2r}$$

برای میدان حلقه و خط داریم:

$$B = B_1 + B_2 = \frac{\mu_0 i}{2\pi r} + \frac{\mu_0 i}{2r} = \frac{\mu_0 i}{2\pi r}(1+\pi)$$

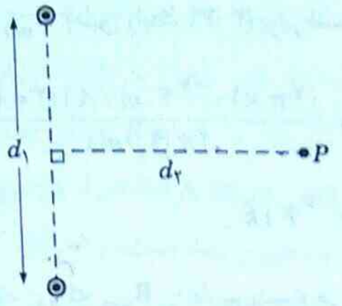
ب) برای محاسبه جهت B داریم :

$$\tan\theta = \frac{B_1}{B_2} = \frac{\frac{\mu_0 i}{2\pi r}}{\frac{\mu i}{2r}} = \frac{1}{\pi} \Rightarrow \tan\theta = \frac{1}{\pi}$$

θ زاویه بین جهت میدان با راستای عمود بر صفحه کاغذ به سمت خارج است .جهت $\mathbf{B}_1$ بر جهت $\mathbf{B}_2$ در نقطه P عمود است لذا داریم

$$B = \sqrt{B_1^2 + B_2^2} = \frac{\mu_0 i}{2\pi R}\sqrt{1+\pi^2}$$

۲۹★★ شکل زیر سطح مقطع‌های دو سیم مستقیم و بسیار بلند را نشان می‌دهد که هریک حامل جریان ۴٫۰۰ A در جهت رو به بیرون صفحهٔ کاغذ است. فرض کنید $d_1 = 6.00\,m$ و $d_2 = 4.00\,m$ است. اندازهٔ میدان مغناطیسی برایند ناشی از دو جریان در نقطهٔ P، که روی عمود منصف خط واصل بین دو سیم قرار دارد، چقدر است؟



شکل مسأله ۲۹

پاسخ:

بنابر قانون دست راست (و تقارن) می بینیم که $\vec{B}_{net}$ در راستای محور y (که از p می گذرد) واقع است و از دو مؤلفهٔ y میدان مساوی تشکیل شده است. با استفاده از رابطهٔ ۲۹–۱۷ داریم:

$$\left|\mathbf{B}_{net}\right| = 2\frac{\mu_0 i}{2\pi r}\sin\theta$$

که در آن داریم:

$$r = r = \sqrt{\frac{d_2^2 + d_1^2}{4}} = 5.00\,m\ ,\ i = 4.00\,A \Rightarrow$$

$$\theta = \tan^{-1}\left(\frac{d_2}{d_1/2}\right) = \tan^{-1}\left(\frac{4.00\,m}{6.00\,m/2}\right)$$

$$= \tan^{-1}\left(\frac{4}{3}\right) = 53.1°$$

در نتیجه داریم:

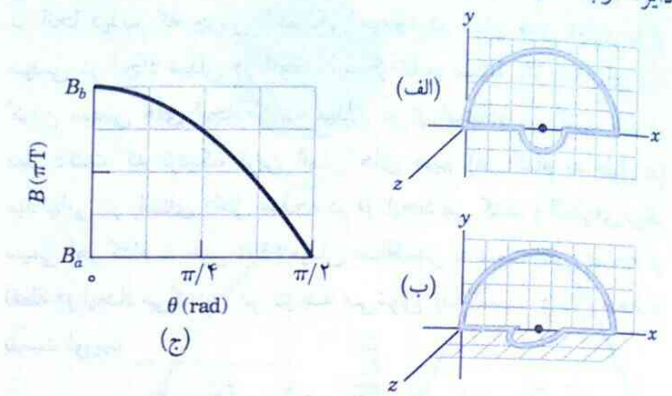
$$\left|\mathbf{B}_{net}\right| = \frac{\mu_i}{\pi r}\sin\theta$$

$$= \frac{(4\pi\times10^{-7}\,T.m/A)(4.00\,A)}{\pi(5.00\,m)}\sin 53.1°$$

$$= 2.56\times10^{-7}\,T$$

۳۰★★★ سیمی که در شکل زیر الف نشان داده شده‌است، حلقه‌ای حامل جریان است که تماماً در یک صفحه قرار می‌گیرد و متشکل است از یک نیم‌دایره به شعاع ۱۰٫۰ cm، نیم‌دایرهٔ کوچک‌تری به‌همان مرکز، و دو قطعهٔ شعاعی. نیم‌دایرهٔ کوچک‌تر از صفحهٔ شکل به بیرون چرخانده می‌شود تا این که نهایتاً زاویهٔ چرخش θ به ۹۰° می‌رسد و این نیم‌دایره در صفحهٔ عمود بر حالت اولیه قرار می‌گیرد (شکل زیر ب). در شکل زیرج، اندازهٔ میدان مغناطیسی برایند در مرکز انحنا برحسب زاویهٔ θ رسم شده است. مقیاس محور

قائم با $B_a = ۱۰٫۰ \mu T$ و $B_b = ۱۲٫۰ \mu T$ داده می‌شود. شعاع نیم دایرهٔ کوچک چقدر است؟



شکل مسأله ۳۰

پاسخ:

در ابتدا داریم:

$$B_i = \frac{\mu_\circ i \phi}{۴\pi R} + \frac{\mu_\circ i \phi}{۴\pi r}$$

که این با استفاده از رابطهٔ ۲۹-۹ بدست می آید. در حالت آخر با استفاده از قضیهٔ فیثاغورث داریم:

$$B_f^۲ = B_z^۲ + B_y^۲ = \left(\frac{\mu_\circ i \phi}{۴\pi R}\right)^۲ + \left(\frac{\mu_\circ i \phi}{۴\pi r}\right)^۲$$

در نتیجه با به توان ۲ رساندن B_i و تقسیم آن بر $B_f^۲$ بدست می آوریم:

$$\left(\frac{B_i}{B_f}\right)^۲ = \frac{\left[(۱/R) + (۱/r)\right]^۲}{(۱/R)^۲ + (۱/r)^۲}$$

با استفاده از نمودار (شکل (۲۹-۵۸ ج) و با توجه به مقادیر بیشینه و کمینه) بدست می آوریم:

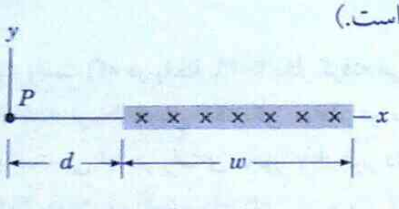
$$\frac{B_i}{B_f} = \frac{۱۲}{۱۰} = ۱٫۲$$

و این امکان را به ما می دهد تا r را بر حسب R حل کنیم:

$r = ۲٫۳ \, cm$ یا $۴۳٫۱ cm$

از آنجائیکه داریم $r < R$ آنگاه جواب قابل قبول برابر است با $r = ۲٫۳ \, cm$.

۳۱★★★ شکل زیر سطح مقطع نوار نازک و بلندی به عرض $W = ۴٫۹۱ cm$ را نشان می‌دهد که حامل جریان $i = ۴٫۶۱ \mu A$ با توزیع یکنواخت رو به درون صفحهٔ کاغذ است. میدان مغناطیسی **B** را در نقطهٔ P در صفحهٔ نوار، در فاصلهٔ $d = ۲٫۱۶ \, cm$ از یک سر آن، برحسب نمادهای برداریکه به‌دست آورید. (*راهنمایی*: فرض کنید این نوار از تعداد بسیار زیادی سیم نازک و بلند و موازی هم تشکیل شده است.)



شکل مسأله ۳۱

پاسخ:

نواری به ضخامت dx را در نظر بگیرید که در فاصلهٔ x از نقطهٔ p واقع است. شدت جریان حمل شده توسط آن برابر است با $di = \frac{i \, dx}{W}$ و سهم آن در B_p برابر است با:

$$dB_p = \frac{\mu_\circ di}{۲\pi x} = \frac{\mu_\circ i \, dx}{۲\pi x w}$$

بنابراین:

$$B_p = \int dB_p = \frac{\mu_\circ i}{۲\pi w} \int_d^{d+w} \frac{dx}{x} = \frac{\mu_\circ i}{۲\pi w} \ln\left(۱ + \frac{w}{d}\right) \Rightarrow$$

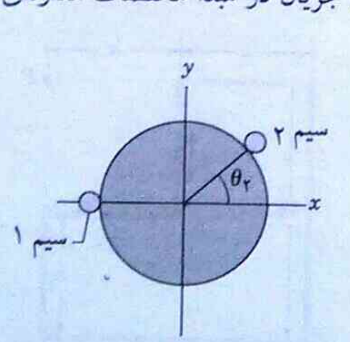
$$B_p = \frac{(۴\pi \times ۱۰^{-۷} T.m/A)(۴٫۶۱ \times ۱۰^{-۶} A)}{۲\pi (۰٫۰۴۹۱ m)}$$

$$\times \ln\left(۱ + \frac{۰٫۰۴۹۱}{۰٫۰۲۱۶}\right) = ۲٫۲۳ \times ۱۰^{-۱۱} T$$

که $\mathbf{B}_p$ به سمت بالاست. به بیان دیگر بردار یکه داریم:

$$\mathbf{B}_p = (۲٫۲۳ \times ۱۰^{-۱۱} T) \, \hat{j}$$

۳۲★★★ شکل زیر سطح مقطع‌های دو سیم مستقیم و بلند را نشان می‌دهد که در کنار استوانه‌ای پلاستیکی به شعاع $۲۰٫۰ cm$ نگه داشته شده‌اند. سیم ۱ حامل جریان $i_۱ = ۶۰٫۰ mA$ در جهت رو به بیرون صفحه است، و در طرف چپ استوانه ثابت نگه‌داشته شده‌است. سیم ۲ حامل جریان $i_۲ = ۴۰٫۰ mA$ در جهت‌روبه بیرون صفحه است، و این قابلیت را دارد که دور استوانه بگردد. در چه زاویهٔ (مثبت) $\theta_۲$ باید سیم ۲ را نگه بداریم تا میدان مغناطیسی برایند ناشی از دو جریان در مبدأ مختصات اندازه‌ای برابر $۸۰٫۰ nT$ داشته باشد؟



شکل مسأله ۳۲

پاسخ:

طبق قانون دست راست (که در رابطهٔ ۲۹-۳ بکار گرفته می شود) میدان مغناطیسی ایجاد شده توسط جریان الکتریکی موجود در سیم ۱ که در مبدأ مختصات بدست می آید در راستای محور $+y$ قرار دارد. اندازهٔ B_1 توسط رابطهٔ ۲۹-۴ بدست می آید. میدان ناشی از جریان الکتریکی سیم ۲ دارای دو مؤلفهٔ x، y است که وابسته به اندازهٔ آن، B_2 (طبق رابطهٔ ۲۹-۴) و سینوسها و کسینوسهای زاویه ها می باشد. با استفاده از قانون دست راست نتیجه می گیریم که وقتی سیم ۲ در زاویه θ_2 (نشان داده شده در شکل ۲۹-۰۶) قرار دارد و مؤلفه های آن بصورت زیر خواهد بود:

$$B_{2x} = B_2 \sin\theta_2 \quad , \quad B_{2y} = -B_2 \cos\theta_2$$

مربع اندازه میدان برآیند (قضیهٔ فیثاغورث) برابر خواهد بود با مجموع مربعهای مؤلفه های برآیند x , y :

$$B^2 = (B_2 \sin\theta_2)^2 + (B_1 - B_2\cos\theta_2)^2$$

$$= B_1^2 + B_2^2 - 2B_1B_2\cos\theta_2$$

چون $\sin^2\theta + \cos^2\theta = 1$ در نتیجه با استفاده از قانون کسینوسها داریم:

$$B_1 = \frac{\mu_0 i_1}{2\pi R} = 60\,nT$$

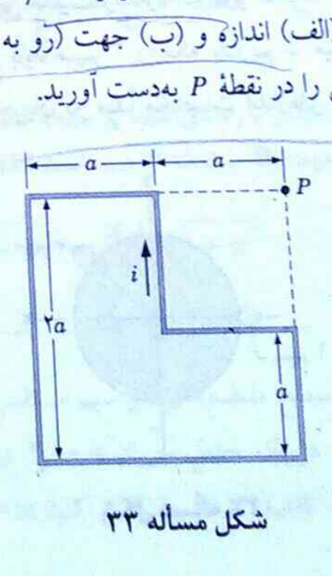
$$B_2 = \frac{\mu_0 i_2}{2\pi R} = 40\,nT$$

با داشتن این فرض که میدان برآیند دارای اندازهٔ $B = 80\,nT$ است. آنگاه بدست خواهیم آورد:

$$\theta_2 = \cos^{-1}\left(\frac{B_1^2 + B_2^2 - B^2}{2B_1B_2}\right) = \cos^{-1}\left(\frac{-1}{4}\right) = 104°$$

که در آن جواب مثبت در نظر گرفته شده است.

۳۳★★★ در شکل زیر، طول a برابر $4.7\,cm$ و جریان i برابر $13\,A$ است. (الف) اندازه و (ب) جهت (رو به درون یا بیرون) میدان مغناطیسی را در نقطهٔ P به‌دست آورید.



شکل مسأله ۳۳

پاسخ:

الف- از بحث جزء مستقیم بحث شده در مسئلهٔ ۲۹-۱ استفاده می کنیم. در آنجا دیدیم که جریان الکتریکی موجود در المان های موازی با p سهمی در ایجاد میدان در آنجا ندارد. از نتایج مسئلهٔ ۲۹-۲۱ برای پیدا کردن سهمی های ایجاد کننده میدان در p استفاده می کنیم. باید در نظر داشت که نزدیک ترین المان های سیم (هر کدام به طول a) میدانهایی در راستای داخل صفحه در p ایجاد می کنند. و المانهای دیگر سیمی (هر کدام به طول $2a$) میدان مغناطیسی به سمت خارج صفحه در نقطهٔ p ایجاد می‌کنند. در نتیجه می‌توان (به سمت داخل صفحه) بدست آوریم:

$$B_p = 2\left(\frac{\sqrt{2}\mu_0 i}{8\pi a}\right) - 2\left(\frac{\sqrt{2}\mu_0 i}{8\pi(2a)}\right) = \frac{\sqrt{2}\mu_0 i}{8\pi a}$$

$$= \frac{\sqrt{2}\,(4\pi\times10^{-7}\,T.m/A)(13A)}{8\pi\,(0.047m)}$$

$$= 1.96\times10^{-5}\,T \approx 2.0\times10^{-5}\,T$$

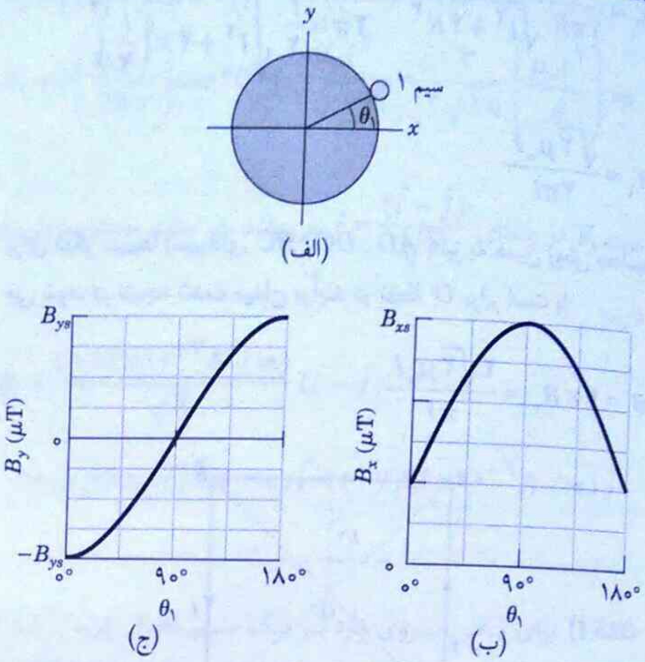
ب- جهت میدان به سمت داخل صفحه است.

۳۴★★★ دو سیم نازک و بلند و مستقیم حامل جریان به‌طور چسبیده به استوانه‌ای پلاستیکی، که هم‌طول با آن‌هاست، در فاصلهٔ شعاعی $R = 20.0\,cm$ از محور مرکزی استوانه نگه‌داشته‌می‌شوند. شکل زیرالف، سطح مقطع‌های استوانهٔ پلاستیکی و فقط سیم ۱ را نشان می‌دهد. در حالی که سیم ۲ را ثابت نگه‌داشته‌ایم، سیم ۱ را به گرد استوانه از زاویهٔ $\theta_1 = 0°$ تا $\theta_1 = 180°$ می‌چرخانیم تا ربع اول و ربع دوم دستگاه مختصات xy را بپیماید. میدان مغناطیسی برایند $\mathbf{B}$ در مرکز استوانه به‌صورت تابعی از θ_1 اندازه‌گیری می‌شود. شکل زیر ب مؤلفهٔ x میدان، B_x، را به‌صورت تابعی از θ_1 (با مقیاس $B_{xs} = 6.0\,\mu T$ برای محور قائم) نشان می‌دهد. شکل زیرج مؤلفهٔ y میدان، B_y، را (با مقیاس $B_{ys} = 4.0\,\mu T$ برای محور قائم) نشان‌می‌دهد. (الف) سیم ۲ در چه زاویهٔ θ_2 قرار گرفته است؟ (ب) اندازه و (ج) جهت (رو به بیرون یا درون) جریان گذرنده از سیم ۱ را به‌دست آورید. (د) اندازه و (هـ) جهت جریان گذرنده از سیم ۲ را هم به‌دست آورید.

پاسخ:

یادآوری می کنیم وقتی که هیچ مؤلفه y از میدان مغناطیسی ناشی از سیم ۱ (که طبق قانون دست راست مربوط می شود به حالتی که سیم ۱ در زاویهٔ $90° = \frac{\pi}{2}\,rad$ قرار دارد) وجود ندارد ومؤلفهٔ y میدان کل برابر صفر خواهد بود. (شکل (بالا د) را ملاحظه کنید). این بدین

معناست که سیم ۲ در $+\frac{\pi}{۲}$ یا $-\frac{\pi}{۲}$ واقع است.



شکل مسأله ۳۴

الف- فرض می کنیم که سیم ۲ بایستی در $-\frac{\pi}{۲} rad$ ($-۹۰°$، ته استوانه) باشد در نتیجه یک مانعی برای حرکت سیم ۱ بروز خواهد کرد (که برای رسم این نمودارها لازم است) اگر در آن سیم (۱) در هر جای قسمت بالایی نیمدایره باشد.

ب- با ملاحظه به داده های مربوط به $\theta = ۹۰°$ در شکل بالا (ب) که در آنجا یک $B_{net\ x}$ (معادل $+۶nT$) وجود دارد. به این نتیجه می‌رسیم که در آن حالت:

$$B_{۱x} = ۶{,}۰\,\mu T - ۲{,}۰\,\mu T = ۴{,}۰\,\mu T$$

با استفاده از رابطهٔ ۲۹-۴ خواهیم داشت:

$$i_۱ = \frac{۲\pi R B_{۱x}}{\mu_۰}$$

$$= \frac{۲\pi (۰{,}۲۰۰m)(۴{,}۰\times ۱۰^{-۶}T)}{۴\pi\times ۱۰^{-۷}\,T.m/A} = ۴{,}۰\ A$$

ج- این حقیقت که شکل (ب) با افزایش $\theta_۱$ از صفر تا $۹۰°$، افزایش پیدا می کند بیانگر اینست که جریان سیم ۱ به سمت خارج صفحه است و این میدان تشکیل شده است بواسطهٔ خنثی شدن $B_{net\ y}$ در $\theta_۱ = ۹۰°$ که قبلاً ذکر شد. (با مراجعه به شکل (ج))

د- با مراجعه به شکل (ب) و با مد نظر داشتن اینکه در $\theta_۱ = ۰$ هیچ مؤلفهٔ xی از میدان مغناطیسی ناشی از سیم ۱ وجود ندارد، خواهیم داشت:

$$B_{۲x} = +۲{,}۰\,\mu T$$

با استفاده از رابطهٔ ۲۹-۴ اندازهٔ جریان برابر خواهد بود با:

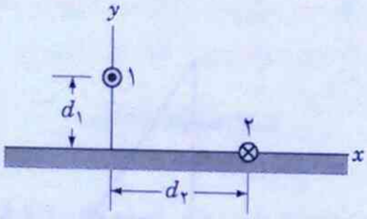
$$i_۲ = \frac{۲\pi R B_{۲x}}{\mu_۰}$$

$$= \frac{۲\pi (۰{,}۲۰۰m)(۲{,}۰\times ۱۰^{-۶}T)}{۴\pi\times ۱۰^{-۷}\,T.m/A} = ۲{,}۰\,A$$

ه- با استفاده از قانون دست راست می توان نتیجه گیری کرد که جهت جریان سیم ۲ به سمت داخل صفحه است.

۲۹-۳ نیروی بین دو جریان موازی

★**۳۵** شکل زیر سطح مقطع سیم بلند و مستقیم ۱ را که حامل جریان $۴{,}۰۰\ mA$ در جهت رو به بیرون صفحهٔ کاغذ است، نشان می دهد. سیم ۱ در فاصلهٔ $d_۱ = ۲{,}۴۰\ cm$ از یک سطح قرار دارد. سیم بلند ۲ که با سیم ۱ موازی است، در فاصلهٔ افقی $d_۲ = ۵{,}۰۰\ cm$ از سیم ۱ قرار دارد و حامل جریان $۶{,}۸۰\ mA$ در جهت رو به درون صفحه است. مؤلفهٔ x نیروی مغناطیسی وارد بر *واحد طول* سیم ۲ بر اثر جریان گذرنده از سیم ۱ چیست؟



شکل مسأله ۳۵

پاسخ:

رابطهٔ ۲۹-۱۳ اندازهٔ نیروی بین سیم ها را بدست می دهد و مؤلفهٔ x از مقداری که بایستی اندازه اش در

$\cos\phi =$

ضرب شود را پیدا می کند. در نتیجه مؤلفهٔ x نیرویی بر واحد طول برابر خواهد بود با:

$$\frac{F_x}{L} = \frac{\mu_۰ i_۱ i_۲ d_۲}{۲\pi(d_۱^۲ + d_۲^۲)}$$

$$= \frac{(۴\pi\times ۱۰^{-۷}\,T.m/A)(۴{,}۰۰\times ۱۰^{-۳}A)}{۲\pi\left[(۰{,}۰۲۴۰m)^۲ + (۰{,}۰۵۰m)^۲\right]}$$

$$\times \frac{(۶{,}۸۰\times ۱۰^{-۳}A)(۰{,}۰۵۰m)}{۲\pi\left[(۰{,}۰۲۴۰m)^۲ + (۰{,}۰۵۰m)^۲\right]}$$

$$= ۸{,}۸۴\times ۱۰^{-۱۱}\ N/m$$

مثـال ۳) حلقـهٔ مربعـی بـه ضـلع l، حامـل جریـان I را در

نظر بگیرید، نشان دهید شدت میدان در مرکز آن برابر است با: $B=\frac{2\sqrt{2}\mu_0 I}{\pi l}$.

پاسخ:

میدان مغناطیسی ناشی از یک سیم که حامل جریان I به طول l است را در نقطه‌ای روی عمود منصف سیم به فاصلهٔ R از سیم محاسبه می کنیم.

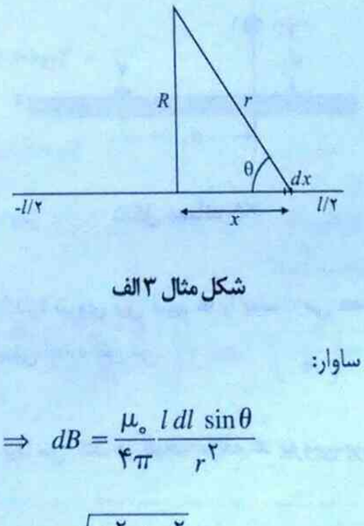
بنابر قانون بیوساوار، بزرگی $d\mathbf{B}$ از رابطه زیر بدست می‌آید:

$$d\mathbf{B}=\frac{\mu_0 i}{4\pi}\times\frac{d\mathbf{l}\times\mathbf{r}}{r^3}$$

که در آن $\mathbf{r}$ بردار جابه‌جایی از عنصر جریان تا نقطه P و θ زاویه میان این بردار $d\mathbf{l}$ است قانون بیوساوار را می‌توان به صورت زیر نوشت:

$$d\mathbf{B}=\frac{\mu_0 i}{4\pi}\frac{dl\sin\theta}{r^2} \qquad (۲۹-۱)$$

$$\mu_0=4\pi\times10^{-7}\frac{T.m}{A}\approx1.26\times10^{-6}\frac{T.m}{A} \qquad (۲۹-۲)$$



شکل مثال ۳ الف

طبق قانون بیو ساوار:

$$B=\int dB \Rightarrow dB=\frac{\mu_0}{4\pi}\frac{I\,dl\,\sin\theta}{r^2}$$

$$\sin\theta=\frac{R}{r}\quad,\quad r=\sqrt{R^2+x^2}\Rightarrow$$

$$dB=\frac{\mu_0}{4\pi}\frac{I\,dx\,R}{(R^2+x^2)^{3/2}}$$

$$=\frac{\mu_0 I R}{4\pi}\int_{-\frac{l}{2}}^{\frac{l}{2}}\frac{dx}{(R^2+x^2)^{3/2}}\Rightarrow$$

$$B=\frac{\mu_0 I}{2\pi R}\frac{l}{\sqrt{l^2+4R^2}} \qquad (I$$

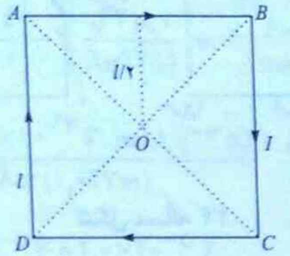
اکنون برای محاسبهٔ میدان در مرکز مربع با محاسبهٔ میدان ناشی از یک سیم نقطه ای روی عمودمنصف آن داریم:

$$B_1=\frac{\mu_0 I}{2\pi R}\frac{l}{\sqrt{l^2+4R^2}}=\frac{\mu_0 I}{2\pi\times\frac{l}{2}}\frac{l}{\sqrt{l^2+4\times\left(\frac{l}{2}\right)^2}}\Rightarrow$$

$$B_1=\frac{\sqrt{2}\mu_0 I}{2\pi l}$$

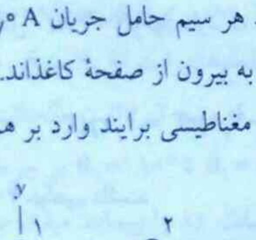
برای دیگر سیم‌ها (سیم‌های AD , DC , BC) نیز به همین روش محاسبه می شود. در نتیجه شدت میدان برآیند در نقطهٔ O برابر است با:

$$B=4\times B_1=\frac{2\sqrt{2}\mu_0 I}{\pi l}$$



شکل مثال ۳ب

★★۳۶ در شکل زیر، چهار سیم بلند و مستقیم که عمود بر صفحه‌اند و سطح مقطع‌های آن‌ها مربعی به ضلع $a=8.50$ cm ساخته‌اند، نشان داده شده‌اند. هر سیم حامل جریان 15.0 A است و هر چهار جریان در جهت رو به بیرون از صفحهٔ کاغذاند. برحسب نمادگذاری بردار یکه، نیروی مغناطیسی برایند وارد بر هر متر *طول* سیم ۱ را محاسبه کنید.



شکل مسأله ۳۶

پاسخ:

با استفاده از رابطهٔ ۲۹-۱۳ نیروی وارد شده بر، مثلاً سیم ۱، (سیم واقع در سمت چپ بالایی شکل) در راستای قطر قرار دارد. (به سمت سیم ۳ که در سمت راست پایین واقع است). فقط نیروهای موجود در راستای قطری سهم دارند (یا مؤلفه های آنها). در زاویهٔ $\theta=45°$ می توان نیرو بر واحد متر وارد شده بر سیم ۱ را بصورت زیر بدست آورد:

$$F_1=\frac{3}{2\sqrt{2}\pi}\frac{(4\pi\times10^{-7}\,T.m/A)(15.0A)^2}{(8.50\times10^{-2}m)}\Rightarrow$$

$$F_1=1.12\times10^{-3}\;N/m$$

$$F_1 = \left| \mathbf{F}_{12} + \mathbf{F}_{13} + \mathbf{F}_{14} \right| = 2F_{12}\cos\theta + F_{13} \Rightarrow$$

$$F_1 = 2\left(\frac{\mu_0 i^2}{2\pi a}\right)\cos 45° + \frac{\mu_0 i^2}{2\sqrt{2}\pi a} = \frac{3}{2\sqrt{2}\pi}\left(\frac{\mu_0 i^2}{a}\right) \Rightarrow$$

جهت $\mathbf{F}_1$ در راستای $\hat{r} = \frac{(\hat{i} - \hat{j})}{\sqrt{2}}$ می باشد. در حالت نمایش برداریکه داریم:

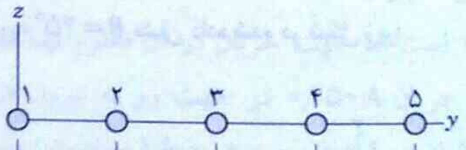
$$\mathbf{F}_1 = \frac{(1.12\times 10^{-3} N/m)}{\sqrt{2}}(\hat{i} - \hat{j})$$

$$= (7.94\times 10^{-4} N/m)\,\hat{i} + (-7.94\times 10^{-4} N/m)\,\hat{j}$$

نکتهٔ ۱) برای یافتن نیروی وارد بر یک سیم حامل جریان که از سیم دیگر حامل جریان حاصل می شود، ابتدا میدان مغناطیسی حاصل از سیم دوم را در محل سیم اول به دست می آوریم سپس نیروی وارد توسط این میدان را بر سیم اول پیدا می کنیم.

نکتهٔ ۲) جریان های موازی یکدیگر را جذب می کنند و جریانهای پادموازی یکدیگر را دفع می کنند.

۳۷★★ در شکل زیر، پنج سیم بلند و موازی در صفحهٔ xy به فاصلهٔ $d = 50.0\,cm$ از هم قرار داده شده‌اند. جریان‌های رو به درون صفحه عبارت‌اند از: $i_1 = 2.00\,A$، $i_3 = 0.250\,A$، $i_4 = 4.00\,A$، و $i_5 = 2.00\,A$. جریان $i_2 = 4.00\,A$ در جهت رو به بیرون صفحهٔ کاغذ است. اندازهٔ نیروی برایند وارد بر واحد طول سیم ۳ را بر اثر جریان‌های گذرنده از سیم‌های دیگر به‌دست آورید.



شکل مسأله ۳۷

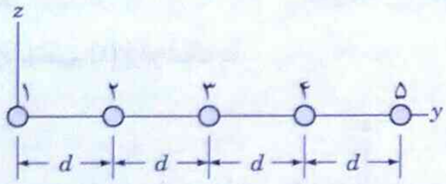
پاسخ:

با استفاده از عینک بزرگ نما خواهیم دید که همه سیم ها، غیر از i_2 در راستای داخل صفحه واقع هستند. سیم ۳، همهٔ سیم ها غیر از سیم ۲، جذب می کند. با در نظر گرفتن $d = 0.5m$ برآیند نیروی وارد شده (بر واحد طول) طبق رابطهٔ ۲۹-۱۳ با علامت مثبت یک نیروی راست گرا بصورت زیر ایجاد می کند:

$$\frac{|\mathbf{F}|}{l} = \frac{\mu_0 i_3}{2\pi}\left(-\frac{i_1}{2d} + \frac{i_2}{d} + \frac{i_4}{d} + \frac{i_5}{2d}\right) \Rightarrow$$

$$\frac{|\mathbf{F}|}{L} = 8.00\times 10^{-7} N/m$$

۳۸★★ در شکل زیر، پنج سیم بلند موازی در صفحهٔ xy به فاصلهٔ $d = 8.00\,cm$ از هم نشان داده شده‌اند. طول هر سیم $10.0\,m$ و جریان گذرنده از هریک برابر $3.00\,A$ در جهت رو به بیرون صفحهٔ کاغذ است. بر هر سیم نیرویی مغناطیسی بر اثر جریان گذرنده از سیم‌های دیگر وارد می‌آید. با استفاده از نمادگذاری بردار یکه، نیروی مغناطیسی برایند وارد بر (الف) سیم ۱، (ب) سیم ۲، (ج) سیم ۳، (د) سیم ٤، و (ه) سیم ۵ را محاسبه کنید.



شکل مسأله ۳۸الف

پاسخ:

سیمها را از سمت چپ به راست با بر چسب های ۱ تا ۵ علامت گذاری کرده و از رابطهٔ ۲۹-۱۳ استفاده می نماییم. آنگاه:

الف- اندازهٔ نیروی وارد بر سیم ۱ برابر خواهد شد با:

$$\mathbf{F}_1 = \frac{\mu_0 i^2 l}{2\pi}\left(\frac{1}{d} + \frac{1}{2d} + \frac{1}{3d} + \frac{1}{4d}\right)\hat{j} = \frac{25\mu_0 i^2 l}{24\pi d}\hat{j}$$

$$= \frac{25(4\pi\times 10^{-7} T.m/A)(3.00A)^2(10.0m)}{24\pi(8.00\times 10^{-2}m)}\hat{j}$$

$$= (4.69\times 10^{-4} N)\,\hat{j}$$

ب- بطور مشابه برای سیم ۲ خواهیم داشت:

$$\mathbf{F}_2 = \frac{\mu_0 i^2 l}{2\pi}\left(\frac{1}{2d} + \frac{1}{3d}\right)\hat{j} = \frac{5\mu_0 i^2 l}{12\pi d}\hat{j}$$

$$= (1.88\times 10^{-4} N)\,\hat{j}$$

ج- بدلیل تقارن $F_3 = 0$ است.

د- $\mathbf{F}_4 = -\mathbf{F}_2 = (-1.88\times 10^{-4} N)\,\hat{j}$

هـ- $\mathbf{F}_5 = -\mathbf{F}_1 = -(4.69\times 10^{-4} N)\,\hat{j}$

روش دوم) طبق تقارن انتظار داریم که سیم وسطی نیروی خالص صفر داشته باشد. برای سیمی که در انتهای چپ قرار دارد.

$$\frac{F}{L}=\frac{\mu_0 i^2}{2\pi}\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{2a}+\frac{1}{3a}+\frac{1}{4a}\right)$$

$$=\frac{4\pi\times10^{-7}N/A^2(3.22A)^2}{2\pi(0.083m)}\left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}\right)$$

$$\frac{F}{L}=5.21\times10^{-5}\ N/m$$

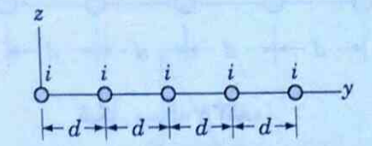
برای دومین سیم سهم های ناشی از دوسیم مجاور حذف می شوند، پس آنچه می ماند به صورت زیر است:

$$\frac{F}{L}=\frac{\mu_0 i^2}{2\pi}\left(\frac{1}{2a}+\frac{1}{3a}\right)$$

$$=\frac{4\pi\times10^{-7}N/A^2(3.22A)^2}{2\pi(0.083m)}\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{3}\right)\Rightarrow$$

$$\frac{F}{L}=2.08\times10^{-5}N/m$$

نیروی وارد بر سیم (۱) برابر است با:



شکل مسأله ۳۸ ب

برای سیم (۱)

$$F_1=\frac{\mu_0 I}{2\pi d}(\mathbf{i})+\frac{\mu_0 I}{4\pi d}\mathbf{i}+\frac{\mu_0 I}{6\pi d}\mathbf{i}$$

$$+\frac{\mu_0 I}{8\pi d}\mathbf{i}=\frac{(24+12+8+6)\mu_0 I}{48\pi d}\Rightarrow$$

$$F_1=\frac{50\mu_0 I}{48\pi d}=\frac{25}{24}\frac{\mu_0 I}{\pi d}$$

نیروی وارد بر سیم ۲ برابر است با:

$$\mathbf{F}_2=\frac{\mu_0 i^2}{2\pi d}(-\hat{\mathbf{i}})+\frac{\mu_0 i^2}{2\pi d}(\hat{\mathbf{i}})+\frac{\mu_0 i^2}{2\pi(2d)}(\hat{\mathbf{i}})$$

$$+\frac{\mu_0 i^2}{2\pi(3d)}(\hat{\mathbf{i}})=\frac{5}{12}\frac{\mu_0 i^2}{2\pi d}(\hat{\mathbf{i}})$$

نیروی وارد بر سیم ۳ برابر است با:

$$\mathbf{F}_3=\frac{\mu_0 i^2}{2\pi(2d)}(-\hat{\mathbf{i}})+\frac{\mu_0 i^2}{2\pi(d)}(-\hat{\mathbf{i}})\Rightarrow$$

$$\mathbf{F}_3+\frac{\mu_0 i^2}{2\pi d}(\hat{\mathbf{i}})+\frac{\mu_0 i^2}{2\pi(2d)}(\hat{\mathbf{i}})=0$$

نیروی وارد بر سیم ۴ برابر است با:

$$\mathbf{F}_4=\frac{\mu_0 i^2}{2\pi(3d)}(-\hat{\mathbf{i}})+\frac{\mu_0 i^2}{2\pi(2d)}(-\hat{\mathbf{i}})+\frac{\mu_0 i^2}{2\pi(d)}(-\hat{\mathbf{i}})$$

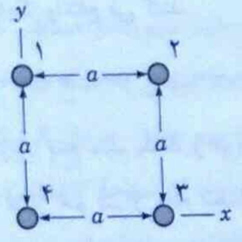
$$+\frac{\mu_0 i^2}{2\pi(d)}(\hat{\mathbf{i}})=\frac{-5}{12}\frac{\mu_0 i^2}{2\pi(d)}(\hat{\mathbf{i}})=\frac{\mu_0 i^2}{\pi d}(-\hat{\mathbf{i}})$$

نیروی وارد بر سیم ۵ برابر است با:

$$\mathbf{F}_5=\left(\frac{\mu_0 i^2}{2\pi(4d)}\right)(-\hat{\mathbf{i}})+\frac{\mu_0 i^2}{2\pi(3d)}(-\hat{\mathbf{i}})$$

$$+\frac{\mu_0 i^2}{2\pi(2d)}(-\hat{\mathbf{i}})+\frac{\mu_0 i^2}{2\pi(d)}(-\hat{\mathbf{i}})=\frac{25}{24}\frac{\mu_0 i^2}{\pi d}(-\hat{\mathbf{i}})$$

۳۹★★ در شکل زیر، چهار سیم بلند مستقیم عمود بر صفحه به صورتی که سطح مقطع آن‌ها مربعی به ضلع $a=13.5$ cm ساخته‌اند، نشان داده شده‌اند، هر سیم حامل جریان ۷٫۵۰ A است. در سیم‌های ۱ و ٤ جهت جریان رو به بیرون صفحهٔ کاغذ، و در سیم‌های ۲ و ۳ رو به درون صفحهٔ کاغذ است. با استفاده از نمادگذاری بردار یکه، نیروی مغناطیسی برایند وارد بر هر متر *از* طول سیم ٤ را به‌دست آورید.



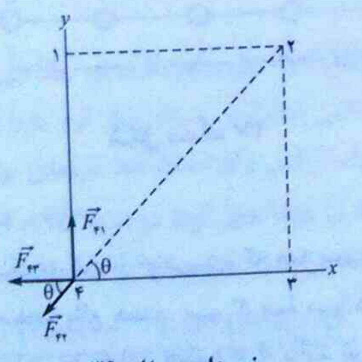
شکل مسأله ۳۹

پاسخ:

با استفاده از رابطهٔ ۲۹-۱۳ و با فرض بر هم نهی نیروها داریم:

$$\mathbf{F}_4=\mathbf{F}_{14}+\mathbf{F}_{24}+\mathbf{F}_{34}$$

در حالت زاویه $\theta=45^\circ$ نشان داده شده در شکل زیر:



نمودار مسئله ۳۹

مؤلفه های $\mathbf{F}_4$ توسط رابطهٔ زیر داده می شوند:

$$F_{4x} = -F_{43} - F_{42}\cos\theta$$

$$= -\frac{\mu_0 i^2}{2\pi a} - \frac{\mu_0 i^2 \cos 45^\circ}{2\sqrt{2}\pi a} = -\frac{3\mu_0 i^2}{4\pi a}$$

$$F_{4y} = F_{41} - F_{42}\sin\theta$$

$$= \frac{\mu_0 i^2}{2\pi a} - \frac{\mu_0 i^2 \sin 45^\circ}{2\sqrt{2}\pi a} = \frac{\mu_0 i^2}{4\pi a}$$

بنابراین داریم:

$$F_4 = \left(F_{4x}^2 + F_{4y}^2\right)^{1/2} = \left[\left(-\frac{3\mu_0 i^2}{4\pi a}\right)^2 + \left(\frac{\mu_0 i^2}{4\pi a}\right)^2\right]^{1/2}$$

$$= \frac{\sqrt{10}\,\mu_0 i^2}{4\pi a} = \frac{\sqrt{10}\,(4\pi\times10^{-7}\,T.m/A)(7.50A)^2}{4\pi\,(0.135m)}$$

$$F_4 = 1.32\times10^{-4}\,N/m$$

که $\mathbf{F}_4$ زاویهٔ ϕ در راستای $+x$ می سازد که برابر است با:

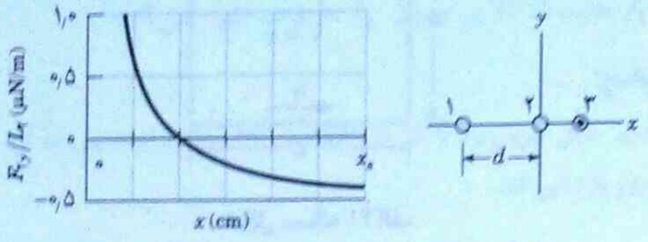
$$\phi = \tan^{-1}\left(\frac{F_{4y}}{F_{4x}}\right) = \tan^{-1}\left(-\frac{1}{3}\right) = 162^\circ$$

در حالت نمایش بردار یکه خواهیم داشت:

$$\mathbf{F}_1 = (1.32\times10^{-4}\,N/m)\left[\cos162^\circ\,\hat{i} + \sin162^\circ\,\hat{j}\right]$$

$$= (-1.25\times10^{-4}\,N/m)\,\hat{i} + (4.17\times10^{-5}\,N/m)\,\hat{j}$$

۴۰★★ شکل زیر الف سطح مقطع‌های سه سیم بلند و مستقیم و موازی حامل جریان را نشان می‌دهد. سیم‌های ۱ و ۲ به فاصلهٔ d از هم روی محور x ثابت نگه داشته شده‌اند. سیم ۱ دارای جریان $0.750\,A$ است اما جهت جریان در آن معلوم نیست. سیم ۳ را که حامل جریان $0.250\,A$ در جهت رو به بیرون صفحهٔ کاغذ است، می‌توان در امتداد محور x به طرف راست سیم ۲ حرکت داد. در حالی که سیم ۳ حرکت می‌کند، اندازهٔ نیروی مغناطیسی برایند $\mathbf{F}_2$ که از جریان‌های گذرنده از سیم‌های ۱ و ۳ بر سیم ۲ وارد می‌آید تغییر می‌کند. مؤلفهٔ y این نیرو F_{2y} است، و اندازهٔ آن به‌ازای هر واحد طول سیم۲ برابر F_{2y}/L_2 می‌شود. در شکل زیر ب، نمودار F_{2y}/L_2 برحسب مکان x سیم ۳ نشان داده شده است در حد $x\to\infty$، این نمودار دارای مجانب $F_{2y}/L_2 = -0.627\,\mu N/m$ است. مقیاس افقی با $x_s = 12.0\,cm$ داده می‌شود. (الف) اندازه و (ب) جهت (رو به درون یا بیرون صفحهٔ کاغذ) جریان گذرنده از سیم ۲ را به‌دست آورید.



(ب) (الف)

شکل مسئله ۴۰

پاسخ:

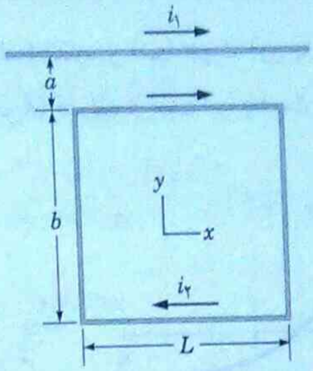
الف- این که منحنی نشان داده شده در شکل (ب) از صفر می گذرد بیانگر اینست که جریانهای موجود در سیمهای ۱ و ۳ نیروهایی در خلاف جهت سیم ۲ وارد می کنند. جریان i_1 به سمت خارج صفحه است. وقتی که سیم ۳ از سیم ۲ فاصلهٔ بیشتری می گیرد، تنها میدانی که بر سیم ۲ تأثیر می گذارد میدانی است که توسط جریان موجود در سیم ۱ ایجاد می شود. در این حالت نیرو مطابق شکل (۲۹-۶۵ ب) منفی است. این بدین معناست که سیم ۲ به سمت سیم ۱ کشیده می شود. که (طبق بحث در قسمت ۲-۲۹) بیانگر اینست که جریان سیم ۲ در همان راستای جریان سیم ۱، و به سمت خارج صفحه، واقع است. با در نظر گرفتن سیم ۳، بی نهایت دورتر، نیروی وارد بر واحد طول دارای مقدار $6.27\times10^{-7}\,N/m$ خواهد بود. این مقدار را با $F_{11} = \frac{\mu_0 i_1 i_2}{2\pi d}$ برابر قرار می دهیم. وقتی که سیم ۳ در موقعیت $x = 0.04m$ واقع است آنگاه منحنی از نقطهٔ صفر که قبلاً ذکر شد می گذرد. در نتیجه نیروی بین ۲ و ۳ بایستی برابر F_{12} در آنجا باشد. به این ترتیب می توان فاصلهٔ بین سیمهای ۱ و ۲ را بصورت زیر بدست آورد:

$$d = \frac{(0.04m)\,(0.750A)}{(0.250A)} = 0.12m \quad \Rightarrow$$

$$6.27\times10^{-7}\,N/m = \frac{\mu_0 i_1 i_2}{2\pi d}\ ,\quad i_2 = 0.50A$$

ب- جهت i_2 به سمت خارج صفحه می باشد.

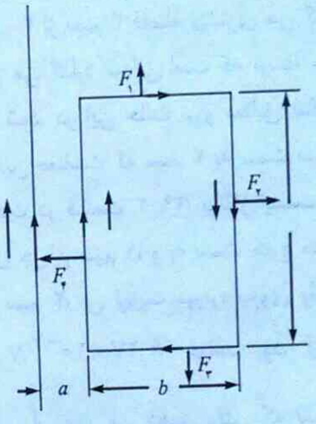
✓۴۱★★★ در شکل زیر، یک سیم بلند مستقیم حامل جریان $i_1 = 30.0\,A$ است و حلقه‌ای مستطیلی شکل هم حامل جریان $i_2 = 20.0\,A$. فرض کنید $a = 1.00\,cm$، $b = 8.00\,cm$، و $L = 30.0\,cm$. با استفاده از نمادگذاری بردار یکه، نیروی برایند وارد بر حلقهٔ مستطیلی را بر اثر جریان i_1 به‌دست آورید.



شکل مسأله ۴۱ الف

پاسخ:

روش اول) سیم حامل جریان $i_{۱}$ با دو سیم دیگر $(AD\ ,\ BC)$ مطابق شکل زیر موازی است، و بر آنها نیرو وارد می کند. دو سیم AB و DC نیز با هم موازی می باشند و به هم نیرو وارد می کنند. میدان مغناطیسی که سیم در حلقهٔ مستطیلی ایجاد می کند عمود بر صفحهٔ کاغذ و به داخل آن است جهت نیرو در شکل ب نشان داده شده‌است.



شکل مسئلهٔ ۴۱ ب

$F_{۱}$ نیروی وارد بر سیم AB از طرف سیم حامل جریان $i_{۱}$ برابر است با:

$$F_{۱}=\frac{\mu_{۰} i_{۱} i_{۲} L}{۲\pi a}$$

$F_{۲}$ نیروی وارد بر سیم BC از طرف سیم حامل جریان $i_{۱}$ برابر است با:

$$F_{۲}=\frac{\mu_{۰} i_{۱} i_{۲} L}{۲\pi (a+b)}$$

$F_{۳}$ نیروی وارد بر سیم AB از طرف سیم DC برابر است با:

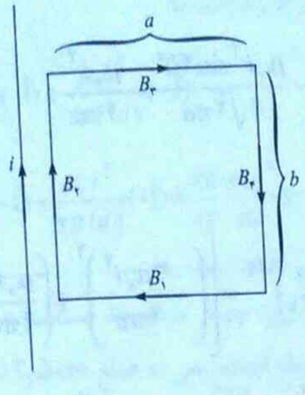
$$F_{۳}=\frac{\mu_{۰} i_{۲}^{۲} b}{۲\pi L}$$

$F_{۴}$ نیروی وارد بر سیم DC از طرف سیم AB برابر است با:

$$F_{۴}=\frac{\mu_{۰} i_{۲} i_{۲} b}{۲\pi L}=\frac{\mu_{۰} i_{۲}^{۲} b}{۴\pi L}$$

نیروهای $F_{۳}$ و $F_{۴}$ با هم برابر هستند لذا برآیند نیروها صفر می‌شود. برای دو نیروی دیگر، یعنی نیروی وارد بر حلقه داریم:

$$\mathbf{F}_{tot}=\mathbf{F}_{۱}+\mathbf{F}_{۲} \Rightarrow F=F_{۱}-F_{۲}=\frac{\mu_{۰} i_{۱} i_{۲} L}{۲\pi}\left[\frac{۱}{a}-\frac{۱}{a+b}\right]$$



شکل مسئلهٔ ۴۱ ج

روش دوم) اندازهٔ نیروهای وارد بر اضلاع مثلث که به موازات راستای طول سیم واقع اند (با $i_{۱}=۳۰A$) با استفاده از رابطهٔ ۲۹-۱۳ محاسبه می گردد. جهت نیرو بر هر ضلع عمود بر آن خواهد بود (در راستای محور y و با قرار دادن مبدأ در قسمت بالایی سیم و در نظر داشتن $+y$ به سمت پایین) و طبق انتگرال زیر بدست خواهد آمد:

$$F_{\perp sides}=\int_{a}^{a+b}\frac{i_{۲}\mu_{۰} i_{۱}}{۲\pi y}dy$$

خوشبختانه این نیروها بر اضلاع عمود بر هم به طول b است همدیگر را خنثی می کنند. برای اضلاع موازی باقیمانده به طول L داریم:

$$F=\frac{\mu_{۰} i_{۱} i_{۲} L}{۲\pi}\left(\frac{۱}{a}-\frac{۱}{a+d}\right)=\frac{\mu_{۰} i_{۱} i_{۲} b}{۲\pi a(a+b)}$$

$$=\frac{(۴\pi\times۱۰^{-۷}\ T.m/A)(۳۰{,}۰\ A)(۲۰{,}۰\ A)}{۲\pi(۱{,}۰۰\ cm+۸{,}۰۰\ cm)}$$

$$\times\frac{(۸{,}۰۰\ cm)(۳۰۰\times۱۰^{-۲}\ m)}{۲\pi(۱{,}۰۰\ cm+۸{,}۰۰\ cm)}\Rightarrow$$

$$F=۳{,}۲۰\times۱۰^{-۳}\ N$$

که $\mathbf{F}$ به سمت سیم، یا همان $+\hat{j}$ واقع است. که بصورت نمایش برداری یکه داریم:

$$\mathbf{F}=(۳{,}۲۰\times۱۰^{-۳}N)\ \hat{j}$$

روش سوم) میدان مغناطیسی سیم برصفحه حلقه مستطیل شکل عمود است. و برابر است با:

$$B=\frac{\mu_{۰} i}{۲\pi r}$$

در راستای افقی، برآیند نیروها صفر است .

دو نیروی وارد بر طول های مستطیل با هم مساوی نمی باشند و باید محاسبه شوند که داریم:

$$F_{tot} = F_1 + F_2 + F_3 + F_4 = F_1 + F_2 - F_1 - F_4 \Rightarrow$$

$$F_{tot} = F_2 - F_4 \quad , \quad F = LiB\sin\theta$$

توضیح: با استفاده از رابطه $\mathbf{F} = L\mathbf{i}\times\mathbf{B}$ نیروی وارد بر شاخه مستطیل به دست می آید.

نکتهٔ ۱) برای یافتن نیروی وارد بر یک سیم حامل جریان که از سیم دیگر حامل جریان حاصل می شود، ابتدا میدان مغناطیسی حاصل از سیم دوم را در محل سیم اول به دست می آوریم سپس نیروی وارد توسط این میدان را بر سیم اول پیدا می کنیم.

نکتهٔ ۲) جریان های موازی یکدیگر را جذب می کنند و جریانهای پادموازی یکدیگر را دفع می کنند

سیم دراز دارای جریان i می باشد که به کمک قاعده دست راست، شصت در جهت جریان، خمیده شدن چهار انگشتان جهت $\mathbf{B}$ را نشان می دهد که در شکل نشان داده شده است. میدان $\mathbf{B}$ عمود بر صفحه است.

$$F_{tot} = F_4 - F_2 \quad , \quad B = \frac{\mu_0 i}{2\pi r} \qquad (I$$

$$F_4 = i_2 L B_4 \sin 90^\circ = \frac{\mu_0 i_1 i_2}{2\pi a} L \qquad (II$$

$$F_2 = i_2 L B_2 \sin 90^\circ = \frac{\mu_0 i_2 i_1}{2\pi(a+b)} L \qquad (III$$

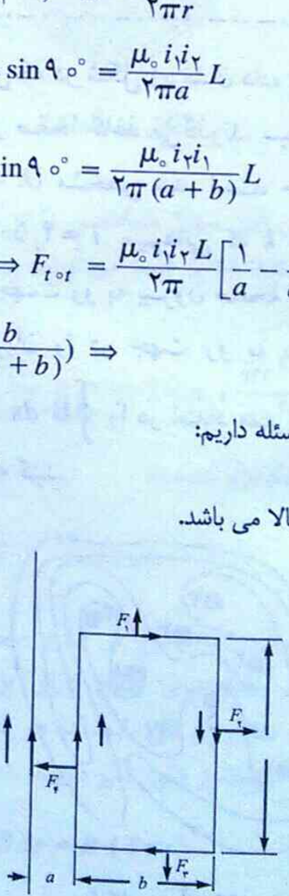
$$(I, II, III) \Rightarrow F_{tot} = \frac{\mu_0 i_1 i_2 L}{2\pi}\left[\frac{1}{a} - \frac{1}{a+b}\right] \Rightarrow$$

$$\frac{\mu_0 i_1 i_2 L}{2\pi}\left(\frac{b}{a(a+b)}\right) \Rightarrow$$

با جایگزینی فرضیات مسئله داریم:

$$F = 3/2 mN$$

نیروی برآیند به سمت بالا می باشد.

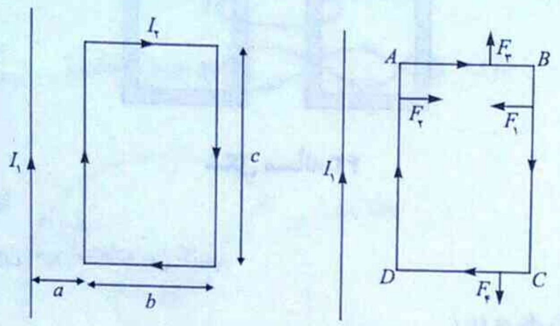


شکل تمرین ۲۴ ب

مثال ۴) سیم سمت راست بلند حامل جریان I_1 و حلقهٔ مستطیلی با جریان I_2 مطابق شکل زیر را در یک صفحه در نظر بگیرید. برآیند نیروی وارد بر حلقه را بیابید؟ جریان I_1 به سمت بالا و جریان I_2 به طرف پایین می‌باشد.

پاسخ:

سیم حامل جریان I_1 با دو سیم AD و BC موازی است پس به آنها نیرو وارد می کند.



شکل مثال ۴ الف- ب

دو سیم AB و DC نیز به هم نیرو وارد می کنند. F_1 نیروی دافعهٔ وارد به سیم AB از طرف سیم حامل جریان I_1 برابر است با:

$$F_1 = \frac{\mu_0 I_1 I_2 c}{2\pi a}$$

F_2 نیروی جاذبهٔ وارد بر سیم BC از طرف سیم حامل جریان I_1 برابر است با:

$$F_2 = \frac{\mu_0 I_1 I_2 c}{2\pi(a+b)}$$

F_3 نیروی دافعهٔ وارد بر سیم AB از طرف سیم DC برابر است با:

$$F_3 = \frac{\mu_0 I_2^2 b}{2\pi c}$$

F_4 نیروی دافعهٔ وارد بر سیم DC از طرف سیم AB برابر است با:

$$F_4 = \frac{\mu_0 I_1 I_2 l}{2\pi d} = \frac{\mu_0 I_2^2 b}{2\pi c}$$

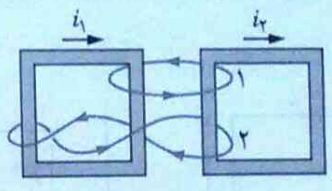
دو نیروی F_3 و F_4 با هم برابر و در خلاف جهت یکدیگر هستند، پس برآیند نیروها صفر می شود. برای دو نیروی دیگر یعنی F نیروهای افقی وارد بر حلقه داریم:

$$\mathbf{F} = \mathbf{F}_1 + \mathbf{F}_2 \Rightarrow F = F_1 - F_2 \Rightarrow$$

$$F = \frac{\mu_0 I_1 I_2 c}{2\pi}\left[\frac{1}{a} - \frac{1}{(a+b)}\right]$$

بخش ۲۹-۴ قانون آمپر

★۴۲ شکل زیر دو مسیر بسته را که دور دو حلقهٔ رسانای حامل جریان کشیده شده‌اند نشان می‌دهد. جریان‌های گذرنده از این رساناها $i_1 = ۵/۰\,A$ و $i_2 = ۳/۰\,A$ هستند. اندازهٔ انتگرال $\oint \mathbf{B}\cdot d\mathbf{s}$ را برای (الف) مسیر ۱ و (ب) مسیر ۲ به دست آورید.



شکل مسأله ۴۲

پاسخ:

از قانون آمپر استفاده می کنیم:

$$\oint \mathbf{B}\cdot d\mathbf{s} = \mu_\circ i$$

که در آن انتگرال حول یک حلقه بسته است و i شدت جریان برآیند عبوری از حلقه است.

الف- برای مسیر ۱ نتیجه به این صورت است:

$$\oint_1 \mathbf{B}\cdot d\mathbf{s} = \mu_\circ (-۵/۰\,A + ۳/۰\,A)$$

$$= (۴\pi\times ۱۰^{-۷}\,T.m/A)(-۲/۰\,A)$$

$$= -۲/۵\times ۱۰^{-۶}\,T.m$$

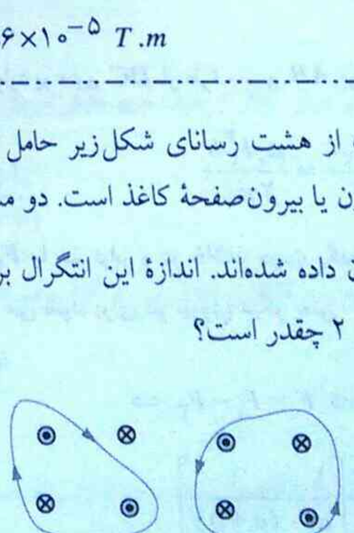
ب- برای مسیر ۲ بدست خواهیم آورد:

$$\oint_2 \mathbf{B}\cdot d\mathbf{s} = \mu_\circ (-۵/۰\,A - ۵/۰\,A + ۳/۰\,A)$$

$$= (۴\pi\times ۱۰^{-۷}\,T.m/A)(-۱۳/۰\,A)$$

$$= -۱/۶\times ۱۰^{-۵}\,T.m$$

★۴۳ هر یک از هشت رسانای شکل زیر حامل جریان $۲/۰\,A$ در جهت رو به درون یا بیرون صفحهٔ کاغذ است. دو مسیر برای انتگرال $\oint \mathbf{B}\cdot d\mathbf{s}$ نشان داده شده‌اند. اندازهٔ این انتگرال برای (الف) مسیر ۱ و (ب) مسیر ۲ چقدر است؟



شکل مسأله ۴۳

پاسخ:

الف- جهت دو تا از جریانها به سمت خارج صفحه و یکی به سمت داخل صفحه است. در نتیجه جریان برآیند احاطه شده توسط حلقه برابر $2A$ و به سمت بیرون صفحه می باشد. چونکه مسیر در راستای ساعتگرد پیموده شده است در نتیجه طبق قانون دست راست هر جریان به سمت داخل صفحه مثبت و هر جریان به سمت بیرون صفحه منفی خواهد بود. در نتیجه برای مسیر نقطه چنین داریم:

$$\oint \mathbf{B}\,.\,d\mathbf{s} = \mu_\circ \sum_{j=1}^{3} i_j = -\mu i - \mu_\circ i + \mu_\circ I \;\Rightarrow$$

$$\oint \mathbf{B}\cdot d\mathbf{s} = -\mu_\circ i = -(۴\pi\times ۱۰^{-۷}\,T.m/A)(۲/۰\,A)$$

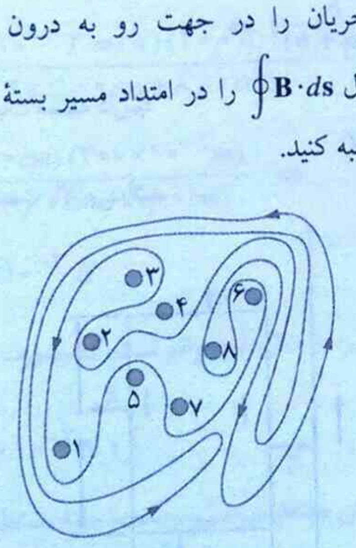
$$= -۲/۵\times ۱۰^{-۶}\,T.m$$

ب- جریان برآیند احاطه شده توسط مسیر صفر است (دو جریان به سمت خارج و دو تا به سمت داخل صفحه اند). در نتیجه جریان برای مسیر خط چین برابر است با:

$$\oint \mathbf{B}\,.\,d\mathbf{s} = \mu_\circ \sum_{j=1}^{4} i_j = \mu_\circ i + \mu_\circ i - \mu_\circ i - \mu_\circ i \;\Rightarrow$$

$$\oint \mathbf{B}\cdot d\mathbf{s} = \mu_\circ i_{enc} = ۰$$

★۴۴ در نقاطی که در شکل زیرنشان داده شده‌اند، هشت سیم به طور عمودی از صفحهٔ کاغذ می‌گذرند. سیمی که با عدد صحیح k $(k = 1,2,\ldots,8)$ مشخص شده است، حامل جریان ki است که در آن $i = ۴/۵۰\,mA$. سیم‌هایی که k در آن‌ها فرد است، جریان را در جهت رو به بیرون صفحهٔ می‌برند و آن‌ها که k زوج دارند، جریان را در جهت رو به درون صفحه هدایت می‌کنند. انتگرال $\oint \mathbf{B}\cdot d\mathbf{s}$ را در امتداد مسیر بستهٔ نشان داده شده در شکل محاسبه کنید.



شکل مسأله ۴۴

پاسخ:

با یک نگاه به مسیر می توان دریافت که فقط جریانهای ۱ و ۳ و ۶ و

۷ احاطه شده اند. در نتیجه از جهت های جریان مختلف توضیح داده شده در مسئله خواهیم داشت:

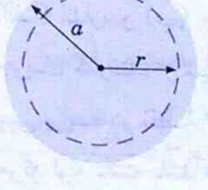
$$\oint \mathbf{B}\cdot d\mathbf{s} = \mu_۰ (۷i - ۶i + ۳i + i) = ۵\mu_۰ i$$

$$= ۵(۴\pi\times۱۰^{-۷} T.m/A)(۴٫۵\times۱۰^{-۳}A)$$

$$= ۲٫۸۳\times۱۰^{-۸}\ T.m$$

سیم های ۸ و ۴ و ۵ و ۲ درون سطح بسته قرار ندارد.

★۴۵ شکل زیر سطح مقطع دایره‌ای رسانای استوانه‌ای بلندی را نشان می‌دهد که شعاع آن برابر $a = ۲٫۰۰$ cm و حامل جریان ۱۷۰ A با توزیع یکنواخت در سطح مقطع است. اندازهٔ میدان مغناطیسی ناشی از جریان را در فواصل شعاعی (الف) صفر، (ب) ۱٫۰۰cm، (ج) ۲٫۰۰cm (سطح سیم)، و (د) ۴٫۰۰cm به‌دست آورید.



شکل مسأله ۴۵

پاسخ:

با استفاده از قانون آمپر میدان مغناطیسی را در داخل سیم $(r<a)$ و برای خارج سیم $(r>a)$ به دست می آوریم. برای میدان در داخل سیم استوانه ای داریم:

$$\oint \mathbf{B}.d\mathbf{s} = \mu_۰ i_{محصور} \Rightarrow B(۲\pi r) = \mu_۰ i \frac{\pi r^۲}{\pi a^۲} \Rightarrow$$

میدان در داخل سیم برابر است با:

$$B_{داخل} = \mu_۰ i \frac{r}{۲\pi a^۲} \qquad (I$$

برای محاسبهٔ میدان مغناطیسی در خارج سیم استوانه رسانای دراز $(r>a)$ در هر نقطه روی سطح دارای بزرگی یکسان B است. جهت $d\mathbf{s}$ مطابق شکل زیر می باشد. در هر نقطه از مسیر، $\mathbf{B}$ بر $d\mathbf{s}$ مماس است لذا با استفاده از قانون آمپر داریم:

$$\oint \mathbf{B}.d\mathbf{s} = \oint B\cos\theta\, ds = B(۲\pi r)$$

چون داریم: $\oint ds = ۲\pi r$

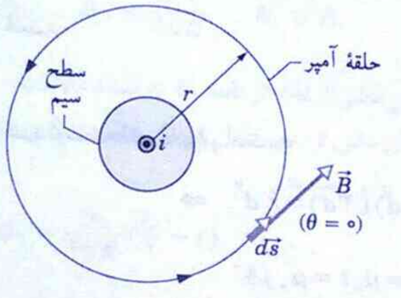
طبق قاعدهٔ دست راست:

انگشتان دست راست خود را دور حلقهٔ آمپری خم کنید. به طوری که جهت انتگرالگیری مشخص شود جهت شست باز شده جهت عبور جریان با علامت مثبت را نشان می دهد. بدیهی است به جریانی که در خلاف جهت باشد، علامت منفی نسبت داده می شود.

علامت مثبت برای جریان (شکل ب) حاصل می شود، با استفاده از معادلهٔ بالا داریم:

$$B(۲\pi r) = \mu_۰ i \Rightarrow$$

$$B_{خارج} = \frac{\mu_۰ i}{۲\pi r} \quad (\text{خارج سیم مستقیم}) \qquad (II$$



شکل مسئلهٔ ۴۵ ب

با استفاده از معادلهٔ I و II به مسئله به صورت زیر پاسخ می دهیم:

برای میدان B درون سیم $(r<a)$ از روابط

$$B = \frac{\mu_۰ i\, r}{۲\pi a^۲} \qquad ۲۹\text{-}۲۰$$

و رابطهٔ

$$B = \frac{\mu_۰ i}{۲\pi r} \qquad ۲۹\text{-}۱۷$$

برای خارج سیم $(r>a)$ استفاده می کنیم.

الف- در $r = ۰$ ، $B = ۰$ می باشد.

ب- در $r = ۰٫۰۱m$ داریم:

$$B = \frac{\mu_۰ i\, r}{۲\pi a^۲} = \frac{(۴\pi\times۱۰^{-۷} T.m/A)(۱۷۰A)(۰٫۰۱۰۰m)}{۲\pi(۰٫۰۲۰۰m)^۲}$$

$$= ۸٫۵۰\times۱۰^{-۴} T$$

ج- در $r = a = ۰٫۰۲m$:

$$B = \frac{\mu_۰ i r}{۲\pi a^۲} = \frac{(۴\pi\times۱۰^{-۷} T.m/A)(۱۷۰A)(۰٫۰۲۰۰m)}{۲\pi(۰٫۰۲۰۰m)^۲}$$

$$= ۱٫۷۰\times۱۰^{-۳} T$$

د- در $r = ۰٫۰۴m$:

$$B=\frac{\mu_\circ i}{2\pi r}=\frac{(4\pi\times10^{-7}\,T.m/A)(170\,A)}{2\pi(0.0400\,m)}$$

$$=8.50\times10^{-4}\,T$$

۴۶★ در مکانی خاص، چگالی جریان یکنواخت $15\,\mathrm{A/m^2}$ در جهت مثبت z برقرار شده است. اندازهٔ انتگرال $\oint \mathbf{B}\cdot d\mathbf{s}$ را در امتداد مسیری حساب کنید که از سه پاره‌خط راست با مختصات ابتدایی و انتهایی زیر دستگاه (x,y,z) تشکیل شده است: از $(4d,0,0)$ به $(4d,3d,0)$ به $(0,0,0)$ به $(4d,0,0)$. در این‌جا $d=20\,\mathrm{cm}$ است.

پاسخ:
مساحت احاطه شده توسط حلقه L برابر است با:

$$A=\frac{1}{2}(4d)(3d)=6\,d^2 \quad\Rightarrow$$

$$\oint_c \mathbf{B}\cdot d\mathbf{s}=\mu_\circ i=\mu_\circ jA$$

$$=(4\pi\times10^{-7}\,T.m/A)(15\,A/m^2)(6)(0.20\,m)^2$$

$$=4.5\times10^{-6}\,T.m$$

۴۷★★ چگالی جریان $\mathbf{J}$ را درون سیم استوانه‌ای توپُر و درازی به شعاع $a=3.1\,\mathrm{mm}$ در جهت محور مرکزی سیم در نظر بگیرید. اندازهٔ این چگالی جریان به‌طور خطی با فاصلهٔ شعاعی r از محور مرکزی به‌صورت $J=\frac{J_\circ r}{A}$ تغییر می‌کند که در آن $J_\circ=310\,\mathrm{A/m^2}$ است. اندازهٔ میدان مغناطیسی را در فواصل (الف) $r=0$، (ب) $r=a/2$، و (ج) $r=a$ به‌دست آورید.

پاسخ:
برای $r\le a$ داریم:

$$B(r)=\frac{\mu_\circ i_{enc}}{2\pi r}=\frac{\mu_\circ}{2\pi r}\int_\circ^r J(r)\,2\pi r\,dr$$

$$=\frac{\mu_\circ}{2\pi}\int_\circ^r J_\circ\left(\frac{r}{a}\right)2\pi\,r\,dr=\frac{\mu_\circ J_\circ r^2}{3a}$$

الف- در $r=0$ ، $B=0$ می باشد.

ب- در $r=\frac{a}{2}$ داریم:

$$B(r)=\frac{\mu_\circ J_\circ r^2}{3a}$$

$$=\frac{(4\pi\times10^{-7}\,T.m/A)(310\,A/m^2)(3.1\times10^{-3}\,m/2)^2}{3(3.1\times10^{-3}\,m)}$$

$$=1.0\times10^{-7}\,T$$

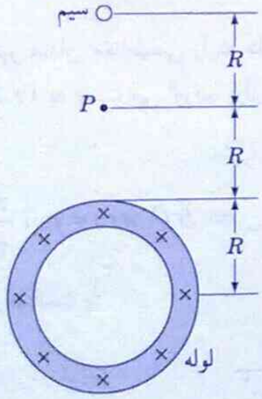
ج- در $r=a$ داریم:

$$r=a \quad,\quad B(r=a)=\frac{\mu_\circ J_\circ a}{3}\Rightarrow$$

$$B=\frac{(4\pi\times10^{-7}\,T.m/A)(310\,A/m^2)(3.1\times10^{-3}\,m)}{3}$$

$$=4.0\times10^{-7}\,T$$

۴۸★★ در شکل زیر، لولهٔ استوانه‌ای درازی با سطح مقطع دایره‌ای به شعاع بیرونی $R=2.6\,\mathrm{cm}$ را نشان داده‌ایم که حامل جریان $i=8.00\,\mathrm{mA}$ با توزیع یکنواخت در سطح مقطع و در جهت رو به درون صفحه است. سیمی هم در این شکل نشان داده شده است که با این لوله موازی است و فاصلهٔ مرکزش تا مرکز لوله برابر $3.00R$ است. (الف) اندازه و (ب) جهت (رو به درون یا بیرون صفحهٔ کاغذ) جریان گذرنده از سیم را چنان بیابید که مجموع میدان مغناطیسی برایند در نقطهٔ P همان اندازهٔ میدان مغناطیسی برایند را در مرکز لوله داشته باشد اما جهت‌های این دو میدان مخالف هم باشند.



شکل مسأله ۴۸

پاسخ:
الف- **روش اول)** میدان مغناطیسی از یک لولهٔ دایره ای در نقطهٔ p را با حلقه آمپری به مرکز لوله و شعاع $2R$ برابر است با:

$$\oint \mathbf{B}.d\mathbf{s}=\mu_\circ i_{\text{محصور}} \Rightarrow \quad B_{1p}(4\pi R)=\mu_\circ i \Rightarrow$$

$$B_{1p}=\frac{\mu_\circ i}{4\pi R}$$

میدان مغناطیسی حاصل از سیم در نقطهٔ p برابر است با:

$$B_{2p}=\frac{\mu_0 i}{2\pi R}$$

جهت آن در خلاف جهت $\mathbf{B}_{1p}$ است.

با استفاده از اصل برهم نهی، میدان مغناطیسی در مرکز لوله با مجموع میدان مغناطیسی لوله و سیم برابر است. چون $i=0$ است (طبق قانون آمپر)، میدان مغناطیسی حاصل از لوله در مرکزش صفر می باشد. میدان مغناطیسی در مرکز لوله (نقطهٔ c) تنها ناشی از سیم می باشد که برابر است با:

$$B_C=\frac{\mu_0 i_{wire}}{2\pi(3R)}=\frac{\mu_0 i_{wire}}{6\pi R}$$

برای سیم داریم:

$$B_{p,\,wire}>B_{C,\,wire}$$

در نتیجه برای سیم $B_p=B_C=B_C$، سیم i بایستی در راستای داخل صفحه باشد.

$$B_P=B_{P,\,wire}-B_{P,\,pipe}=\frac{\mu_0 i_{wire}}{2\pi R}-\frac{\mu_0 i}{2\pi(2R)}$$

با قرار دادن $B_C=B_p$ بدست می آوریم:

$$i_{wire}=\frac{3i}{8}=\frac{3(8.00\times10^{-3}A)}{8}=3.00\times10^{-3}A$$

ب- جهت به سمت داخل صفحه است.

روش دوم) بزرگی میدان مغناطیسی ناشی از استوانه در مرکز استوانه صفر است و در نقطه p برابر با $\frac{\mu_0 i_0}{2\pi(2R)}$ خواهد بود.

بزرگی میدان مغناطیسی ناشی از سیم در مرکز استوانه $\frac{\mu_0 i}{2\pi(3R)}$ و در P برابر با $\frac{\mu_0 i}{2\pi R}$ می باشد.

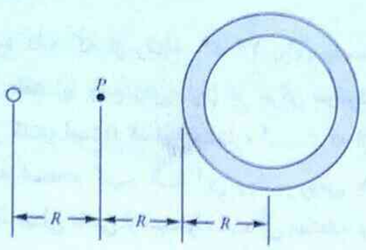
برای اینکه میدان خالص در دو موقعیت جهت متفاوت داشته باشد، جریان های سیم و لوله باید خلاف جهت هم باشند. میدان خالص در مرکز لوله $\frac{\mu_0 i}{2\pi(3R)}$ است.

حال آنکه در p برابر با $\frac{\mu_0 i_0}{2\pi(2R)}\frac{-\mu_0 i_0}{2\pi R}$ می باشد. این دو را مساوی هم قرار دهید و بر حسب i حل کنید:

$$\frac{i}{3}=\frac{i}{2}-i\Rightarrow i=3\frac{i_0}{8}\Rightarrow$$

به بیان دیگر داریم :

میدان مغناطیسی ناشی از لوله استوانه ای در مرکز خودش صفر و در نقطه P، به سمت بالاست. جریان در سیم عمود بر صفحه و به سمت داخل باشد. چون میدان در مرکز لوله می بایستی در خلاف جهت میدان بر آیند در نقطه P باشد، در نقطه P میدان مغناطیسی ایجاد شده برابر است با:



شکل مسأله ۴۸

$$B_1=\frac{\mu_0 i_0}{2\pi(2R)}\ ,\quad B_2=\frac{\mu_0 i}{2\pi R}\ ,\quad B_1>B_2$$

B_1 = میدان ناشی از لوله در نقطه P به سمت بالاست.

B_2 = میدان ناشی از سیم حامل جریان به سمت پائین است.

میدان برآیند برابر است با:

$$B=B_1-B_2=\frac{\mu_0}{2\pi R}\left(\frac{i_0}{2}-i\right)$$

در مرکز لوله فقط میدان ناشی از سیم به سمت پائین است بطوریکه داریم: (i به داخل صفحه است)

$$B_0=\frac{\mu_0 i}{2\pi(3R)}$$

$$B_1=B_0\Rightarrow\frac{\mu_0 i}{2\pi R}\left(\frac{i_0}{2}-i\right)=\frac{\mu_0 i}{6\pi R}\Rightarrow i=\frac{3}{8}i_0$$

- - - - - - - - - - - - - - - -

۲۹-۵ سیم‌لوله‌ها و چنبره‌ها

میدان ناشی از سیملوله روی محورش از رابطهٔ زیر به دست می آید:

$$B=\mu_0 n I \qquad (۲۹\text{-}۲۳)$$

در معادلهٔ بالا، n تعداد حلقه ها در واحد طول است، یعنی:

$$n=\frac{N\ (\text{تعداد حلقه ها})}{l\ (\text{طول سیملوله})}$$

در نقطهٔ داخل چنبره، بزرگی B میدان مغناطیسی عبارت است از:

$$B=\frac{\mu_0 i N}{2\pi}\frac{1}{r} \qquad (۲۵\text{-}۲۴)$$

که در آن r فاصله از مرکز چنبره تا آن نقطه است، (شعاع متوسط) و N تعداد حلقه ها می باشد.

- - - - - - - - - - - - - - - -

★۴۹ سیم لوله‌ای با ۲۰۰ دور سیم پیچی به طول ۲۵ cm و قطر

۱۰cm را در نظر بگیرید که حامل جریان ۰٫۲۹ A است. اندازهٔ میدان مغناطیسی **B** را درون این سیم لوله محاسبه کنید.

پاسخ:

این امکان وجود دارد که از رابطهٔ ۲۹-۲۶ برای بدست آوردن سهم میدانهای ۲۰۰ حلقه (با جمع زدن آنها) در مرکز سولنوئید استفاده کرد (که کاری کسل کننده است!) که این مستلزم اینست که از تمام اطلاعات موجود در مسئله استفاده کنیم. البته این روش، روش خوبی نیست. به جای آن از رابطهٔ میدان ناشی از سیملوله ایده آل استفاده می کنیم (که در آن احتیاجی به داشتن قطر سیم پیچ نیست):

$$B=\mu_0 in=\mu_0 i\left(\frac{N}{l}\right)$$

که در آن $i=0.30A$ و $l=0.25m$ و $N=200$ است که نتیجه می دهد:

$$B=3\times10^{-4}T$$

★**۵۰** سیم لوله‌ای به‌طول ۱٫۳۰m و قطر ۲٫۶۰cm حامل جریان ۱۸٫۰A است. میدان مغناطیسی درون این سیم لوله برابر ۲۳٫۰mT است. طول سیمی را که سازندهٔ این سیم‌لوله است، پیدا کنید.

پاسخ:

تعداد دورهای سولنوئید، N، از رابطهٔ:

$$B=\mu_0 in=\frac{\mu_0 iN}{l};\quad N=\frac{Bl}{\mu_0 i}$$

بدست می آید. در نتیجه طول کل سیم بکاررفته در سولنوئید برابر است با:

$$2\pi rN=\frac{2\pi rBl}{\mu_0 i}$$

$$=\frac{2\pi(2.60\times10^{-2}m)(23.0\times10^{-3}T)(1.30m)}{2(4\pi\times10^{-7}T.m/A)(18.0A)}$$

$$=108m$$

★**۵۱** چنبره‌ای با سطح مقطع مربع به ضلع ۵٫۰۰cm را در نظر بگیرید که شعاع درونی آن ۱۵٫۰cm، دارای ۵۰۰ دور سیم‌پیچی، و حامل جریان ۰٫۸۰۰A است. (این چنبره، برخلاف شکل زیر که سطح مقطع دایره‌ای دارد، از سیم‌لوله‌ای با سطح مقطع مربعی ساخته شده و سپس به‌صورت دایره‌ای بسته خم شده است.) میدان مغناطیسی درون این چنبره را در نقطه‌ای به فاصلهٔ (الف) شعاع درونی آن از مرکز و (ب) شعاع بیرونی‌اش از مرکز بیابید.

شکل مسأله ۵۱

پاسخ:

الف- از رابطهٔ ۲۹-۲۴ استفاده می کنیم. شعاع داخلی برابر است با $r=15cm$ در نتیجه میدان در آنجا برابر خواهد بود با:

$$B=\frac{\mu_0 iN}{2\pi r}$$

$$=\frac{(4\pi\times10^{-7}T.m/A)(0.800A)(500)}{2\pi(0.150m)}$$

$$=5.33\times10^{-4}T$$

ب- شعاع خارجی برابر است با $r=20cm$ و میدان در آنجا برابر است با:

$$B=\frac{\mu_0 iN}{2\pi r}$$

$$=\frac{(4\pi\times10^{-7}T.m/A)(0.800A)(500)}{2\pi(0.200m)}$$

$$=4.00\times10^{-4}T$$

★**۵۲** سیم‌لوله‌ای به‌طول ۹۵٫۰cm، شعاع ۲٫۰۰cm، و با ۱۲۰۰ دور سیم‌پیچی را در نظر بگیرید که حامل جریان ۳٫۶۰A است. اندازهٔ میدان مغناطیسی تولید شده را در درون این سیم لوله پیدا کنید.

پاسخ:

یک روش ممکن است استفاده از رابطهٔ ۲۹-۲۶ و بدست آوردن سهم تمام ۱۲۰۰ حلقه در ایجاد میدان در مرکز سولنوئید است (که البته کار کسل کننده ای است!) بجای آن از رابطهٔ ۲۹-۲۳ مربوط به یک سولنوئید ایده آل (که نیازی به استفاده از شعاع سیم پیچ نیست) استفاده می کنیم:

$$B=\mu_0 in=\mu_0 i\left(\frac{N}{l}\right)$$

که در آن $i=3.60A$ و $l=0.950m$ و $N=1200$ که این به میدانی به میزان $B=0.00571T$ می انجامد.

★★۵۳ یک سیم لولهٔ دراز با چگالیِ سیم پیچیِ طولیِ ۱۰٫۰ دور بر سانتی‌متر و شعاع ۷٫۰۰cm را در نظر بگیرد که حامل جریان ۲۰٫۰mA است. در رسانایی که در امتداد محور مرکزی سیم‌لوله قرار دارد، جریان ۶٫۰۰A برقرار شده است. (الف) در چه فاصلهٔ شعاعی از محور سیم‌لوله جهت میدان مغناطیسی حاصل با امتداد محور زاویهٔ ۴۵° خواهد ساخت؟ (ب) اندازهٔ میدان مغناطیسی در این مکان چقدر است؟

پاسخ:

الف- میدانهای $\mathbf{B}$ در نقطهٔ p را بر روی محور سولنوئید و سیم در نظر می گیریم به ترتیب به صورت $\mathbf{B}_s$ ، $\mathbf{B}_W$ ، $\mathbf{B}_s$ (میدان سولنوئید) در راستای محور سولنوئید واقع است و $\mathbf{B}_W$ (میدان سیم) عمود بر آن است، $\mathbf{B}_s \perp \mathbf{B}_W$. برای اینکه میدان برآیند $\mathbf{B}$ در زاویهٔ ۴۵° نسبت به محور باشد آنگاه باید داشته باشیم $B_s = B_W$ در نتیجه داریم:

$$B_s = \mu_\circ i_s n = B_W = \frac{\mu_\circ i_W}{2\pi d}$$

که این فاصله جدایی d نقطهٔ p از محور را بصورت زیر بدست می دهد:

$$d = \frac{i_W}{2\pi i_s n} = \frac{6.00A}{2\pi\,(20.0\times10^{-3}A)\,(10\,turns/cm)}$$

$$= 4.77\,cm$$

ب- قدرت میدان مغناطیسی برابر است با:

$$B = \sqrt{2}\,B_s$$

$$B = \sqrt{2}\,(4\pi\times10^{-7}\,T.m/A)\,(20.0\times10^{-3}A)\times\left(\frac{10\,turns}{0.0100m}\right) = 3.55\times10^{-5}\,T$$

★★۵۴ یک الکترون از یک سر سیم لوله‌ای به درون آن شلیک می‌شود. هنگام ورود به میدان مغناطیسی یکنواخت درون سیم‌لوله، مقدار سرعت الکترون ۸۰۰m/s است و بردار سرعت آن با محور مرکزی سیم لوله زاویهٔ ۳۰° می‌سازد. این سیم لوله در امتداد طول خود دارای ۸۰۰۰ دور سیم‌پیچی و حامل جریان ۴٫۰A است. این الکترون از لحظهٔ ورود تا زمانی که از سر دیگر سیم لوله بیرون می‌آید، در سیر مارپیچی‌اش در درون سیم‌لوله چند دور گردش می‌کند؟ (در سیم‌لولهٔ واقعی، که میدان در دو سرش یکنواخت نیست، تعداد دورهای گردش الکترون اندکی کمتر از پاسخ به مسئلهٔ کنونی است.)

پاسخ:

آنچنانکه در انتهای مسئله ذکر شده برخی ساده سازی ها را در این حالت بایستی در نظر گرفت تا محاسبات راحت تر شود (که البته کمی غیر واقعی می شود). برای حرکت دایره ای (با سرعت $v_\perp$ که بیانگر اندازهٔ مؤلفهٔ سرعت عمود بر میدان مغناطیسی است (میدان در شکل ۲۹-۱۹ نمایش داده شده است) زمان تناوب برابر است با (رابطهٔ ۲۸-۱۷ را ببینید):

$$T = \frac{2\pi r}{v_\perp} = \frac{2\pi m}{eB}$$

حال زمان پیمودن طول سولنوئید برابر است با $t = \frac{L}{v_\parallel}$ که در آن $v_\parallel$ مؤلفهٔ سرعت در راستای میدان (در راستای محور سیم پیچ) می باشد و برابر $v\cos\theta$ وقتی که $\theta = 30^\circ$ باشد است. با استفاده از رابطهٔ $B = \mu_\circ in$، تعداد دورها توسط رابطهٔ $\frac{t}{T} = 1.6\times10^{6}$ بدست می آید.

★★۵۵ یک سیم لولهٔ دراز با ۱۰۰ دور سیم‌پیچی در هر سانتی‌متر را در نظر بگیرید که حامل جریان i است. الکترونی در داخل این سیم لوله در مسیر دایره‌ای به شعاع ۲٫۳۰cm، در صفحهٔ عمود بر محور سیم‌لوله، در حرکت است. سرعت الکترون برابر $0.0460c$ (c = سرعت نور) است. جریان i گذرنده‌از سیم‌لوله را پیدا کنید.

پاسخ:

شعاع مداری برای الکترون برابر است با:

$$r = \frac{mv}{eB} = \frac{mv}{e\mu_\circ ni}$$

که با حل برای i بدست می آوریم:

$$i = \frac{mv}{e\mu_\circ nr}$$

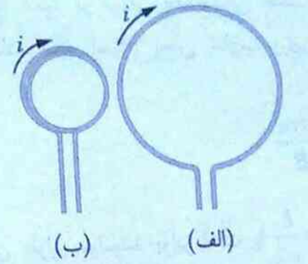
$$= \frac{(9.11\times10^{-31}kg)\,(0.0460)\,(3\times10^{8})}{(1.60\times10^{-19})\,(4\pi\times10^{-7})\left(\frac{100}{0.0100}\right)(2.30\times10^{-2})}$$

$$= 0.272\,A$$

۲۹-۶ پیچهٔ حامل جریان به‌عنوان دوقطبی مغناطیسی

★۵۶ شکل زیر الف قطعه سیمی را نشان می‌دهد که به شکل پیچه‌ای دایره‌ای درآمده است که حامل جریان i است. در شکل

زیر ب همان قطعه سیم را می‌بینم که این بار پیچه‌ای دو دور ساخته است و شعاع دایرهٔ آن نصف شعاع حالت الف است. (الف) اگر B_a و B_b اندازه‌های میدان مغناطیسی در مرکزهای این دو پیچه باشند، نسبت B_b/B_a چقدر است؟ (ب) نسبت μ_b/μ_a، یعنی نسبت اندازه‌های گشتاور دوقطبی مغناطیسی این پیچه‌ها، چقدر است؟



شکل مسأله ۵۶

پاسخ:

روش اول) الف- با توجه به شکل می بینیم که جهت جریان در حلقه‌ها برابر است، لذا داریم:

$$B_\circ=\frac{\mu_\circ i}{2R_a} \quad , \quad B_b=\frac{\mu_\circ i}{2R_b} \Rightarrow$$

$$\frac{B_b}{B_a}=\frac{\dfrac{\mu_\circ i}{2R_b}}{\dfrac{\mu_\circ i}{2R_a}}=\frac{R_a}{R_b} \qquad (I$$

طبق فرض مسئله داریم:

$$A_a=2A_b \Rightarrow 2\pi R_a=2(2\pi R_b) \Rightarrow R_a=2R_b \qquad (II$$

$$(I\ ,\ II) \Rightarrow \frac{B_b}{B_a}=\frac{R_a}{R_b}=2\frac{R_b}{R_a}=2$$

روش دوم) الف- در رابطهٔ ۲۹-۲۶، $z=0$ را قرار می دهیم. (که معادل استفاده از رابطهٔ ۲۹-۱۰ ضرب در تعداد حلقه هاست) در نتیجه $B(0)\propto\frac{i}{R}$. در نتیجه حالت b دارای ۲ حلقه می باشد،

$$\frac{B_b}{B_a}=\frac{2i/R_b}{i/R_a}=\frac{2R_a}{R_b}=4.0$$

ب- نسبت ممان های دو قطبی مغناطیسی برابر است با:

$$A_a=\pi Ra^2 \quad , \quad A_b=\pi R_b^2 \quad , \quad R_a=2R_b \Rightarrow$$

$$\frac{\mu_b}{\mu_a}=\frac{2iA_b}{iA_a}=\frac{2R_b^2}{R_a^2}=2\left(\frac{1}{2}\right)^2=\frac{1}{2}=0.50$$

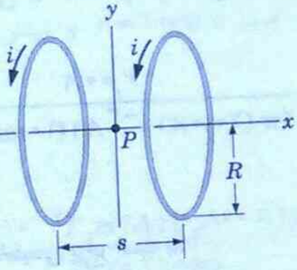
★۵۷ اندازهٔ گشتاور دو قطبی مغناطیسی، **μ**، سیم لوله‌ای که در مسئلهٔ ۴۹ توصیف شده است، چقدر است؟

پاسخ:

اندازهٔ ممان دو قطبی مغناطیسی توسط رابطهٔ $\mu_2=NiA$ بدست می آید که در آن N تعداد دورها و i شدت جریان و A مساحت است. $A=\pi R^2$ می باشد که در آن R شعاع است در نتیجه:

$$\mu=(200)(0.30A)\pi(0.050m)^2=0.47A.m^2$$

★۵۸ شکل زیر آرایه‌ای را نشان می‌دهد که به پیچهٔ هلمهولتز معروف است. این آرایه از دو پیچهٔ دایره‌ای هم‌محور تشکیل شده است که هریک ۲۰۰ دورسیم پیچی و شعاع $R=25.0\,\text{cm}$ دارد. فاصلهٔ دو پیچه هم برابر $s=R$ است. این دو پیچه حامل جریان‌های یکسان و هم جهت $i=12.2\,\text{mA}$ هستند. اندازهٔ میدان مغناطیسی برایند را در نقطهٔ P، در وسط فاصلهٔ بین پیچه‌ها، به‌دست آورید.



شکل مسأله ۵۸

پاسخ:

برای محاسبهٔ میدان مغناطیسی یک حلقه داریم:

$$dB=\frac{\mu_\circ i}{4\pi}\frac{dL\sin\theta}{r^2} \quad , \quad \sin\theta=1 \Rightarrow dB=\frac{\mu_\circ i\,dL}{4\pi r^2}$$

در راستای x داریم:

$$dB_x=dB\cos\alpha=dB\frac{R}{r} \Rightarrow$$

$$B_x=\frac{\mu_\circ i}{4\pi r^2}\frac{R}{r}\int dL=\frac{\mu_\circ iR}{4\pi r^3}\times 2\pi R$$

$$=\frac{\mu_\circ iR^2}{2\sqrt{(R^2+x^2)^3}} \quad , \quad r=\sqrt{R^2+x^2}$$

بنابراین میدان مغناطیسی برابر است با:

$$B=\frac{\mu_\circ\, i\, N\, R^2}{2(R^2+x^2)^{3/2}}$$

میدان مغناطیسی حلقه ها در نقطهٔ p با هم مساوی و هم جهت هستند.
از روی شکل داریم:

$$x=\frac{R}{۲}$$

اگر در میدان مغناطیسی حلقه جایگزین شود داریم:

$$B=\frac{N\mu_0 i R^۲}{۲\sqrt{(R^۲+\frac{۱}{۴}R^۲)^۳}}$$

از رابطهٔ بالا استفاده می کنیم و در نظر می گیریم که سهمی های $\mathbf{B}_p$ دو سیم پیچ مشابه هستند. چون جهت جریان و مشخصات فیزیکی پیچه ها یکسان است لذا جهت و اندازهٔ میدان مغناطیسی پیچه ها در نقطهٔ p برابر است در نتیجه داریم:

$$B=B_۱+B_۲ \quad , \quad B_۱=B_۲ \Rightarrow$$

$$B=۲B_۱ \Rightarrow B=۲B_۱\Big|_{z=\frac{R}{۲}} \Rightarrow$$

$$B_p=\frac{۲\mu_0 iR^۲N}{۲\left[R^۲+(R/۲)^۲\right]^{۳/۲}}=\frac{۸\mu_0 Ni}{۵\sqrt{۵}\,R}$$

$$=\frac{۸(۴\pi\times۱۰^{-۷}T.m/A)(۲۰۰)(۰/۰۱۲۲A)}{۵\sqrt{۵}(۰/۲۵m)}$$

$$=۸/۷۸\times۱۰^{-۶}T$$

$\mathbf{B}_p$ در راستای $+x$ می باشد.

۵۹★ دانشجویی با پیچاندن ۳۰۰ دور سیم‌پیچی به دور استوانه‌ای چوبی به قطر $d=۵/۰\,cm$ یک آهن‌ربای الکتریکی کوچک ساخته است. این پیچه به یک باتری متصل و جریان ۴/۰A در آن برقرار می‌شود. (الف) اندازهٔ گشتاور دو قطبی مغناطیسی این وسیله چقدر است؟ (ب) در چه فاصلهٔ محوری $z \gg d$، در امتداد محور آن، میدان مغناطیسی حاصل معادل ۵/۰μT (تقریباً یک دهم میدان مغناطیسی زمین) می‌شود؟

پاسخ:

الف- اندازهٔ ممان دو قطبی توسط رابطهٔ $\mu=NiA$ بدست می آید که در آن N تعداد دورها و i شدت جریان و A مساحت است و از رابطهٔ $A=\pi R^۲$ (R: شعاع) بدست می آید. در نتیجه:

$$\mu=Ni\pi R^۲=(۳۰۰)(۴/۰A)\pi(۰/۰۲۵m)^۲=۲/۴\,A.m^۲$$

ب- میدان مغناطیسی بر روی محور یک دو قطبی مغناطیسی در فاصلهٔ z از آن توسط رابطهٔ ۲۹-۲۷ بصورت زیر بدست می آید:

$$B=\frac{\mu_0}{۲\pi}\frac{\mu}{z^۳} \Rightarrow z=\left(\frac{\mu_0}{۲\pi}\frac{\mu}{B}\right)^{۱/۳}$$

$$=\left(\frac{(۴\pi\times۱۰^{-۷}T.m/A)(۲/۳۶A.m^۲)}{۲\pi(۵/۰\times۱۰^{-۶}T)}\right)^{۱/۳}$$

$$=۴۶\,cm$$

روش دوم) در مسئلهٔ قبل میدان مغناطیسی را به صورت زیر به دست می آوریم:

$$B=\frac{\mu_0 N i\left(\frac{d}{۲}\right)}{۲\left[\left(\frac{d}{۲}\right)^۲+z^۲\right]^{۳/۲}}=\frac{N\mu_0 i d^۲}{\left[d^۲+۴z^۲\right]^{۳/۲}} \Rightarrow$$

در حالیکه $d \ll z$ باشد از $d^۲$ در مقابل $۴z^۲$ چشم پوشی می شود، بنابراین داریم:

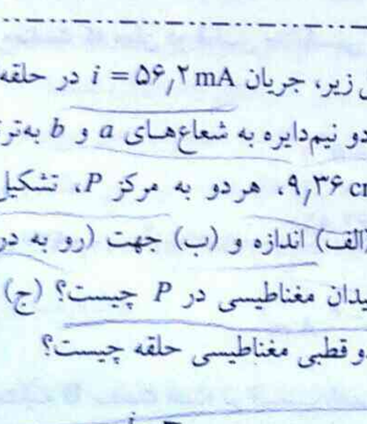
$$B=\frac{N\mu_0 i d^۲}{۸z^۳} \Rightarrow$$

فاصلهٔ مورد نظر برابر است با:

$$z=\left[\frac{N\mu_0 i d^۲}{۸B}\right]^{۱/۳}$$

اگر جایگزین و ساده شود مقدار فاصله به دست می آید.

۶۰★★ در شکل زیر، جریان $i=۵۶/۲\,mA$ در حلقه‌ای که از دو قطعهٔ شعاعی و دو نیم‌دایره به شعاع‌های a و b به‌ترتیب برابر با ۵/۷۲cm و ۹/۳۶cm، هردو به مرکز P، تشکیل شده است برقرار می‌شود. (الف) اندازه و (ب) جهت (رو به درون یا بیرون صفحهٔ کاغذ) میدان مغناطیسی در P چیست؟ (ج) اندازه و (د) جهت گشتاور دو قطبی مغناطیسی حلقه چیست؟



شکل مسأله ۶۰

پاسخ:

الف- برای پیدا کردن میدان مغناطیسی از رابطهٔ ۲۹-۹ برای هر نیم‌دایره

($\phi = \pi\ rad$) استفاده می کنیم. با استفاده از قانون بیو- ساوار، قسمت های مستقیم سهمی در میدان مغناطیسی در نقطهٔ p ندارد. در نتیجه میدان مغناطیسی ناشی از نیم دایره (شعاع a) در نقطهٔ p عمود بر صفحه شکل و به طرف داخل است و برابر است با:

$$B_a = \frac{\mu_0 i}{4a}$$

میدان مغناطیسی ناشی از نیم دایره به شعاع b در نقطهٔ p نیز عمود بر صفحه شکل و به طرف داخل می باشد و برابر است با:

$$B_b = \frac{\mu_0 i}{4b}$$

میدان برآیند برابر است با:

$$\mathbf{B} = \mathbf{B}_a + \mathbf{B}_b \Rightarrow$$

$$B = \frac{\mu_0 i\pi}{4\pi a} + \frac{\mu_0 i\pi}{4\pi b} = \frac{\mu_0 i}{4}\left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b}\right)$$

$$= \frac{(4\pi \times 10^{-7}\ T.m/A)(0.0562\ A)}{4}$$

$$\times\left(\frac{1}{0.0572\ m} + \frac{1}{0.0936\ m}\right) = 4.97 \times 10^{-7}\ T$$

ب- با استفاده از قانون دست راست، $\mathbf{B}$ به سمت داخل صفحه در p است. (شکل (۲۹-۶ ج) را ببینید).

ج- مساحت احاطه شده برابر است با: $A = \frac{(\pi a^2 + \pi b^2)}{2}$

که به دین معناست که ممان دو قطبی مغناطیسی دارای مقدار زیر است:

$$|\boldsymbol{\mu}| = \frac{\pi i}{2}(a^2 + b^2)$$

$$= \frac{\pi(0.0562\ A)}{2}\left[(0.0572\ m)^2 + (0.0936\ m)^2\right]$$

$$= 1.06 \times 10^{-3}\ A.m^2$$

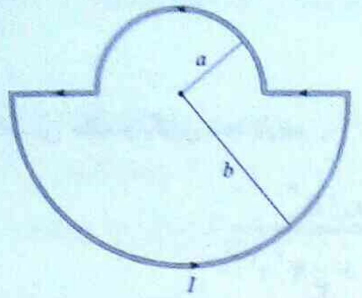
د- جهت $\boldsymbol{\mu}$ مشابه $\mathbf{B}$ بدست آمده در قسمت الف، به سمت داخل صفحه است.

مثال ۵) دو حلقهٔ نیم دایره هم مرکز به شعاع های a و b را مطابق شکل زیر در نظر بگیرید. (الف) میدان برآیند را در مرکز بیابید. (ب) گشتاور مغناطیسی حلقه چه قدر است؟ (فرض کنید: $a = 6\,cm$، $b = 18\,cm$ و $I = 4.5\ A$ می باشد.)

پاسخ:

میدان ناشی از حلقهٔ حامل جریان در مرکزش برابر است با:

$$B = \frac{\mu_0 I}{2a}$$



شکل مثال ۵

در شکل نیم حلقه داریم، لذا می توان نوشت:

$$B_1 = \frac{1}{2} \times \frac{\mu_0 I}{2a} \Rightarrow B_1 = \frac{4\pi \times 10^{-7} \times 4.5}{4 \times 6 \times 10^{-2}} \Rightarrow$$

$$B_1 = 2.35 \times 10^{-5} T$$

$$B_2 = \frac{1}{2} \times \frac{\mu_0 I}{2b} \Rightarrow B_2 = \frac{4\pi \times 10^{-7} \times 4.5}{4 \times 18 \times 10^{-2}} \Rightarrow$$

$$B_2 = 7.85 \times 10^{-6} T$$

با استفاده از قانون دست راست، جهت میدان مغناطیسی ناشی از هر دو نیم حلقه عمود بر صفحه به طرف خارج صفحه است. لذا داریم:

$$B = B_1 + B_2 \Rightarrow B = 2.35 \times 10^{-5} + 7.85 \times 10^{-6} \Rightarrow$$

$$B = 3.14 \times 10^{-5} T$$

ب- مساحت حلقه یعنی A برابر است با:

$$A = \left(\frac{1}{2} \times \pi a^2\right) + \left(\frac{1}{2} \times \pi b^2\right) = \frac{\pi}{2}(a^2 + b^2)$$

$$= \frac{3.14}{2}\left[(6 \times 10^{-2})^2 + (18 \times 10^{-2})^2\right] \Rightarrow$$

$$A = 5.65 \times 10^{-2}\ m^2$$

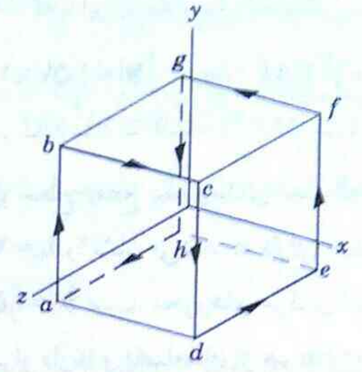
با استفاده از رابطهٔ گشتاور مغناطیسی می توان نوشت:

$$\boldsymbol{\mu} = NIA\hat{n} \Rightarrow \mu = 1 \times 4.5 \times 5.65 \times 10^{-2} \Rightarrow$$

$$\mu = 0.254\ Am^2$$

۶۱★★ در شکل زیر، یک رسانا حامل جریان ۶٫۰A در امتداد مسیر بستهٔ *abcdefgha* روی ۸ ضلع از ۱۲ ضلع مکعبی به طول ضلع ۱۰cm است. (الف) با فرض این که این مسیر بسته از ترکیب سه حلقه جریان

مربعی ($bcfgb$، $abgha$، و $cdefc$) تشکیل شده است، و با استفاده از نمادگذاری بردار یکه، گشتاور مغناطیسی برایند مسیر را به‌دست آورید. (ب) اندازهٔ میدان مغناطیسی برایند در مکان xyz (۰، ۵٫۰، ۰) چقدر است؟



شکل مسأله ۶۱

پاسخ:

با تصور این که المانهای bg, cf (نشان داده شده در شکل که دارای جریان نیستند) در واقع هر کدام دارای یک جفت جریان با جهت مخالف و برابر (i) هستند (که این جریانها همدیگر را خنثی می کنند) می توان بر همکنش را فرض کرد.

الف- ممان دوقطبی مسیر $abcdefgha$ برابر است با:

$$\mu = \mu_{bcfgb} + \mu_{abgha} + \mu_{cdefc} = \left(ia^2\right)(\hat{j} - \hat{i} + \hat{i})$$

$$= ia^2 \hat{j} = (6.0\,A)(0.10\,m)^2 \hat{j}$$

$$= (6.0 \times 10^{-2} A.m^2)\,\hat{j}$$

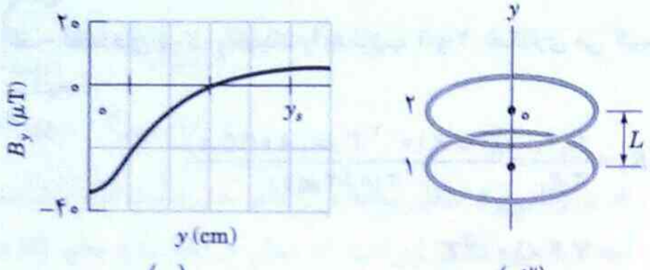
ب- چون نقاط از حالت مکعب دور هستند می توان از تقریب دو قطبی استفاده کرد. برای $(x, y, z) = (0, 5m, 0)$:

$$\mathbf{B}(0, 5.0m, 0) \approx \frac{\mu_0}{2\pi}\frac{\mu}{y^3}$$

$$= \frac{(1.26 \times 10^{-6} T.m/A)(6.0 \times 10^{-2} m^2.A)\,\hat{j}}{2\pi (5.0\,m)^3}$$

$$= (9.6 \times 10^{-11} T)\,\hat{j}$$

۶۲★★ در شکل زیر الف، دو حلقهٔ دایره‌ای با جریان‌های متفاوت اما با شعاع یکسان چنان قرار گرفته‌اند که محور y از مرکزهاشان می‌گذرد. در ابتدا فاصلهٔ آن‌ها از هم $L = 3.0\,cm$ است و مرکز حلقهٔ ۲ در مبدأ محور y قرار گرفته است. جریان‌های گذرنده از دو حلقه میدان مغناطیسی برایندی در مبدأ به‌وجود می‌آورند که مؤلفهٔ y آن B_y است. قرار است این مؤلفه را با حرکت دادن تدریجی حلقهٔ ۲ در جهت مثبت محور y اندازه‌گیری کنند. نمودار زیر ب مؤلفهٔ B_y را به صورت تابعی از مکان y حلقهٔ ۲ نشان می‌دهد. مجانب این منحنی در حد $y \to \infty$ مقدار $B_y = 7.20\,\mu T$ را نشان می‌دهد. مقیاس محور افقی با $y_s = 10.0\,cm$ داده می‌شود. (الف) جریان i_1 در حلقهٔ ۱ چقدر است؟ (ب) جریان i_2 در حلقهٔ ۲ چقدر است؟



(الف) (ب)

شکل مسأله ۶۲

پاسخ:

با استفاده از رابطهٔ ۲۹-۲۶ مؤلفهٔ y میدان بصورت زیر بدست می آید:

$$B_y = \frac{\mu_0 i_1 R^2}{2\pi (R^2 + z_1^2)^{3/2}} - \frac{\mu_0 i_2 R^2}{2\pi (R^2 + z_2^2)^{3/2}}$$

که در آن $Z_1^2 = L^2$ (شکل (الف) را ببینید) و $Z_2^2 = y^2$ (زیرا محور مرکزی در اینجا به جای z با y بیان شده است.) این حقیقت که علامت منفی بین دو عبارت فوق ناشی از اطلاعات برداشت شده از شکل (۲۹-۷۶ ب) می باشد که متناسب با $B_y = 0$ که بدون آن امکان پذیر نمی باشد (که از نظر فیزیکی این بدین معناست که یکی از جریانها در راستای ساعتگرد و یکی در راستای پادساعتگرد است.)

الف- با $y \to \infty$ فقط عبارت اول سهم دارد و (با $B_y = 7.2 \times 10^{-6} T$ داده شده در این حالت) می توان آن را برحسب i_1 حل کرد. بدست خواهیم آورد:

$$i_1 = \left(\frac{45}{16\pi}\right) A = 0.90\,A$$

ب- با حلقهٔ ۲ در محل $y = 0.06\,m$ (شکل (۲۹-۷۶ ب) را ببینید) می توان i_2 را از رابطهٔ زیر بدست آورد:

$$\frac{\mu_0 i_1 R^2}{2(R^2 + L^2)^{3/2}} = \frac{\mu_0 i_2 R^2}{2(R^2 + y^2)^{3/2}} \Rightarrow$$

$$i_2 = \left(\frac{117\sqrt{13}}{50\pi}\right) A \approx 2.7\,A$$

۶۳★★ یک حلقهٔ دایره‌ای به شعاع ۱۲ cm حامل جریان ۱۵ A است. پیچهٔ تختی که در صفحه‌ای عمود بر صفحهٔ حلقه و هم

مرکز با آن قرار گرفته است، دارای شعاع ۰٫۸۲cm، ۵۰ دور سیم‌پیچی، و جریان ۱٫۳A است. فرض کنید میدان مغناطیسی ناشی از حرقه در سطح پیچه یکنواخت است. (الف) مقدار میدان مغناطیسی ناشی از حلقه را در مرکز حلقه و (ب) مقدار گشتاور نیروی وارد بر پیچه را بر اثر حلقه به‌دست آورید.

پاسخ:

الف- حلقه های بزرگ و کوچک را به ترتیب ۱ و ۲ نامگذاری می کنیم در نتیجه:

$$B_۱=\frac{\mu_۰ i_۱}{۲R_۱}=\frac{(۴\pi\times۱۰^{-۷}T.m/A)(۱۵A)}{۲(۰٫۱۲m)}$$

$$=۷٫۹\times۱۰^{-۵}T$$

ب- اندازهٔ گشتاور برابر است با:

$$\tau=\left|\mu_۲\times\mathbf{B}_۱\right|=\mu_۲B_۱\sin۹۰^\circ=N_۲i_۲A_۲B_۱\Rightarrow$$

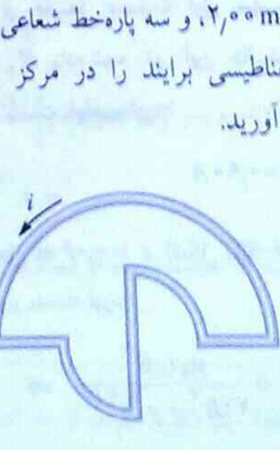
$$\tau=\pi N_۲i_۲r_۲^۲B_۱$$

$$=\pi(۵۰)(۱٫۳A)(۰٫۸۲\times۱۰^{-۲}m)^۲(۷٫۹\times۱۰^{-۵}T)$$

$$=۱٫۱\times۱۰^{-۶}N.m$$

مسئله‌های دیگر

۶۴- شکل زیر یک حلقهٔ بسته را با جریان $i=۲٫۰۰A$ نشان می‌دهد. این حلقه از یک نیم‌دایره به شعاع ۴٫۰۰m، دو ربع دایره هریک به شعاع ۲٫۰۰m، و سه پاره‌خط شعاعی تشکیل شده است. اندازهٔ میدان مغناطیسی برایند را در مرکز مشترک قطعه‌های دایره‌ای به‌دست آورید.



شکل مسئله ۶۴

پاسخ:

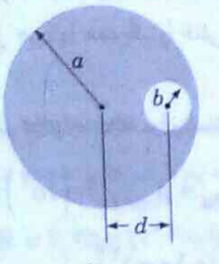
المان شعاعی در ایجاد $\vec{B}$ تأثیری (در مرکز) ندارند و المان کمانی مطابق رابطهٔ ۲۹-۹ (با زاویه بر حسب رادیان) مؤثر می باشد. چنانچه $\hat{k}$ را در راستای خارج صفحه در نظر بگیریم آنگاه داریم:

$$\mathbf{B}=\frac{\mu_۰ i\ (\pi\ rad)}{۴\pi\ (۴٫۰۰m)}\hat{k}+\frac{\mu_۰ i\ (\pi/۲\ rad)}{۴\pi\ (۲٫۰۰m)}\hat{k}-\frac{\mu_۰ i\ (\pi/۲\ rad)}{۴\pi\ (۴٫۰۰m)}\hat{k}$$

درنتیجه $i=۲A$ که با این به مقدار برابر است با:

$$\hat{B}=(۱٫۵۷\times۱۰^{-۷}T)\ \hat{k}\ \Rightarrow\ \left|\mathbf{B}\right|=۱٫۵۷\times۱۰^{-۷}T$$

۶۵- شکل زیر سطح مقطع یک رسانای استوانه‌ای شکل بلند به شعاع $a=۴٫۰۰cm$ را نشان می‌دهد که دارای حفره‌ای استوانه‌ای به شعاع $b=۱٫۵۰cm$ است. محورهای مرکزی استوانه و حفره به موازات هم قرار دارند و فاصله‌شان از هم $d=۲٫۰۰cm$ است. جریان $i=۵٫۲۵A$ به طور یکنواخت در سطح مقطع سایه‌دار توزیع شده است. (الف) اندازهٔ میدان مغناطیسی در مرکز حفره چقدر است؟ (ب) دربارهٔ دو حالت خاص $b=۰$ و $d=۰$ بحث کنید.



شکل مسئله ۶۵

پاسخ:

روش اول) الف- میدان مغناطیسی در نقطه ای واقع در حفره عبارت است از مجموع میدان های ناشی از دو شدت جریان که اولی آنست که استوانه توپر بدست آمده با پر کردن حفره بدست می آید و دارای چگالی جریان مشابه همان است که در استوانه اصلی (دارای حفره) است و دومی استوانهٔ توپری است که حفره را پر کرده است و دارای چگالی جریان با همان اندازهٔ استوانهٔ اصلی است ولی در جهت مخالف می باشد. چنانچه این دو حالت برهم نهی کنند کل جریان در ناحیهٔ حفره صفر می شود. حال یک استوانهٔ توپر حامل جریان i بطور یکنواخت توزیع شده در یک سطح مقطع یک میدان مغناطیسی به اندازهٔ زیر ایجاد می کند:

$$B=\frac{\mu_۰ ir}{۲\pi R^۲}$$

که در این محل فاصلهٔ r از محور داخل استوانه می باشد و R شعاع استوانه است. برای استوانه موجود در این مسئله چگالی جریان برابر است با:

$$J=\frac{i}{A}=\frac{i}{\pi(a^۲-b^۲)}$$

که در آن $A=\pi(a^۲-b^۲)$ مساحت سطح مقطع استوانه حفره‌دار،

است. جریان درون استوانه بدون وجود حفره برابر است با:

$$I_1 = JA = \pi J a^2 = \frac{i a^2}{a^2 - b^2}$$

و میدان مغناطیسی ایجاد شده توسط آن در داخل و به فاصلهٔ r_1 از محور دارای اندازهٔ زیر می باشد:

$$B_1 = \frac{\mu_0 I_1 r_1}{2\pi a^2} = \frac{\mu_0 i r_1 a^2}{2\pi a^2 (a^2-b^2)} = \frac{\mu_0 i r_1}{2\pi (a^2-b^2)}$$

جریان درون استوانه که حفره را پر می کند برابر است با:

$$I_2 = \pi J b^2 = \frac{i b^2}{a^2-b^2}$$

و میدان تولید شده آن در نقطه ای داخل آن به فاصلهٔ r_2 از محورش دارای مقدار زیر است:

$$B_2 = \frac{\mu_0 I_2 r_2}{2\pi b^2} = \frac{\mu_0 i r_2 b^2}{2\pi b^2 (a^2-b^2)} = \frac{\mu_0 i r_2}{2\pi (a^2-b^2)}$$

در مرکز حفره این میدان برابر صفر است و میدان در آنجا دقیقاً مشابه حالتی است که حفره پر باشد. با قرار دادن $r_1 = d$ در عبارت B_1 بدست خواهیم آورد:

$$B = \frac{\mu_0 i d}{2\pi (a^2-b^2)}$$

$$= \frac{(4\pi\times 10^{-7}\, T.m/A)(5.25A)(0.0200m)}{2\pi\left[(0.0400m)^2-(0.0150m)^2\right]}$$

$$= 1.53\times 10^{-5}\, T$$

که این برای میدان موجود در مرکز حفره بدست می آید. میدان به سمت بالا خواهد بود.اگر در شکل جهت جریان به سمت خارج صفحه باشد.

ب- چنانچه $b=0$ باشد فرمول میدان بصورت $B = \frac{\mu_0 i d}{2\pi a^2}$ در می آید. در واقع این یک میدان ناشی از یک استوانهٔ توپر که جریان یکنواخت i را منتقل می کند را نتیجه می دهد که در یک نقطه درون استوانه در فاصلهٔ d از محور واقع است. چنانچه $d=0$ شود آنگاه $B=0$ خواهد شد. که این برای میدان ناشی از یک پوستهٔ استوانه ای در محل محورش که حامل یک جریان یکنواخت باشد نیز صحیح است.

نکته: می توان از قانون آمپر برای اثبات اینکه میدان مغناطیسی درون حفره یکنواخت است استفاده نمود. یک مسیر مستطیلی با دو ضلع بزرگ (ضلع ۱ و ۲ که هر کدام به طول L است) و دو ضلع کوچک (که طول هر کدام کوچکتر از b است) را انتخاب می کنیم. چنانچه ضلع ۱ دقیقاً در راستای محور حفره واقع باشد آنگاه ضلع ۲ به موازات آن و حفره خواهد بود. برای اطمینان از اینکه اضلاع کوچک در انتگرال قانون آمپر دخالتی نمی کنند بایستی L را بسیار طولانی در نظر گرفت. (شاید بزرگتر از طول استوانه) و یا بایستی از آرگومانی که متناسب با زاویهٔ بین $\mathbf{B}$ و اضلاع کوچکتر است (که برابر 90° در محور حفره است) چاره جست. در هر حالت انتگرال موجود در قانون آمپر عبارت زیر را تولید خواهد کرد:

$$\oint_{\text{مستطیل}} \mathbf{B}\cdot d\mathbf{s} = \mu_0 i_{\text{محصور}} \Rightarrow$$

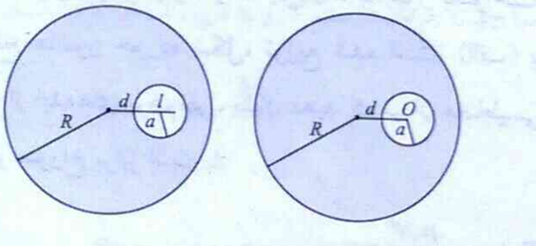
$$\int_{side1} \mathbf{B}\cdot d\mathbf{s} + \int_{side2} \mathbf{B}\cdot d\mathbf{s} = \mu_0 i_{\text{کل}} \Rightarrow$$

$$(B_{side1} - B_{side2})\, L = 0$$

که در آن B_{side1} میدان موجود در راستای محور بدست آمده در قسمت الف است. این نشانگر این است که میدان در نقاط خارج محور (که در آنجا B_{side2} بدست می آید) مشابه همان میدانی است که در مرکز حفره می باشد. در نتیجه میدان موجود در حفره یکنواخت است.

روش دوم

نکتهٔ ۱) برای اینکه ثابت کنیم میدان تولیدی درون کاواک یکنواخت است و پیدا کردن میدان کل از اصل برهم‌نهی، استفاده کنید. میدان حاصل از سیم بدون کاواک را با میدان ناشی از سیمی به مقطع کاواک حامل جریان در جهت مخالف، جمع کنید.



شکل مسئلهٔ ۶۵ ب

برای انجام دادن بحث های بالا فرض می کنیم سیم با شعاع R بدون کاواک است برای محاسبهٔ میدان در فاصلهٔ $r = d + l$ (داخل سیم) با استفاده از قانون آمپر داریم:

$$\oint \mathbf{B}\,.\,d\mathbf{l} = \mu_0 I \Rightarrow B(2\pi r) = \mu_0\left(\frac{r^2 I}{R^2}\right) \Rightarrow$$

$$B = \frac{\mu_0 r I}{2\pi R^2} \Rightarrow B = \frac{\mu_0 (d+l) I}{2\pi R^2}$$

فرض می شود سیمی با شعاع a موجود است که جهت جریان آن، خلاف جهت جریان در سیمی است که فاقد کاواک به شعاع R می‌باشد، برای محاسبهٔ میدان در فاصلهٔ $r = l$ یعنی داخل سیم با استفاده از قانون آمپر داریم:

$$\oint \mathbf{B}'.d\mathbf{l}=-\mu_0 I \Rightarrow B'(2\pi r')=-\mu_0\left(\frac{r'^2 I}{R^2}\right)\Rightarrow$$

$$B'=\frac{-\mu_0 r' I}{2\pi R}\Rightarrow r=l\Rightarrow B'=-\frac{\mu_0 l I}{2\pi R^2}$$

علامت منفی، نشان دهندهٔ جهت جریان می باشد.

طبق اصل برهم‌نهی میدان داخل کاواک از جمع دو میدان حاصل می‌شود لذا داریم:

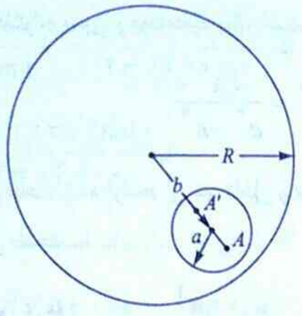
$$B_T=B+B'\Rightarrow B_T=\frac{\mu_0(d+l)I}{2\pi R^2}-\frac{\mu_0 lI}{2\pi R^2}=\frac{\mu_0 I d}{2\pi R^2}$$

با توجه به اینکه d و R مقادیر ثابتی می باشند در نتیجه میدان درون کاواک یکنواخت می باشد.

مثال ۵) شکل زیرسطح مقطع یک رسانای طویل استوانه‌ای به شعاع a را نشان می‌دهد که دارای یک سوراخ استوانه‌ای دراز به شعاع b است. محورهای این دو استوانه موازی و در فاصلهٔ d از یکدیگر قرار دارند. جریان i به طور یکنواخت، در سطح هاشور خورده شکل، توزیع شده است. (الف) با استفاده از ایده‌های برهم‌نهی، نشان دهید که میدان مغناطیسی در مرکز سوراخ برابر است با:

$$B=\frac{\mu_0 i d}{2\pi(a^2-b^2)}$$

(ب) دو حالت خاص $b=0$ و $d=0$ را بررسی کنید. (ج) آیا می توانید از قانون آمپر برای نشان دادن اینکه میدان مغناطیسی در سوراخ یکنواخت است استفاده کنید؟ (راهنمایی: سوراخ استوانه‌ای را با دو جریان مساوی ولی در جهتهای مخالف هم پر کنید، به طوری که یکدیگر را خنثی می‌کنند. فرض کنید که هر یک از این جریانها همان چگالی جریان مربوط به رسانای واقعی را دارند. به این ترتیب میدانهای ناشی از جریانهای جاری در دو استوانهٔ کامل، به شعاعهای a و b، را بر هم می نهیم که چگالی جریان یکسانی دارند.)



شکل مثال ۵

پاسخ: چگالی سطحی جریان رسانا به صورت:

$j=i/\pi(R^2-a^2)$ است.

الف) با فرض اینکه حفره و قسمت پر دارای دو جریان در جهتهای مخالف که یکدیگر را خنثی می کنند. این جریانها دارای چگالی یکسانی می باشند. چگالی جریان قسمت پر، قبل از این فرضی برابر است با:

$$j=\frac{i}{\pi R^2-\pi a^2}=\frac{i}{\pi(R^2-a^2)}$$

اگر جریان i' ازاستوانه کامل عبور کند جریان عبوری برابر است با:

$$i=\pi R^2 j=\frac{(\pi R^2)j}{\pi(R^2-a^2)}$$

میدان مغناطیسی حاصل از استوانه کامل در نقطه O به فاصله r از مرکز استوانه کامل که درون استوانه به شعاع a میباشد، برابر است با:

$$B_1=\frac{\mu_0}{2\pi r}(i'\frac{\pi r^2}{\pi R^2})=\frac{\mu_0 r i}{2\pi(R^2-a^2)}$$

با توجه به یکسان بودن چگالیهای جریان، جریان هر استوانه به شعاع a برابر است با:

$$i_2=\pi b^2 j=\frac{(\pi b^2)i}{\pi(R^2-a^2)}$$

B ناشی از استوانه به شعاع a در نقطه o به فاصله i' از مرکز استوانه به شعاع a برابر است با:

$$B_2=\frac{\mu_0}{2\pi r'}(i''\frac{\pi r'^2}{\pi b^2})=\frac{\mu_0 r' i}{2\pi(R^2-a^2)}$$

در شکل داریم:

$\mathbf{b}=\mathbf{r}-\mathbf{r}'$ یا $\mathbf{r}'=\mathbf{r}-\mathbf{b}\Rightarrow B_2=\dfrac{\mu_0(r-b)i}{2\pi(R^2-a^2)}$

از اصل برهم نهی، برآیند میدان مغناطیسی B در نقطه O برابر است با:

$$B = B_1 - B_2 = \frac{\mu_0 b i}{2\pi(R^2 - a^2)}$$

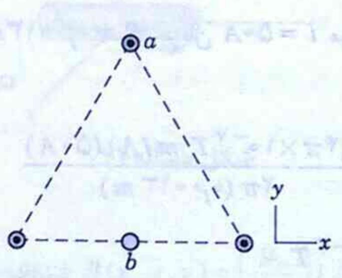
۶۶- اندازهٔ میدان مغناطیسی در فاصلهٔ $88.0\ cm$ از محور یک سیم دراز و مستقیم برابر $7.30\ \mu T$ است. جریان گذرنده از این سیم چقدر است؟

پاسخ:

رابطهٔ ۲۹-۴ بدست می دهد:

$$i = \frac{2\pi RB}{\mu_0} = \frac{2\pi(0.880 m)(7.30\times10^{-6}T)}{4\pi\times10^{-7}T.m/A} = 32.1A$$

۶۷- سه سیم دراز را به موازات محور z در نظر بگیرید که هر یک حامل جریان ۱۰ A در جهت مثبت محور z است. محل تلاقی آن‌ها با صفحهٔ xy یک مثلث متساوی‌الاضلاع به ضلع ۵۰ cm می‌سازد، چنان که در شکل زیرنشان داده شده است. سیم چهارمی (سیم b) هم از نقطهٔ وسط قاعدهٔ مثلث می گذرد و با سه سیم دیگر موازی است. اگر نیروی مغناطیسی برایند وارد بر سیم a صفر باشد، (الف) اندازه و (ب) جهت ($+z$ یا $-z$) جریان گذرنده از سیم b چیست؟



شکل مسأله ۶۷

پاسخ:

الف- با استفاده از قانون دست راست اندازهٔ میدان $\mathbf{B}_1$ (بدست آمده در a) تولید شده توسط سیم ۱ (سیم واقع در سمت چپ پایین) در زاویهٔ $\theta = 150°$ (اندازهٔ گیری شده در راستای پادساعتگرد محور $+x$ در صفحهٔ xy) و میدان ایجاد شده توسط سیم ۲ (سیم واقع در سمت راست پایین) در زاویهٔ $\theta = 210°$ قرار دارد بدلیل تقارن $(\mathbf{B}_1 = \mathbf{B}_2)$ مشاهده می کنیم که فقط مؤلفهٔ x باقی می ماند که در نتیجه داریم:

$$\mathbf{B} = \mathbf{B}_1 + \mathbf{B}_2 = \left(2\frac{\mu_0 i}{2\pi l}\cos 150°\right)\hat{i}$$

$$= (-3.46\times10^{-5}T)\,\hat{i}$$

که در آن داریم $l = 0.10m$ ، $i = 10A$ که رابطهٔ ۲۹-۴ استفاده شده است. برای حذف این، سیم b بایستی حامل جریان به سمت درون صفحه باشد (در راستای $-\hat{k}$) و مقدار آن برابر است با:

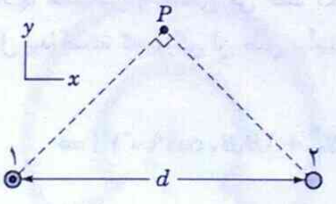
$$i_b = B\,\frac{2\pi r}{\mu_0}$$

$$= (3.46\times10^{-5}T)\frac{2\pi(0.087m)}{4\pi\times10^{-7}T.m/A} = 15A$$

که در آن داریم $r = \frac{\sqrt{3}\,l}{2} = 0.087m$ که دوباره از رابطهٔ ۲۹-۴ استفاده شده است.

ب- همچنان که اشاره شده برای حذف این بایستی سیم b حامل جریان در راستای درون صفحه باشد (که جهت $-z$ است).

۶۸- شکل زیر سطح مقطع‌های دو سیم دراز و موازی را، که به فاصلهٔ $d = 10.0\ cm$ از هم قرار دارند، نشان می‌دهد. جریان گذرنده از هریک ۱۰۰ A است، و جهت جریان در سیم ۱ رو به بیرون صفحهٔ کاغذ است. نقطهٔ P را روی عمود منصف خط واصل بین دو سیم در نظر گرفته‌ایم. با استفاده از نمادگذاری بردار یکه، میدان مغناطیسی برایند در نقطهٔ P را برای دو حالت زیر بیابید: (الف) جهت جریان گذرنده از سیم ۲ رو به بیرون صفحهٔ کاغذ است؛ (ب) جهت جریان در سیم ۲ رو به درون صفحهٔ کاغذ است.



شکل مسأله ۶۸ الف

پاسخ:

در نظر داریم که فاصلهٔ هر سیم تا نقطهٔ p برابر $r = \frac{d}{\sqrt{2}} = 0.71m$.

در هر دو قسمت جریان برابر $i = 100A$ است.

الف- با داشتن جریانهای موازی با بکار گیری قانون دست راست (برای تعیین سهم سیمها در ایجاد میدان در نقطهٔ p) چنین نتیجه می گیریم که مؤلفه های عمودی حذف می شوند و مؤلفه های افقی بر هم افزوده شده و نتیجه می دهند:

$$B = 2\left(\frac{\mu_0 i}{2\pi r}\right)\cos 45.0° = 4.00\times10^{-4}T$$

که این در راستای $(-x)$ است. به بیان بردار یکه:

$$\mathbf{B} = (-4\times10^{-4}T)\,\hat{i}$$

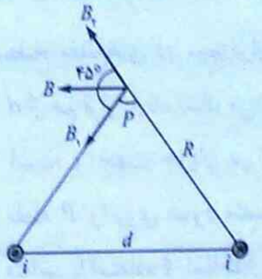
ب- حال با داشتن جریانهای پادموازی و بکارگیری قانون دست راست نتیجه می گیریم که مؤلفه های افقی خنثی شده و مؤلفه های عمود بر هم افزوده می شوند بصورت:

$$B = 2\left(\frac{\mu_0 i}{2\pi r}\right)\cos 45.0^\circ = 4.00\times10^{-4}T$$

که این در راستای محور $+y$ می باشد، به بیان بردار یکه:

$$\mathbf{B} = (4\times10^{-4}\,T)\,\hat{j}$$

روش دوم) حالت الف) چنان می باشد که در آن جریان هر دو سیم از صفحه خارج می شود، به کمک قاعده دست راست $\mathbf{B}_1$ را مربوط به جریان سیم چپ و $\mathbf{B}_2$ مربوط به سیم راست در نقطه P است. فاصله سیم از نقطه P یکسان است لذا:



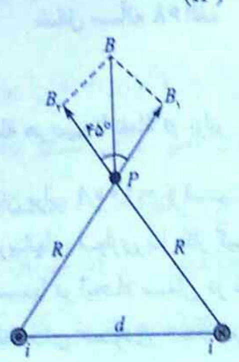
شکل مساله ۶۸ ب

$$\mathbf{B}_1 = \mathbf{B}_2,\ B_1 = \frac{\mu_0 i}{2\pi R} \qquad (I)$$

مؤلفه قائم میدانها همدیگر را خنثی می کنند لذا جهت میدان مغناطیسی در شکل پیدا است، که بزرگی آن طبق برآیند دو بردار متقاطع برابر است با:

$$B = (B_1^2 + B_2^2 + 2B_1B_2\cos 90^\circ)^{\frac{1}{2}} \Rightarrow$$

$$B = \sqrt{2}\,B_1 \qquad (II)$$



شکل مساله ۶۸ ج

با استفاده از رابطه (I) و (II) داریم:

$$B = \sqrt{2}\,B_1 = \sqrt{2}\left(\frac{\mu_0 i}{2\pi R}\right)$$

با استفاده از شکل: (به کمک قائم الزاویه در شکل الف):

$$R^2 + R^2 = d^2 \Rightarrow 2R^2 = d^2 \Rightarrow$$

$$R = 12.2^2 \Rightarrow R = 8.62\,cm$$

$$B = \frac{\sqrt{2}\times4\times3.14\times10^{-7}\times115}{2\times3.14\times0.0862} = 3.7\times10^{-4}T$$

ب) با استفاده از شکل (ب) پیدا است که زاویه بین $\mathbf{B}_1$ و $\mathbf{B}_2$ متقابل به رأس زاویه 90° است که یعنی $\mathbf{B}_1$ و $\mathbf{B}_2$ بر هم عمودند، با استفاده از اینکه برآیند دو بردار متقاطع عمود بر هم برابر است با:

$$B^2 = B_1^2 + B_2^2 + 2B_1B_2\cos 90^\circ = B_1^2 + B_2^2 \Rightarrow$$

$$B = \sqrt{B_1^2 + B_2^2} = \sqrt{2B_1^2} \Rightarrow B = \sqrt{2}\,B_1$$

لذا ثابت شد همانند قسمت الف حل می شود که برابر است لذا:

$$B = 3.7\times10^{-4}T$$

۶۹- با استفاده از یک سیم مسی لُخت شمارهٔ ۱۰ (با قطر ۲٫۶ mm)، بدون این‌که داغ شود، می‌توان جریان ۵۰ A را عبور داد. برای چنین جریانی، اندازهٔ میدان مغناطیسی در سطح سیم چقدر می‌شود؟

پاسخ:

با داشتن شعاع $R = 0.0013m$ جریان $i = 50A$ میدان زیر را در لبهٔ سیم ایجاد می کند:

$$B = \frac{\mu_0 i}{2\pi R} = \frac{(4\pi\times10^{-7}\,T.m/A)(50A)}{2\pi(0.0013\,m)}$$

$$= 7.7\times10^{-3}T$$

روابط ۲۹-۴، ۲۹-۱۷، ۲۹-۲۰ تأیید کننده در این نقطه هستند.

۷۰- یک سیم قائم بلند حامل جریان نامعلومی است. یک استوانهٔ رسانای توخالی و هم محور با این سیم در سطح خود جریان ۳۰ mA را به طرف بالا می‌برد. شعاع استوانهٔ توخالی ۳٫۰ mm است. اگر اندازهٔ میدان مغناطیسی در نقطه‌ای به فاصلهٔ ۵٫۰ mm از سیم برابر ۱٫۰ μT باشد، (الف) اندازه و (ب) جهت جریان گذرنده از سیم چیست؟

پاسخ:

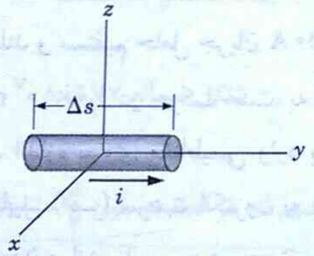
الف- با در نظر گرفتن تقارن استوانه ای در بیرون رسانا داریم:

$$|\mathbf{B}| = \frac{\mu_0 i_{enc}}{2\pi r}$$

که این جریانی برابر $i_{enc} = 25 mA$ را طبق اطلاعات داده شده ایجاد می کند. در نتیجه سیم نازک بایستی حامل $5 mA$ جریان باشد.

ب- جهت به سمت پایین است که در خلاف جهت جریان $30 mA$ منتقل شده توسط سطح رسانا می باشد.

۷۱- شکل زیر یک قطعه سیم به طول $\Delta s = 3.0 \text{ cm}$ را نشان می‌دهد که از وسط روی مبدأ مختصات و در امتداد محور y قرار گرفته است. این قطعه (به‌عنوان قسمتی از یک مدار الکتریکی کامل) حامل جریان $i = 2.0 \text{ A}$ در جهت مثبت y است. محاسبهٔ اندازهٔ میدان مغناطیسی **B** ناشی از این قطعه سیم در مکانی به فاصلهٔ چند متر از مبدأ مختصات می‌توانیم قانون بیر ساوار را به صورت $B = (\mu_0/4\pi) i\, \Delta s\, (\sin\theta)/r^2$ بنویسیم، زیرا r و θ در امتداد این قطعه سیم عملاً ثابت می‌مانند. میدان مغناطیسی **B** را (با استفاده از نمادگذاری بردار یکه) برحسب مختصات (x, y, z) در نقاط زیر بیابید: (الف) $(0, 0, 5.0 \text{ m})$، (ب) $(0, 6.0 \text{ m}, 0)$، (ج) $(7.0 \text{ m}, 7.0 \text{ m}, 0)$، و (د) $(-3.0 \text{ m}, -4.0 \text{ m}, 0)$.



شکل مسأله ۷۱

پاسخ:

از رابطهٔ $B(x, y, z) = \left(\frac{\mu_0}{4\pi}\right) i\, \Delta\mathbf{s} \times \frac{\mathbf{r}}{r^3}$ استفاده می کنیم که در آن $\Delta\mathbf{s} = \Delta s\, \hat{j}$ و $\mathbf{r} = x\hat{i} + y\hat{j} + z\hat{k}$ در نتیجه:

$$\mathbf{B}(x, y, z) = \left(\frac{\mu_0}{4\pi}\right) \frac{i\, \Delta s\, \hat{j} \times (x\,\hat{i} + y\hat{j} + z\,\hat{k})}{(x^2 + y^2 + z^2)^{3/2}}$$

$$= \frac{\mu_0 i\, \Delta s\, (z\,\hat{i} - x\,\hat{k})}{4\pi\, (x^2 + y^{s} + z^2)^{3/2}}$$

الف- میدان بر روی محور z (در $z = 5m$) برابر است با:

$$\mathbf{B}(0, 0, 5.0 m)$$

$$= \frac{(4\pi \times 10^{-7} T.m/A)(2A)(3 \times 10^{-2} m)(5m)\hat{i}}{4\pi(0^2 + 0^2 + (5m)^2)^{3/2}}$$

$$= (2.4 \times 10^{-10} T)\, \hat{i}$$

ب- $\mathbf{B}(0, 6m, 0) = 0$ چون $x = z = 0$.

ج- میدان در صفحه xy در نقطهٔ $(x, y) = (7, 7)$ برابر است با:

$$\mathbf{B}\,(7.0m, 7.0m, 0)$$

$$= \frac{(4\pi \times 10^{-7} T.m/A)(2A)(3 \times 10^{-2} m)(-7m)\hat{k}}{4\pi((7)^2 + (7)^2 + 0^2)^{3/2}}$$

$$= (-4.3 \times 10^{-11} T)\, \hat{k}$$

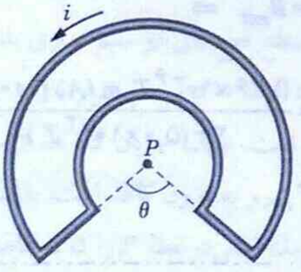
د- میدان در صفحه xy در نقطهٔ $(x, y) = (-3, -4)$ برابر است با:

$$\mathbf{B}(-3.0m, -4.0m, 0)$$

$$= \frac{(4\pi \times 10^{-7} T.m/A)(2A)(3 \times 10^{-2} m)(3m)\hat{k}}{4\pi((-3)^2 + (-4)^2 + 0^2)^{3/2}}$$

$$= (1.4 \times 10^{-10} T)\, \hat{k}$$

۷۲- در شکل زیر، یک حلقهٔ بسته حامل جریان $i = 200 \text{ mA}$ است. این حلقهٔ سیم از دو قسمت شعاعی مستقیم و دو کمان دایره‌ای هم‌مرکز به شعاع‌های 2.00 m و 4.00 m تشکیل شده است. زاویهٔ θ برابر $\pi/4 \text{ rad}$ است. (الف) اندازه و (ب) جهت (رو به درون یا بیرون صفحهٔ کاغذ) میدان مغناطیسی برایند در مرکز انحنای P چیست؟



شکل مسأله ۷۲

پاسخ:

الف- المانهای شعاعی سهمی در ایجاد میدان $\bar{B}_p$ ندارند ولی المانهای کمانی طبق رابطهٔ (۲۹-۹) (با زاویه بر حسب رادیان) سهیم هستند. چنانچه k را جهت خارج صفحه در نظر بگیریم آنگاه:

$$\mathbf{B}_P = \frac{\mu_0 i\ (7\pi/4\, rad)}{4\pi\, (4.00m)}\hat{k} - \frac{\mu_0 i\ (7\pi/4\, rad)}{4\pi\, (2.00m)}\hat{k}$$

که در آن $i = 0.2A$ در نتیجه:

$$\mathbf{B} = -2.75 \times 10^{-8} \hat{k}\, T \Rightarrow |\mathbf{B}| = 2.75 \times 10^{-8}\, T$$

ب- جهت در راستای $-\hat{k}$ (به سمت داخل صفحه) است.

۷۳- یک کابل استوانه‌ای به شعاع ۸٫۰۰mm حامل جریان ۲۵٫۰A است. این جریان به طور یکنواخت روی سطح مقطع کابل توزیع شده است. در چه فاصله‌ای از مرکز سیم و در داخل آن نقطه‌ای وجود دارد که اندازهٔ میدان مغناطیسی در آن ۰٫۱۰۰mT باشد؟

پاسخ:

با استفاده از رابطهٔ ۲۹-۲۰ داریم:

$$|\mathbf{B}| = \left(\frac{\mu_\circ i}{۲\pi R^۲}\right) r$$

که بدست می آوریم $r = ۰٫۰۰۱۲۸ m$ میدان مورد نظر را بدست می دهد.

۷۴- سیم درازی را که حامل جریان ۱۰۰A است چنان در نظر بگیرید که بر خطوط میدان مغناطیسی یک میدان مغناطیسی یکنواخت به اندازهٔ ۵٫۰mT عمود شده است. در چه فاصله‌ای از سیم، میدان مغناطیسی برایند برابر صفر است؟

پاسخ:

نقاط بایستی در راستایی به موازات سیم و به فاصلهٔ r از آن واقع باشند. که در آن r از رابطهٔ زیر به دست می آید:

$$B_{wire} = \frac{\mu_\circ i}{۲\pi r} = B_{ext} \Rightarrow$$

$$r = \frac{\mu_\circ i}{۲\pi B_{ext}} = \frac{(۱٫۲۶\times ۱۰^{-۶} T.m/A)(۱۰۰ A)}{۲\pi (۵٫۰\times ۱۰^{-۳} T)}$$

$$= ۴٫۰\times ۱۰^{-۳} m$$

۷۵- دو سیم، هریک به طول L و حامل جریان i، یکی به شکل دایره و دیگری به شکل مربع درآورده می‌شود. نشان دهید که میدان مغناطیسی مربع در مرکز آن بیشتر از میدان مغناطیسی دایره در مرکز خودش است.

پاسخ:

طول هر ضلع مربع را a در نظر می گیریم. مرکز مربع به فاصلهٔ $\frac{a}{۲}$ از ضلع می باشد. چهار ضلع وجود دارند که در ایجاد میدان در مرکز نقش ایفا می کنند. نتیجه بصورت زیر خواهد بود:

$$B_{center} = ۴\left(\frac{\mu_\circ i}{۲\pi (a/۲)}\right)\left(\frac{a}{\sqrt{a^۲ + ۴(a/۲)^۲}}\right) = \frac{۲\sqrt{۲}\,\mu_\circ i}{\pi a}$$

از طرفی میدان مغناطیسی در مرکز یک سیم دایره ای به شعاع R برابر است با $\frac{\mu_\circ i}{۲R}$ (طبق رابطهٔ ۲۹-۱۰). در نتیجه این مسئله نشان می دهد که:

$$\frac{۲\sqrt{۲}\,\mu_\circ i}{\pi a} > \frac{\mu_\circ i}{۲R} \Rightarrow \frac{۴\sqrt{۲}}{\pi a} > \frac{۱}{R}$$

برای این کار بایستی پارامتر های R , a را بهم ربط دهیم. چنانچه دو سیم دارای طول مساوی L باشند آنگاه رابطهٔ هندسی $۴a = L$ و $۲\pi R = L$ ارتباط مورد نیاز را برقرار می کند:

$$۴a = ۲\pi R \Rightarrow a = \frac{\pi R}{۲}$$

در نتیجه استدلال از این حقیقت تشکیل شده که:

$$\frac{۴\sqrt{۲}}{\pi a} = \frac{۸\sqrt{۲}}{\pi^۲ R} > \frac{۱}{R}$$

بنابراین می توان بصورت عددی نمایش داد که داریم:

$$\frac{۸\sqrt{۲}}{\pi^۲} > ۱$$

۷۶- یک سیم بلند و مستقیم حامل جریان ۵۰A است. الکترونی که با سرعت $۱٫۰\times ۱۰^۷$ m/s در حرکت است، به اندازهٔ ۵٫۰cm از سیم فاصله دارد. اندازهٔ نیروی مغناطیسی وارد بر الکترون را در حالت‌های زیر بیابید: (الف) سرعت الکترون به سوی سیم است، (ب) سرعت الکترون موازی با سیم و در جهت جریان است، (ج) سرعت الکترون عمود بر هردو جهتی است که در قسمت‌های الف و ب مشخص شده‌اند.

پاسخ:

جریان $i = ۵۰A$ را در راستای $+x$ در نظر می گیریم و الکترون را در نقطهٔ p که به اندازهٔ $r = ۰٫۰۵m$ از سیم دورتر است (که $+y$ جهت بالا می باشد). در نتیجه میدان ایجاد شده توسط الکترون به سمت پایین حرکت می کند یعنی $\mathbf{v} = -v\,\hat{j}$ (که در آن سرعت برابر $v = ۱\times ۱^۷ m/s$ است.)

$$\mathbf{F}_e = \left[\frac{-e\mu_\circ i}{۲\pi r}\right](\mathbf{v}\times\hat{k})$$

در نتیجه داریم:

$$\mathbf{F}_e = \frac{-e\mu_\circ iv}{۲\pi r}(-\hat{i}) = (۳٫۲\times ۱۰^{-۱۶} N)\,\hat{i} \Rightarrow$$

$$|\mathbf{F}_e| = ۳٫۲\times ۱۰^{-۱۶} N$$

ب- در این حالت الکترون در همان راستای جریان $\mathbf{v} = v\,\hat{i}$ می باشد. در نتیجه:

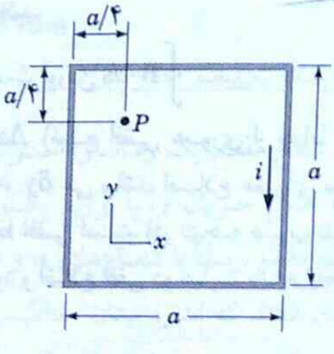
$$\mathbf{F}_e=\frac{-e\mu_0 iv}{2\pi r}(-\hat{j})=(3{,}2\times10^{-16}N)\,\hat{j}\ \Rightarrow$$

$$\left|\mathbf{F}_e\right|=3{,}2\times10^{-16}N$$

ج- در اینحالت داریم $\mathbf{v}=\pm v\,\hat{k}$ در نتیجه:

$$\mathbf{F}_e\propto\hat{k}\times\hat{k}=0$$

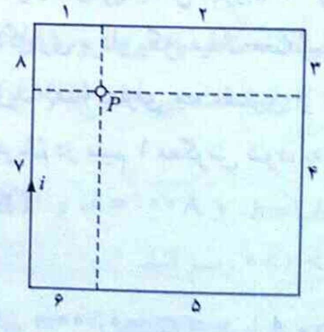
۷۷- با استفاده از نمادگذاری بردار یکه، میدان مغناطیسی در نقطهٔ P در شکل زیر را با فرض $i=10\,A$ و $a=8{,}0\,cm$ به دست آورید. (توجه کنید که سیم‌ها دراز *نیستند*.)



شکل مسأله ۷۷ الف

پاسخ:

دو المان کوچک سیم که هر کدام به طول $\frac{a}{4}$ می باشند و در شکل ۲۹-۸۳ نمایش داده شده اند و نزدیکترین به p هستند با بر چسب- های ۱ و ۸ در شکل نشان داده شده اند.



شکل مسئله ۷۷ ب

چنانچه $-\hat{k}$ بردار یکه در راستای داخل صفحه باشد، می توان از نتایج مسئله ۲۹-۲۱ برای محاسبهٔ B_{P_1} از B_{P_8} استفاده کرد:

$$B_{P1}=B_{P8}=\frac{\sqrt{2}\,\mu_0 i}{8\pi(a/4)}=\frac{\sqrt{2}\,\mu_0 i}{2\pi a}$$

$$B_{P4}=B_{P5}=\frac{\sqrt{2}\,\mu_0 i}{8\pi(3a/4)}=\frac{\sqrt{2}\,\mu_0 i}{6\pi a}$$

$$B_{P2}=B_{P7}=\frac{\mu_0 i}{4\pi(a/4)}\cdot\frac{3a/4}{\left[(3a/4)^2+(a/4)^2\right]^{1/2}}$$

$$=\frac{3\mu_0 i}{\sqrt{10}\,\pi a}$$

$$B_{P3}=B_{P6}=\frac{\mu_0 i}{4\pi(3a/4)}\cdot\frac{a/4}{\left[(a/4)^2+(3a/4)^2\right]^{1/2}}$$

$$=\frac{\mu_0 i}{3\sqrt{10}\,\pi a}$$

سرانجام داریم:

$$\mathbf{B}_P=\sum_{n=1}^{8}B_{Pn}(-\hat{k})$$

$$=2\frac{\mu_0 i}{\pi a}\left(\frac{\sqrt{2}}{2}+\frac{\sqrt{2}}{6}+\frac{3}{\sqrt{10}}+\frac{1}{3\sqrt{10}}\right)(-\hat{k})$$

$$\mathbf{B}_P=\frac{2(4\pi\times10^{-7}\,T.m/A)(10A)}{\pi(8{,}0\times10^{-2}m)}$$

$$\times\left(\frac{\sqrt{2}}{2}+\frac{\sqrt{2}}{6}+\frac{3}{\sqrt{10}}+\frac{1}{3\sqrt{10}}\right)(-\hat{k})$$

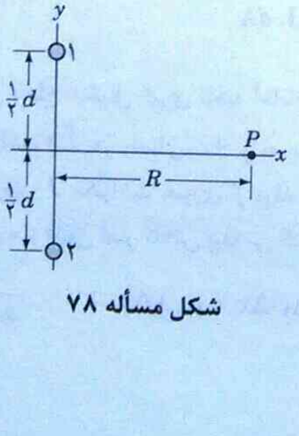
$$=(2{,}0\times10^{-4}T)(-\hat{k})$$

۷۸- شکل زیرسطح قطع‌های دو سیم موازی بلند را نشان می‌دهد که به فاصلهٔ $d=18{,}6\,cm$ از هم قرار دارند و هر یک جریان حامل $4{,}23\,A$ است. جهت جریان گذرنده از سیم ۱ رو به بیرون کاغذ، و در سیم ۲ رو به درون کاغذ است. با استفاده‌از نمادگذاری بردار یکه، میدان مغناطیسی در نقطهٔ P را که در فاصلهٔ $R=34{,}2\,cm$ قرار دارد به‌دست آورید.

پاسخ:

رابطهٔ ۲۹-۱۷ را برای هر سیم اعمال می کنیم که در آن

$$r=\sqrt{R^2+\left(\frac{d}{2}\right)^2}$$



شکل مسأله ۷۸

است (قضیهٔ فیثاغورث) مؤلفه های عمودی میدانها خنثی می شوند و دو مؤلفهٔ افقی مشابه با هم جمع می شوند:

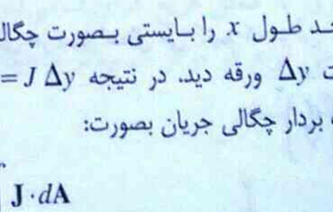
$$B = 2\left(\frac{\mu_0 i}{2\pi r}\right)\left(\frac{d/2}{r}\right) = \frac{\mu_0 i d}{2\pi \left(R^2 + (d/2)^2\right)}$$

$$= 1.25\times10^{-6}\,T$$

که در آن $\frac{\left(\frac{d}{2}\right)}{r}$ کمیت مثلثاتی است که مؤلفهٔ افقی را انتخاب می کند. مشخص است که این معادل عبارت موجود در مسئلهٔ المان است. با استفاده از قانون دست راست مؤلفه های افقی در راستای $+x$ بدست می آیند و در حالت نمایش بردار یکه داریم:

$$\mathbf{B} = (1.25\times10^{-6}\,T)\,\hat{i}$$

۷۹- شکل زیر قسمتی از سطح مقطع یک صفحهٔ رسانای بی‌نهایت بزرگ را نشان می‌دهد که حامل جریانی رو به بیرون صفحهٔ کاغذ است. اندازهٔ جریان به‌ازای هر واحد طول امتداد x برابر λ است. (الف) با استفاده از تقارن و قانون بیرساوار نشان دهید که در تمامی نقاط بالای صفحه، مانند P، و پایین صفحه، مانند P'، میدان مغناطیسی $\mathbf{B}$ به موازات صفحه و در جهت‌هایی است که نشان داده شده‌اند. (ب) با استفاده از قانون آمپر ثابت کنید که در تمامی نقاط مانند P و P' داریم $B = \frac{1}{2}\mu_0\lambda$.



شکل مسأله ۷۹

پاسخ:

جریان بر واحد طول x را بایستی بصورت چگالی جریان ضرب شده در ضخامت Δy ورقه دید. در نتیجه $\lambda = J\,\Delta y$. قانون آمپر را می توان بصورت بردار چگالی جریان بصورت:

$$\oint \mathbf{B}\cdot d\mathbf{s} = \mu_0 \int \mathbf{J}\cdot d\mathbf{A}$$

بیان کرد. که در آن سطح انتگرال گیری ناحیه احاطه شده توسط مسیر انتگرال گیری می باشد. ($\hat{J}$ در راستای $+z$ و به سمت بیرون صفحه است.) با در نظر گرفتن J یکنواخت عبوری از ورقه مشخص است که سمت راست این نمونه از قانون آمپر کاهش پیدا می کند به:

$$\mu_0 JA = \mu_0 J\,\Delta y\,\Delta x = \mu_0\,\lambda\,\Delta x$$

الف- شکل ۲۹-۸۵ مطمئناً دارای مؤلفه های افقی $\mathbf{B}$ کشیده شده در نقاط p', p می باشد (با مراجعه به شکل ۲۹-۴ ثابت می شود [نزدیکترین المانهای جریان را در این نقاط در نظر بگیرید] در نتیجه سؤال بدینگونه مطرح می شود: آیا برای $\mathbf{B}$ امکان پذیر است که مؤلفه های عمودی در شکل داشته باشد؟ توجه ما بیشتر به نقطهٔ p می‌باشد. شکل ۲۹-۴ پیشنهاد می کند که المانهای جریان بایستی در سمت راست نزدیکترین باشد (آن که مستقیماً زیر نقطهٔ p واقع است) که آن خواهد توانست یک مؤلفه به سمت پایین ایجاد کند. با همین استدلال المان جریان بایستی دقیقاً در سمت چپ نزدیکترینی می باشد که یک مؤلفه به سمت بالا در نقطهٔ p ایجاد می کند. المانهای جریان مشابه هستند (بنابر تقارن افقی موجود در مسئله). در نتیجه همهٔ مؤلفه های عمودی دو به دو خنثی می شوند. میدان ایجاد شده در نقطهٔ p فقط در راستای افقی می باشد.

ب- مسیر در بدست آوردن $\oint \mathbf{B}\cdot ds$ بصورت قائم الزاویه است. که طول افقی آن Δx (ضلع افقی عبوری از نقاط p', p) و اندازه عمودی آن $\delta y > \Delta y$ می باشد. اضلاع عمودی سهمی در انتگرال ندارد زیرا $\mathbf{B}$ فقط افقی است. (در نتیجه ضرب نقطه ای برای این اضلاع صفر می شود و اضلاع افقی دو عبارت مشابه ایجاد خواهند کرد. از قانون آمپر داریم:

$$2B\,\Delta x = \mu_0\,\lambda\,\Delta x \;\Rightarrow\; B = \frac{1}{2}\mu_0\,\lambda$$

۸۰- دو سیم بلند را در نظر بگیرید که در صفحهٔ xy قرار دارند و هر یک حامل جریانی در جهت مثبت محور x است. سیم ۱ در $y = 10.0\,\text{cm}$ قرار دارد و حامل جریان $6.00\,\text{A}$ است؛ سیم ۲ در $y = 5.00\,\text{cm}$ قرار دارد و حامل جریان $10.0\,\text{A}$ است. (الف) با استفاده از نمادگذاری بردار یکه، میدان مغناطیسی برایند $\mathbf{B}$ را در مبدأ به دست آورید. (ب) به‌ازای چه مقداری از y داریم $\mathbf{B} = 0$؟ (ج) اگر جهت جریان در سیم ۱ معکوس شود، به‌ازای چه مقداری از y داریم $\mathbf{B} = 0$؟

پاسخ:

الف- سیم در راستای $y = r_A = 0.100\,m$ را A و در راستای $y = r_B = 0.05\,m$ را B می نامیم با استفاده از رابطهٔ ۲۹-۴ داریم:

$$\mathbf{B}_{net} = \mathbf{B}_A + \mathbf{B}_B = -\frac{\mu_0 i_A}{2\pi r_A}\hat{k} - \frac{\mu_0 i_B}{2\pi r_B}\hat{k}$$

$$= (-52.0\times10^{-6}\,T)\,\hat{k}$$

ب- این برای مقادیری که $r_B < y < r_A$ باشد واقع می شود در نتیجه:

$$\frac{\mu_0 i_A}{2\pi(r_A - y)} = \frac{\mu_0 i_B}{2\pi(y - r_B)}$$

که با حل آن بدست می آوریم:

$$y = \frac{13}{160} \approx 0{,}0813m$$

ج- از امکان $y < r_B$ را صرفنظر می کنیم چون سیم B جریان بزرگتر را حمل می کند. راه حلی را در ناحیهٔ $y > r_A$ در نظر می گیریم که بصورت:

$$\frac{\mu_0 i_A}{2\pi(y - r_A)} = \frac{\mu_0 i_B}{2\pi(y - r_B)}$$

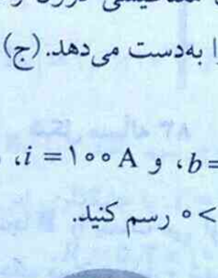
می باشد. که با حل آن داریم:

$$y = \frac{7}{40} \approx 0{,}0175m$$

۸۱- شکل زیر سطح مقطع یک رسانای استوانه‌ای توخالی را نشان می‌دهد که حامل جریان i، با توزیع یکنواخت در سطح مقطع، است. سطح مقطع رسانا با شعاع‌های a و b مشخص شده است. (الف) نشان دهید که اندازهٔ میدان مغناطیسی $B(r)$، به‌ازای فاصلهٔ شعاعی r در گسترهٔ $b < r < a$، با رابطه زیر داده می‌شود

$$B = \frac{\mu_0 i}{2\pi(a^2 - b^2)} \frac{r^2 - b^2}{r}$$

(ب) نشان دهید که این معادله به‌ازای $r = a$، اندازهٔ میدان مغناطیسی را روی سطح یک سیم دراز مستقیم حامل جریان i به دست می‌دهد؛ به‌ازای $r = b$، میدان مغناطیسی را صفر به‌دست می‌دهد؛ و به‌ازای $b = 0$، میدان مغناطیسی درون رسانای توپُری به شعاع a و حامل جریان i را به‌دست می‌دهد. (ج) فرض کنید: $a = 2{,}0\text{cm}$، $b = 1{,}8\text{cm}$، و $i = 100\text{ A}$، و آن‌گاه نمودار $B(r)$ را در گسترهٔ $0 < r < 6\text{ cm}$ رسم کنید.



شکل مسأله ۸۱

پاسخ:

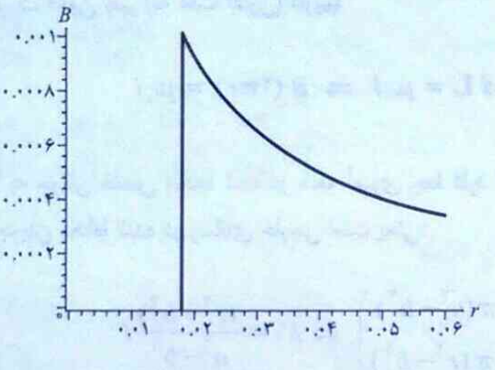
الف- برای مسیر دایره ای به طول L و شعاع r هم مرکز با رسانا داریم:

$$\oint_L \mathbf{B}\cdot d\mathbf{s} = 2\pi r B = \mu_0 i_{enc} = \mu_0 i \frac{\pi(r^2 - b^2)}{\pi(a^2 - b^2)} \Rightarrow$$

$$B = \frac{\mu_0 i}{2\pi(a^2 - b^2)}\left(\frac{r^2 - b^2}{r}\right)$$

ب- در $r = a$ قدرت میدان مغناطیسی برابر است با:

$$\frac{\mu_0 i}{2\pi(a^2 - b^2)}\left(\frac{a^2 - b^2}{a}\right) = \frac{\mu_0 i}{2\pi a}$$



نمودار مسئله ۸۱

در $r = b$ ، $B \propto r^2 - b^2 = 0$ و نهایتاً در:

$$B = \frac{\mu_0 i}{2\pi a}\frac{r^2}{r} = \frac{\mu_0 i r}{2\pi a^2}$$

ج- برای $r < b$ میدان برابر صفر است که معادل رابطهٔ ۲۹-۱۷ برای $r > a$ می باشد. در نتیجه مطابق نتایج قست (الف) B برای مختلف بدست می آید. نمودار بصورت زیر خواهد شد (با واحدهای SI).

به بیان دیگر یا روش دوم داریم :

طبق قانون آمپر داریم :

$$\oint \mathbf{B}.d\,\mathbf{S} = \mu_0 i$$

که i جریانی که دربرگرفته شده است. حلقهٔ آمپری همچنان یک دایره به مرکز محور مسئله می باشد لذا سمت چپ معادله فوق به $2\pi rB$ کاهش می یابد، درست مثل معادلهٔ ۳۳-۳۲ سمت راست به جریان خالصی که توسط سطح بسته s دربرگرفته سده است بستگی دارد که کسری از جریان موجود در رسانا است.سطح مقطع رسانا $\pi(a^2 - b^2)$ است، لذا کسر جریان احاطه شده در حلقهٔ آمپری عبارتست از:

$$i\frac{\pi(r^2 - b^2)}{\pi(a^2 - b^2)} = i\frac{r^2 - b^2}{a^2 - b^2}$$

میدان مناطیسی در این ناحیه به صورت زیر است:

$$B = \frac{\mu_0 i}{2\pi r}\frac{r^2 - b^2}{a^2 - b^2}$$

ب- اگر $r=a$ آنگاه :

$$B=\frac{\mu_\circ i}{۲\pi a}\frac{a^۲-b^۲}{a^۲-b^۲}=\frac{\mu_\circ i}{۲\pi a}$$

که همانند چیزی است که انتظار داریم:

$$r=b\Rightarrow B=\frac{\mu_\circ i}{۲\pi b}\frac{b^۲-b^۲}{a^۲-b^۲}=۰$$

$$b=۰\Rightarrow B=\frac{\mu_\circ i}{۲\pi r}\frac{r^۲-۰^۲}{a^۲-۰^۲}=\frac{\mu_\circ ir}{۲\pi a^۲}$$

الف) به کمک قانون آمپر (به علت تقارن) داریم:

$$\oint \mathbf{B}\cdot d\,\mathbf{L}=\mu_\circ i \;\Rightarrow\; B\,(۲\pi r)=\mu_\circ i$$

جریان بالا به جریان خالص محاط شده در حلقه آمپری ربط دارد که برابر با کاهش جریان محاط شده در رسانای خارجی است یعنی:

$$\left.\begin{array}{l} I=\pi(a^۲-b^۲) \\ I'=\pi(r^۲-b^۲)\end{array}\right\}\Rightarrow I'=\frac{(r^۲-b^۲)}{a^۲-b^۲}I$$

جریان کابل در محدودهٔ شعاعی از b تا r منظور می گردد.میدان مغناطیسی برابر است با:

$$B\,(۲\pi r)=\mu_\circ\frac{r^۲-b^۲}{a^۲-b^۲}I\Rightarrow B=\frac{\mu_\circ I}{۲\pi\,(a^۲-b^۲)}\frac{r^۲-b^۲}{r}$$

ب) در حالتیکه $r=b$ باشد آنگاه: $B=۰$

و در حالتیکه $b=۰$ باشد آنگاه: $B=\frac{\mu_\circ I}{۲\pi a^۲}r$

و در حالتیکه $r=a$ باشد آنگاه: $B=\frac{\mu_\circ I}{۲\pi a}$

ج)

$$for\quad r>a\Rightarrow B=\frac{\mu_\circ i}{۲\pi r}$$

$$for\quad r<a\Rightarrow B=۰$$

تغییرات $\mathbf{B}(r)$ را بر حسب a و b و r در نمودار نمودار مسئله ۸۱ مشاهده می شود

۸۲- سه سیم بلند را که روی صفحهٔ xy قرار دارند، به موازات محور x در نظر بگیرید. فاصلهٔ سیمها از یکدیگر یکسان و برابر ۱۰cm است. دو سیمی که در طرفین قرار دارند، حامل جریان ۵٫۰ A در جهت مثبت xاند. اندازهٔ نیروی وارد بر قطعه سیمی به طول ۳٫۰m از هریک از سیم‌های خارجی در حالت‌های زیر چقدر است: اگر سیم وسطی حامل جریان ۳٫۲ A (الف) در جهت مثبت x باشد، یا (ب) در جهت منفی x باشد؟

پاسخ:

الف- همهٔ سیم ها جریانهای موازی حمل می کنند و یکدیگر را جذب می نمایند اما سیم بالایی به سمت پایین توسط دو سیم دیگر کشیده می شود:

$$|\mathbf{F}|=\frac{\mu_\circ L\,(۵٫۰A)\,(۳۲A)}{۲\pi\,(۰٫۱۰m)}+\frac{\mu_\circ L\,(۵٫۰A)\,(۵٫۰A)}{۲\pi\,(۰٫۲۰m)}$$

که در آن $L=۳m$ در نتیجه:

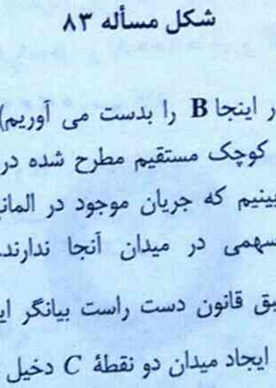
$$|\mathbf{F}|=۱٫۷\times۱۰^{-۴}N$$

ب- سیم بالایی به سمت بالا توسط سیم مرکزی هل داده می شود و توسط سیم پایینی به سمت پایین کشیده می گردد.

$$|\mathbf{F}|=\frac{\mu_\circ L\,(۵٫۰A)\,(۳٫۲A)}{۲\pi\,(۰٫۱۰m)}-\frac{\mu_\circ L\,(۵٫۰A)\,(۵٫۰A)}{۲\pi\,(۰٫۲۰m)}$$

$$=۲٫۱\times۱۰^{-۵}N$$

۸۳- در شکل زیر، دو سیم بی‌نهایت بلند را نشان داده‌ایم که حامل جریان یکسان i هستند. هر سیم در امتداد کمانی ۹۰° روی محیط یک دایره به شعاع R کشیده شده است. نشان دهید که میدان مغناطیسی $\mathbf{B}$ در مرکز دایره همان میدان مغناطیسی $\mathbf{B}$ است که در فاصلهٔ R در زیر یک سیم مستقیم بی‌نهایت بلند و حامل جریان i در جهت رو به چپ پدید می‌آید.



شکل مسأله ۸۳

پاسخ:

به مرکز دایره (که در اینجا $\mathbf{B}$ را بدست می آوریم) مانند نقطهٔ C می رویم. بحث المانهای کوچک مستقیم مطرح شده در مسئله ۲۹-۱ را در نظر می آوریم. می بینیم که جریان موجود در المانهای مستقیم که به موازات C هستند سهمی در میدان آنجا ندارند. رابطهٔ ۲۹-۹ (با $\phi=\frac{\pi}{۲}rad$) و طبق قانون دست راست بیانگر اینست که جریانهای موجود در دو کمان در ایجاد میدان دو نقطهٔ C دخیل هستند.

$$\frac{\mu_\circ i\;(\pi/۲)}{۴\pi R}-\frac{\mu_\circ i\;(\pi/۲)}{۴\pi R}=۰$$

در نتیجه سهمهای غیر صفر ناشی از المانهای مستقیم که با C همراستا

هستند ایجاد می شود. دو نمونه از این نوع اجراء مستقیم نیمه بینهایت وجود دارد: یکی فاصلهٔ R بالای C و دیگری فاصلهٔ افقی R از سمت چپ C. هر دو میدان ایجاد شده به سمت بیرون صفحه است (شکل (۲۹-۶ ج) را ببینید). چون اندازه های این دو سهم (که توسط رابطهٔ ۲۹-۷) بدست می آید با هم جمع شده و نتیجه زیر بدست می آید:

$$B=۲\left(\frac{\mu_{\circ}i}{۴\pi R}\right)=\frac{\mu_{\circ}i}{۲\pi R}$$

که آن چیزی است که می توان از یک سیم مستقیم بی نهایت انتظار داشت (شکل ۲۹-۴ را ببینید). برای یک سیم که چنین میدانی (به سمت بیرون صفحه است) با یک جریان به سمت چپ نیازمند اینست که نقطه ای که میدان بدست می آید در زیر سیم واقع باشد (دوباره شکل(۲۹-۶ ج) را ببینید).

۸۴- یک سیم دراز که شعاعش بزرگ‌تر از ۴٫۰ mm تعیین شده است، قرار است حامل جریانی باشد که به‌طور یکنواخت روی سطح مقطع آن توزیع می‌شود. اندازهٔ میدان مغناطیسی ناشی از جریان در نقطه‌ای به فاصلهٔ ۴٫۰ mm از محور سیم برابر ۰٫۲۸ mT، و در نقطه‌ای به فاصلهٔ ۱۰ mm از محور برابر ۰٫۲۰ mT است. شعاع این سیم چقدر است؟

پاسخ:

با استفاده از روابط ۲۹-۲۰ و ۲۹-۱۷ داریم:

$$|\mathbf{B}_۱|=\left(\frac{\mu_{\circ}i}{۲\pi R^۲}\right)r_۱ \quad , \quad |\mathbf{B}_۲|=\frac{\mu_{\circ}i}{۲\pi r_۲}$$

که در آن داریم:

$$r_۱=۰٫۰۰۴۰m \quad , \quad |\mathbf{B}_۱|=۲٫۸\times ۱۰^{-۴}T$$

$$r_۲=۰٫۰۱۰m \quad , \quad |\mathbf{B}_۲|=۲٫۰\times ۱۰^{-۴}T$$

نقطهٔ ۲ بایستی در خارج سیم باشد زیرا $|\mathbf{B}_۲|<|\mathbf{B}_۱|$. از معادلهٔ دوم بدست می آوریم $i=۱۰A$. با جایگذاری این دو معادله در معادلهٔ اول بدست می آوریم $R=۵٫۳\times ۱۰^{-۳}m$.

۸۵- یک استوانه رسانای توخالی و بلند (به شعاع درونی ۲٫۰ mm و شعاع بیرونی ۴٫۰ mm) حامل جریان ۲۴ A با توزیع یکنواخت در سطح مقطع است. یک سیم بلند نازک هم، که با استوانه هم محور است، حامل جریان ۲۴ A در جهت مخالف جریان استوانه است. اندازهٔ میدان مغناطیسی در فاصلهٔ (الف) ۱٫۰ mm، (ب) ۳٫۰ mm، و (ج) ۵٫۰ mm از محور مرکزی سیم و استوانه چقدر است؟

پاسخ:

الف- میدان در این ناحیه تماماً ناشی از سیم بلند است (با ضخامت ناچیز) با استفاده از رابطهٔ ۲۹-۱۷ داریم:

$$|\mathbf{B}|=\frac{\mu_{\circ}i_w}{۲\pi r}=۴٫۸\times ۱۰^{-۳}T$$

که در آن $r=۰٫۰۰۱۰m$, $i_w=۲۴A$.

ب- حال میدان از دو سهم تشکیل شده است (که پادموازی هستند) ناشی از سیم (رابطهٔ ۲۹-۱۷) و ناشی از قسمتی از رسانا (رابطهٔ ۲۹-۲۰) برای سطح حلقه ای اصلاح شود) بصورت زیر:

$$|\mathbf{B}|=\frac{\mu_{\circ}i_w}{۲\pi r}-\frac{\mu_{\circ}i_{enc}}{۲\pi r}$$

$$=\frac{\mu_{\circ}i_w}{۲\pi r}-\frac{\mu_{\circ}i_c}{۲\pi r}\left(\frac{\pi r^۲-\pi R_i^۲}{\pi R_{\circ}^۲-\pi R_i^۲}\right)$$

که در آن داریم:

$$r=۰٫۰۰۳۰m \quad , \quad R_i=۰٫۰۰۲۰m$$

$$R_{\circ}=۰٫۰۰۴۰m \quad , \quad i_c=۲۴A$$

در نتیجه بدست می آوریم:

$$|\mathbf{B}|=۹٫۳\times ۱۰^{-۴}T$$

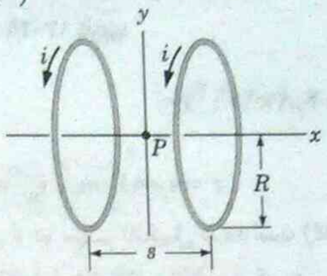
ج- حال در ناحیهٔ خارج. میدانهای خاصی از هر دو رسانا خنثی می شوند. (چون $i_C=i_W$) یعنی $\mathbf{B}=۰$.

۸۶- در شکل زیر، آرایه‌ای از پیچه‌های موسوم به پیچه‌های هلمولتز نشان داده شده است. هریک از این دو پیچه دارای N دور سیم‌پیچی به شعاع R است، و روی یک محور مشترک به فاصلهٔ s از هم قرار گرفته‌اند. هر دو پیچه حامل جریان یکسان i و در جهت یکسان هستند. (الف) نشان دهید که مشتق اول اندازهٔ میدان مغناطیسی برایند ناشی از پیچه‌ها (dB/dx) در نقطهٔ میانی P صفر می‌شود و این به اندازهٔ s بستگی ندارد. چرا انتظار دارید، با توجه به تقارن، این نتیجه درست باشد؟ (ب) نشان دهید که مشتق دوم ($d^۲B/dx^۲$) هم، در صورتی که $s=R$ باشد، در نقطهٔ P صفر می‌شود. بدین ترتیب، یکنواختی B در نزدیکی P برای این فاصلهٔ خاص بین دو پیچه نشان داده می‌شود.

پاسخ:

(الف) اندازهٔ میدان مغناطیسی بر روی محور یک حلقه دایروی، که در فاصلهٔ z از مرکز آن واقع است از رابطهٔ ۲۹-۲۶ بدست می آید:

$$B=\frac{N\mu_0 i R^2}{2(R^2+z^2)^{3/2}}$$



شکل مسأله ۸۶

که در آن R شعاع حلقه، N تعداد دورها و i جریان است. هر دو حلقه مطرح در مسئله دارای شعاع‌های مساوی دورهای مساوی و جریانها مشابه هستند جریانها در یک جهت و میدانهای ناشی از آنها در فاصلهٔ بین آنها در یک جهت واقع اند. مبدأ مختصات را در مرکز حلقه سمت چپی قرار می دهیم و x را مختصات نقطه ای روی محور بین دو حلقه در نظر می گیریم. برای محاسبهٔ میدان حلقه دست چپی در معادلهٔ فوق $z=x$ قرار می دهیم نقطهٔ انتخاب شده در فاصلهٔ $s-x$ از مرکز حلقه دست راست واقع است. برای محاسبهٔ میدان ناشی از آن در معادلهٔ فوق $z=s-x$ قرار می دهیم. کل میدان آن در نقطه برابر خواهد بود با:

$$B=\frac{N\mu_0 i R^2}{2}\left[\frac{1}{(R^2+x^2)^{3/2}}+\frac{1}{(R^2+x^2-2sx+s^2)^{3/2}}\right]$$

با مشتق گیری نسبت به x داریم:

$$\frac{dB}{dx}=-\frac{N\mu_0 i R^2}{2}\left[\frac{3x}{(R^2+x^2)^{5/2}}+\frac{3(x-s)}{(R^2+x^2-2sx+s^2)^{5/2}}\right]$$

وقتی که مقدار فوق برای $x=\frac{s}{2}$ بدست آید (برای نقطهٔ وسطی بین حلقه ها) نتیجه بصورت زیر است:

$$\left.\frac{dB}{dx}\right|_{s/2}=-\frac{N\mu_0 i R^2}{2}\left[\frac{3s/2}{(R^2+s^2/4)^{5/2}}-\frac{3s/2}{(R^2+s^2/4-s^2+s^2)^{5/2}}\right]=0$$

که از مقدار s مستقل است.

ب- مشتق دوم بصورت زیر بدست می آید:

$$\frac{d^2B}{dx^2}=-\frac{N\mu_0 i R^2}{2}\left[\frac{3}{(R^2+x^2)^{5/2}}+\frac{15x^2}{(R^2+x^2)^{7/2}}-\frac{3}{(R^2+x^2-2sx+s^2)^{5/2}}+\frac{15(x-s)^2}{(R^2+x^2-2sx+s^2)^{7/2}}\right]$$

در $x=\frac{s}{2}$ داریم:

$$\left.\frac{d^2B}{dx^2}\right|_{s/2}=\frac{N\mu_0 i R^2}{2}\left[-\frac{6}{(R^2+s^2/4)^{5/2}}+\frac{30s^2/4}{(R^2+s^2/4)^{7/2}}\right]$$

$$=\frac{N\mu_0 i R^2}{2}\left[\frac{-6(R^2+s^2/4)+30s^2/4)}{(R^2+s^2/4)^{7/2}}\right]$$

$$=3N\mu_0 i R^2\frac{s^2-R^2}{(R^2+s^2/4)^{7/2}}$$

که این در حالتیکه $s=R$ باشد برابر صفر می شود.

۸۷- حلقه سیمی با سطح مقطع مربعی به ضلع a را در نظر بگیرید که حامل جریان i است. نشان دهید که در مرکز حلقه اندازهٔ میدان مغناطیسی حاصل از جریان $B=\frac{2\sqrt{2}\,\mu_0 i}{\pi a}$ است.

پاسخ:

مرکز مربع در فاصلهٔ $R=\frac{a}{2}$ از نزدیکترین ضلع (که هر ضلع به طول $L=a$ است) واقع است. چهار ضلع در ایجاد میدان در مرکز دخیل هستند. نتیجه به این صورت است:

$$B_{center}=4\left(\frac{\mu_0 i}{2\pi(a/2)}\right)\left(\frac{a}{\sqrt{a^2+4(a/2)^2}}\right)=\frac{2\sqrt{2}\,\mu_0 i}{\pi a}$$

۸۸- نشان دهید که اندازهٔ میدان مغناطیسی تولید شده در مرکز حلقه سیمی مستطیلی، به طول L و به عرض W، که حامل جریان i باشد عبارت است از:

$$B=\frac{2\mu_0 i}{\pi}\frac{(L^2+W^2)^{\frac{1}{2}}}{LW}$$

پاسخ:

ضلع بزرگ را به طول L و ضلع کوچک را به طول W در نظر می گیریم. مرکز در فاصلهٔ $\frac{W}{2}$ از نقطهٔ وسط هر ضلع قرار دارد که در

فاصلهٔ $\frac{L}{2}$ وسط ضلع واقع است. دو نوع از هر ضلع وجود دارد که از نتیجه مسئلهٔ ۲۹-۱۷ بدست می آید:

$$B = 2\frac{\mu_0 i}{2\pi (W/2)}\frac{L}{\sqrt{L^2 + 4(W/2)^2}}$$

$$+ 2\frac{\mu_0 i}{2\pi (L/2)}\frac{W}{\sqrt{W^2 + 4(L/2)^2}}$$

شکل نهایی این عبارت از بدست آوردن مخرج معمولی نتیجهٔ فوق و جمع کردن آن بدست می آید که داریم:

$$\frac{L^2 + W^2}{\sqrt{W^2 + L^2}} = \sqrt{W^2 + L^2}$$

۸۹- حلقه سیمی مربعی به ضلع a را در نظر بگیرید که حامل جریان i است. نشان دهید که اندازهٔ میدان مغناطیسی حاصل در نقطه‌ای روی محور مرکزی عمودی حلقه، و به فاصلهٔ x از مرکز حلقه، برابر است با:

$$B(x) = \frac{4\mu_0 i a^2}{\pi (4x^2 + a^2)(4x^2 + 2a^2)^{\frac{1}{2}}}$$

ثابت کنید که این نتیجه با نتیجهٔ مسئلهٔ ۸۷ سازگار است.

پاسخ:

روش اول) تصور کنید که حلقه مربعی در صفحه yz واقع است (که مرکز آن در مبدأ واقع است) و نقطه مورد نظر که میدان در آنجا بدست می آید در راستای محور x. است (طبق صورت مسئله). مبدأ به فاصلهٔ $\frac{a}{2}$ از هر ضلع مربع قرار دارد با استفاده از قضیهٔ فیثاغورث داریم:

$$R = \sqrt{(a/2)^2 + x^2} = \frac{1}{2}\sqrt{a^2 + 4x^2}$$

فقط مؤلفه های x. میدانها در نتیجه نهایی مهم دارند (میدانها از اضلاع ناشی می شوند و بقیه مؤلفه دو به دو خنثی می گردند.) در نتیجه فاکتور مثلثاتی بصورت زیر خواهد شد:

$$\frac{a/2}{R} = \frac{a}{\sqrt{a^2 + 4x^2}}$$

که این از عبارت داده شده مربوط به نتیجه مسئلهٔ ۲۹-۱۷ بدست می آید. چون چهار ضلع داریم پس:

$$B(x) = 4\left(\frac{\mu_0 i}{2\pi R}\right)\left(\frac{a}{\sqrt{a^2 + 4R^2}}\right)\left(\frac{a}{\sqrt{a^2 + 4x^2}}\right)$$

$$= \frac{4\mu_0 i a^2}{2\pi\left(\frac{1}{2}\right)\left(\sqrt{a^2 + 4x^2}\right)^2\sqrt{a^2 + 4\left(\frac{a}{2}\right)^2 + 4x^2}}$$

که نتیجه را ساده می سازد. با قرار دادن $x = 0$ می بینیم که عبارت بدست آمده در مسئلهٔ ۲۹-۸۷ بدست می آید (توجه کنید که $\frac{4}{\sqrt{2}} = 2\sqrt{2}$).

روش دوم) الف- با استفاده از قانون بیوساوارمسا له را حل می کنیم. هر ضلع مربع یک تکه سیم راست به طول a است که سهمی از میدان به میزان زیر دارد:

$$B = \frac{\mu_0 i}{4\pi r}\frac{a}{\sqrt{\frac{a^2}{4} + r^2}}$$

که r فاصله، تا نقطه روی محور حلقه است، لذا:

$$r = \sqrt{\frac{a^2}{4} + r^2}$$

میدان موازی با محور z نیست، مؤلفهٔ z عبارتست از:

$$B_z = \frac{B\left(\frac{a}{2}\right)}{r}$$

چهار سهم با این مقدار وجود دارد. مؤلفه های غیر محوری حذف می شوند بنابراین میدان ناشی از مربع برابر است با: (در واقع **B** حاصل از سیم ۱ دارای مؤلفه عمودی و موازی هستند که بعلت تقارن مؤلفه موازی در صفحه مربع همدیگر را خنثی می کنند لذا، برای مؤلفه های عمود بر صفحه مربع داریم)

$$B = 4\frac{\mu_0 i}{4\pi r}\frac{a}{\sqrt{\frac{a^2}{4} + r^2}}\frac{a/2}{r} = \frac{\mu_0 i}{2\pi r^2}\frac{a}{\sqrt{\frac{a^2}{4} + r^2}}$$

$$B = \frac{\mu_0 i}{2\pi\left(\frac{a^2}{4} + z^2\right)}\frac{a^2}{\sqrt{\frac{a^2}{4} + r^2}}$$

$$= \frac{4\mu_0 i}{\pi (a^2 + 4z^2)}\frac{a^2}{\sqrt{2a^2 + 4z^2}}$$

ب- اگر $4z^2 = 0$ باشد در نتیجه داریم، (در مرکز حلقه $z = 0$ است):

$$B=\frac{4\mu_0 i}{\pi(a^2)}\frac{a^2}{\sqrt{2a^2}}=\frac{4\mu_0 i}{\sqrt{2}\pi a}$$

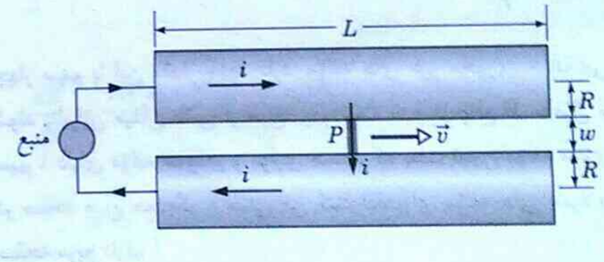
اگر $a \ll 2z^2$ باشد در نتیجه داریم:

$$B=\frac{4\mu_0 i a^2}{\pi(4z^2)(4z^2)^{1/2}}=\frac{\mu_0 i a^2}{\pi z^2 2z}=\frac{\mu_0 i a^2}{2\pi z^3}$$

۹۰- شکل زیر طرح ساده‌ای از یک تفنگ ریلی آرمانی را نشان می‌دهد. پرتابهٔ P در بین دو ریل پهن با سطح مقطع دایره‌ای قرار می‌گیرد. یک منبع جریان، جریان را از ریل‌ها و پرتابه (که رسانا است) عبور می‌دهد (از فیوز استفاده نمی‌شود). (الف) با فرض این که w فاصلهٔ بین دو ریل، R شعاع هر ریل، و i جریان گذرنده از ریل‌ها و پرتابه باشد، نشان دهید که نیروی وارد بر پرتابه در امتداد ریل‌ها و به طرف راست است و تقریباً برابر است با:

$$F=\frac{i^2\mu_0}{2\pi}\ln\frac{w+R}{R}$$

(ب) اگر پرتابه از انتهای چپ ریل‌ها و از حالت سکون شروع به حرکت کند، سرعت v آن را به هنگام پرت شدن از انتهای راست ریل‌ها بیابید. فرض کنید: $i=450\,\text{kA}$، $w=12\,\text{mm}$، $R=6{,}7\,\text{cm}$، $L=4{,}0\,\text{m}$، و جرم پرتابه هم $10\,\text{g}$ باشد.



شکل مسأله ۹۰

پاسخ:

یک جزء از پرتابه را بین y ، $y+dy$ در نظر بگیرید. از رابطهٔ ۲۹-۱۲ برای بدست آوردن نیروی مغناطیسی وارد بر جزء استفاده می کنیم و از رابطهٔ ۲۹-۷ برای پیدا کردن میدان مغناطیسی سیم نیمه بی نهایت بهره می جوییم (ریل بالایی بعنوان سیم ۱ و پایینی را بعنوان سیم ۲ در نظر می گیریم). جهت جریان در ریل ۱ در راستای $+\hat{i}$ و در سیم ۲ در راستای $-\hat{i}$ است. میدان (ایجاد شده در ناحیهٔ بین سیمها) توسط سیم ۱ به سمت داخل صفحه (جهت $-\hat{k}$) و توسط سیم ۲ نیز به سمت داخل صفحه است. المان نیروی اعمالی (که تابعی از y است) بر هر المان پرتابه (که در آن جریان در جهت $-\hat{j}$ منتقل می شود) در زیر داده شده است. مبدأ مختصات را در انتهای پرتابه قرار داده ایم:

$$d\mathbf{F}=d\mathbf{F}_1+d\mathbf{F}_2$$

$$=i\,dy\,(-\hat{j})\times\mathbf{B}_1+dy\,(-\hat{j})\times\mathbf{B}_2=i\left[B_1+B_2\right]\hat{i}\,dy$$

$$=i\left[\frac{\mu_0 i}{4\pi(2R+w-y)}+\frac{\mu_0 i}{4\pi y}\right]\hat{i}\,dy$$

در نتیجه نیروی وارد بر پرتابه برابر است با:

$$\mathbf{F}=\int d\mathbf{F}=\frac{i^2\mu_0}{4\pi}\int_R^{R+w}\left(\frac{1}{2R+w-y}+\frac{1}{y}\right)dy\,\hat{i}$$

$$=\frac{\mu_0 i^2}{2\pi}\ln\left(1+\frac{w}{R}\right)\hat{i}$$

ب- با استفاده از تئوری کار- انرژی داریم:

$$\Delta K=\frac{1}{2}m v_f^2=W_{ext}=\int \mathbf{F}\cdot d\mathbf{s}=FL$$

در نتیجه سرعت نهایی پرتابه برابر است با:

$$v_f=\left(\frac{2W_{ext}}{m}\right)^{1/2}=\left[\frac{2}{m}\frac{\mu_0 i^2}{2\pi}\ln\left(1+\frac{w}{R}\right)L\right]^{1/2}$$

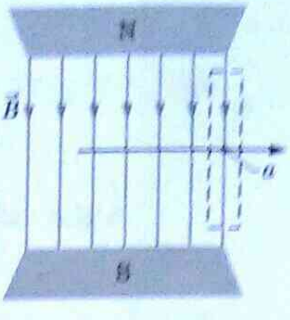
$$=\left[\frac{2(4\pi\times10^{-7}T.m/A)(450\times10^3 A)^2}{2\pi(10\times10^{-3}kg)}\right.$$

$$\left.\times\frac{\ln(1+1{,}2cm/6{,}7cm)(4{,}0m)}{1}\right]^{1/2}=2{,}3\times10^3\,m/s$$

۹۱- نشان دهید که یک میدان مغناطیسی یکنواخت $\mathbf{B}$ ممکن نیست ناگهان به صفر برسد (چنان‌که نبود خطوط میدان در طرف راست نقطهٔ a در شکل زیربه ظاهر حاکی از این امر است)؛ این موضوع، در عمل، وقتی پیش می‌آید که عمود بر خطوط میدان $\mathbf{B}$ در جهت پیکان نشان داده شده در شکل حرکت می کنیم. (*راهنمایی:* قانون آمپر را برای مسیر مستطیلی، که به‌صورت خط‌چین در شکل آمده است، به‌کار ببرید) در آهن‌رباهای واقعی، همیشه با "حاشیه" یا "چتر" خطوط میدان مغناطیسی همیشه روبه‌رو می‌شویم، و این هم بدان معنی است که $\mathbf{B}$ به تدریج به صفر می گراید. خطوط میدان را در شکل چنان اصلاح کنید که به واقعیت نزدیک‌تر شود.

پاسخ:

از قـانـون آمپر استفـاده می کنیم. بـرای حلقه نقطه چین نشان داده شـده در شـکل $i=0$ انتـگرال $\oint \mathbf{B}\cdot d\mathbf{s}$ در راستای اضلاع ته، راست و بالای حلقه صفر است. در راستای ضلع راست میدان برابر صفر است و



شکل مسأله ۹۱

در راستای اضلاع بالا و نه میدان عمود بر $d\mathbf{s}$ است. چنانچه l طول لبه چپ باشد آنگاه انتگرال جهتی $\oint \mathbf{B}\cdot d\mathbf{s}=Bl$ می انجامد که در آن B اندازه میدان مغناطیسی در ضلع سمت چپ حلقه است. چون نه B و نه l صفر می باشد قانون آمپر نقض می شود. در نتیجه هندسه نمایش داده شده برای خطوط میدان مغناطیسی اشتباه است. خطوط در واقع به سمت بیرون می روند و چگالی شان به تدریج کاهش می یابد بر خلاف اینکه بطور ناپیوسته طبق شکل عمل می کنند.

۹۲- نشان دهید که اگر ضخامت یک چنبره از شعاع انحنای آن خیلی کمتر باشد (چنبرهٔ بسیار نازک)، در آن صورت معادلهٔ ۲۹-۲۴ برای میدان درون چنبره به معادلهٔ ۲۹-۲۳ برای میدان درون سیم‌لوله تقلیل می‌یابد. توضیح دهید که چرا چنین نتیجه‌ای را باید انتظار داشت.

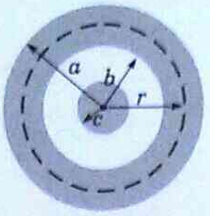
پاسخ:

در این حالت تقریباً $L=2\pi r$ طول چنبره است:

$$B=\mu_0 i_0\left(\frac{N}{2\pi r}\right)=\mu_0 n i_0$$

که این نتیجه قابل انتظار است چون از نظر یک نقطه درون چنبره، که آن قسمتی از چنبره که در نزدیکی نقطهٔ مشابه قسمتی از یک سولنوئید واقع است.

۹۳- شکل زیر سطح مقطع یک کابل هم‌محور بلند را همراه با شعاع‌های مربوط به رساناهای آن (a,b,c) نشان می‌دهد. جریان‌های یکسان در جهت‌های مخالف در سطح مقطع‌های این رساناها به‌طور یکنواخت توزیع شده‌اند. اندازهٔ هریک از این جریان‌ها برابر i است. عبارت‌هایی به‌دست آورید که میدان $B(r)$ را برحسب فاصلهٔ شعاعی r در گستره‌های زیر نشان دهند: (الف) $r<c$، (ب) $c<r<b$، (ج) $b<r<a$، و (د) $r>a$. (ه) این عبارت- ها را برای همهٔ حالت‌های خاصی که به نظرتان می‌رسد، بیازمایید. (و) با فرض $a=2.0\ \text{cm}$، $b=1.8\ \text{cm}$، $c=0.40\ \text{cm}$، و $i=120\ \text{A}$، نمودار تابع $B(r)$ را در گسترهٔ $0<r<3\ \text{cm}$ رسم کنید.



شکل مسأله ۹۳

پاسخ: الف- رابطهٔ ۲۹-۲۰ را برای $r<C$ اعمال می کنیم. انتخاب علامت طوری است که i در استوانه کوچکتر مثبت است و در استوانه بزرگتر منفی می باشد:

$$B=\frac{\mu_0 i r}{2\pi c^2}\quad,\quad r\le c$$

ب- رابطهٔ ۲۹-۱۷ برای ناحیهٔ بین رساناها اعمال می گردد:

$$B=\frac{\mu_0 i}{2\pi r}\quad,\quad c\le r\le b$$

ج- در رسانای بزرگتر بر هم نهی میدانها را ناشی از جریان داخلی رسانا (که هنوز از رابطهٔ ۲۹-۱۷ تبعیت می کند) بعلاوه میدان ناشی از جریان (منفی) آن قسمت بیرونی رسانا، که در شعاع کمتر از r واقع است، داریم. نتیجه برابر است با:

$$B=\frac{\mu_0 i}{2\pi r}-\frac{\mu_0 i}{2\pi r}\left(\frac{r^2-b^2}{a^2-b^2}\right)\quad,\quad b<r\le a$$

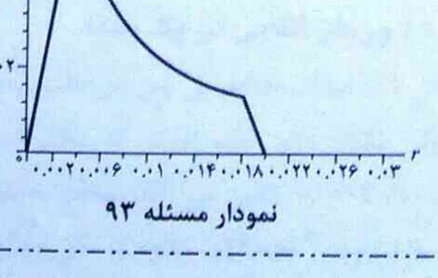
چنانچه بخواهیم این عبارت را می توان بصورت روبرو ساده کرد:

$$B=\frac{\mu_0 i}{2\pi r}\left(\frac{a^2-r^2}{a^2-b^2}\right)$$

د- خارج کابل کواکسیال جریان احاطه شده برآیند صفر است در نتیجه برای $r\ge a$ داریم $B=0$.

ه- این عبارت را برای یک حالت می آزماییم. چنانچه $b\to\infty\,,\,a\to\infty$ (بطوریکه $a>b$) آنگاه حالتی را خواهیم داشت که در صفحه ۶۹۷ کتاب توضیح داده شده.

و- با استفاده از واحدهای SI نمودار میدان بصورت زیر در می آید:



نمودار مسئله ۹۳